

УДК 531.36

© 2000 г. Ф. Пфайффер, К. Глоккер

КОНТАКТЫ В СИСТЕМАХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Дается обзор исследований по контактной механике в основном сотрудников Мюнхенского технического университета. Интерес к таким задачам возник в шестидесятых годах в связи с различными вопросами статики и теории упругости. Именно в этих областях было разработано и применено большинство математических методов. Растущая практическая необходимость описания вибраций и шумов, связанных с контактными процессами, привела к развитию методов динамики систем с односторонними связями.

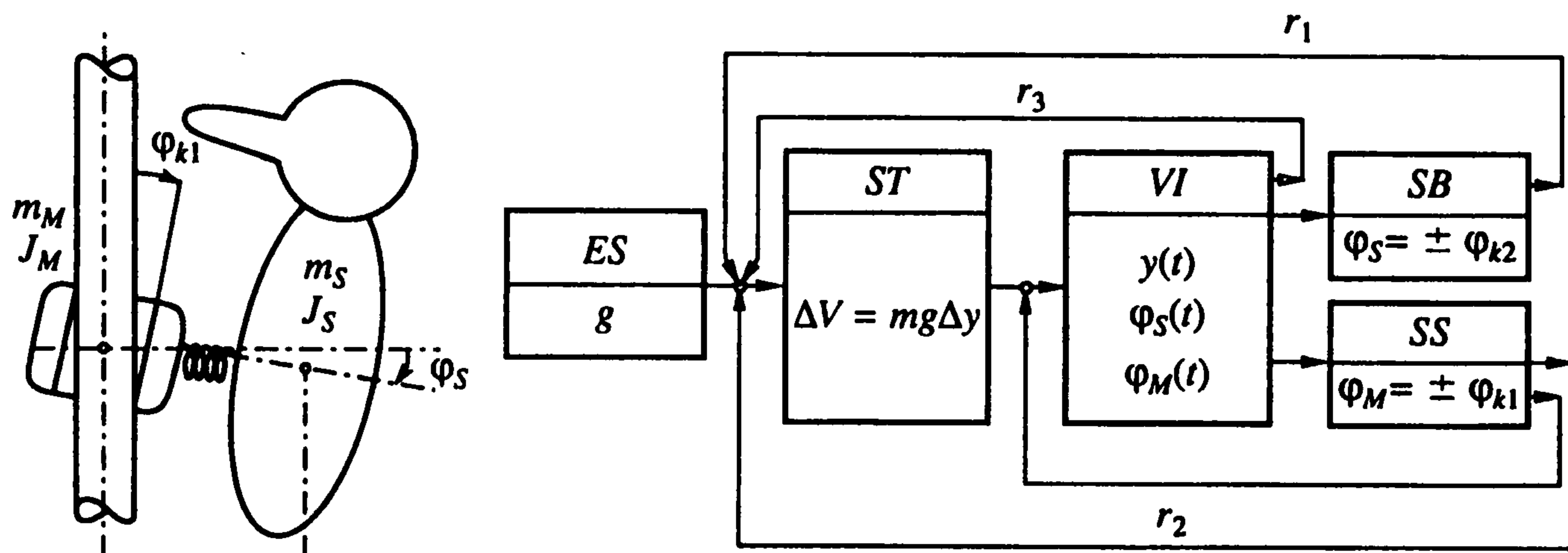
1. Введение. Контактные явления как двусторонние, так и односторонние очень часто возникают в динамических системах. Типичными односторонними контактами являются ходьба, хватание и скалолазание; разнообразными примерами одностороннего поведения изобилует работа машин и механизмов. Отсюда следует актуальность пополнения теории систем многих тел анализом контактных явлений.

Все контактные процессы имеют некоторые общие характерные черты. При полном контакте относительное скольжение прекращается, что приводит к возникновению дополнительной связи, порождающей реактивные силы. Будем называть такой контакт активным в отличие от пассивного контакта. Ясно, что переход между двумя этими видами контакта зависит от динамики рассматриваемой системы. Свидетельством начала такого контакта могут служить изменения таких кинематических величин, как относительные расстояния или относительные скорости, а его окончания – изменение величины нормальных сил и сил трения. Это служит основой для последующих математических формулировок.

При моделировании физики локального контакта имеется большое число возможных подходов, от законов Ньютона, Пуассона и Кулона до методов конечных или граничных элементов. Однако при моделировании больших динамических систем желательно иметь компактные контактные законы. Поэтому сконцентрируем внимание на законах первого типа, которые, несмотря на свою простоту, реально описывают широкий класс прикладных задач.

Описание различных контактных законов, методов конечных и граничных элементов, контактной статики и динамики, а также различных приложений можно найти, например, в книге В.В. Белецкого [1]. Европейские ученые заложили математические основы теории систем многих тел с несколькими односторонними контактами, которая вначале касалась лишь статических проблем. Первые исследования были проведены Моро и его учениками [2], а затем получили заметное развитие [3]. Моро ввел в динамику систем многих тел методы выпуклого анализа и переформулировал классические уравнения движения в виде дифференциальных включений для мер, что позволило охватить как безударное движение, так и удары, возникающие в контактных задачах с трением.

Были разработаны [4, 5] мощные методы решения статических и динамических задач контактной механики. Создана общая теория односторонних контактов в механике [4]. Разработан усовершенствованный алгоритм интегрирования плоских контактных проблем в системах твердых тел [5]. К дальнейшим заметным результатам



Фиг. 1

шведской школы относятся результаты [6], касающиеся моделирования при помощи конечных и граничных элементов. К достижениям российских ученых можно отнести, в частности, разработку методов негладких замен переменных, позволяющих провести регуляризацию уравнений систем с ударами [7, 8].

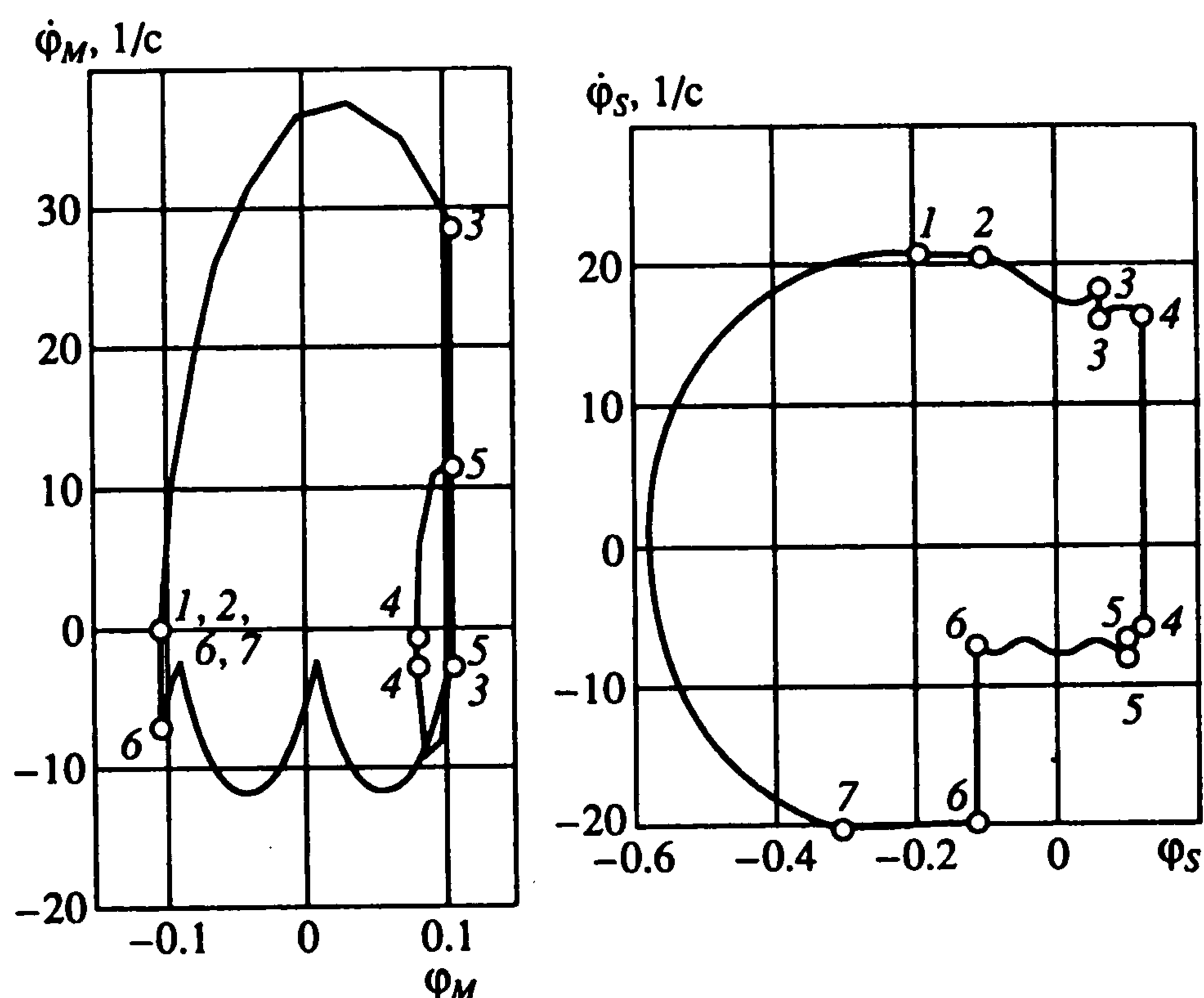
В Институте механики В, входящем в состав Мюнхенского технического университета, исследования в данной области проводились в течение более десяти лет, они в основном подытожены в книге авторов [9]. Некоторые более поздние результаты по нелинейным односторонним проблемам можно найти в [10]. Поскольку основные исследования в Институте мехатроники ведутся в области инженерной механики, главное внимание уделено переходу от строгих математических понятий к уровню, соответствующему инженерным приложениям.

2. Развитие теории. Рассмотрим развитие теории контактного взаимодействия на ряде примеров.

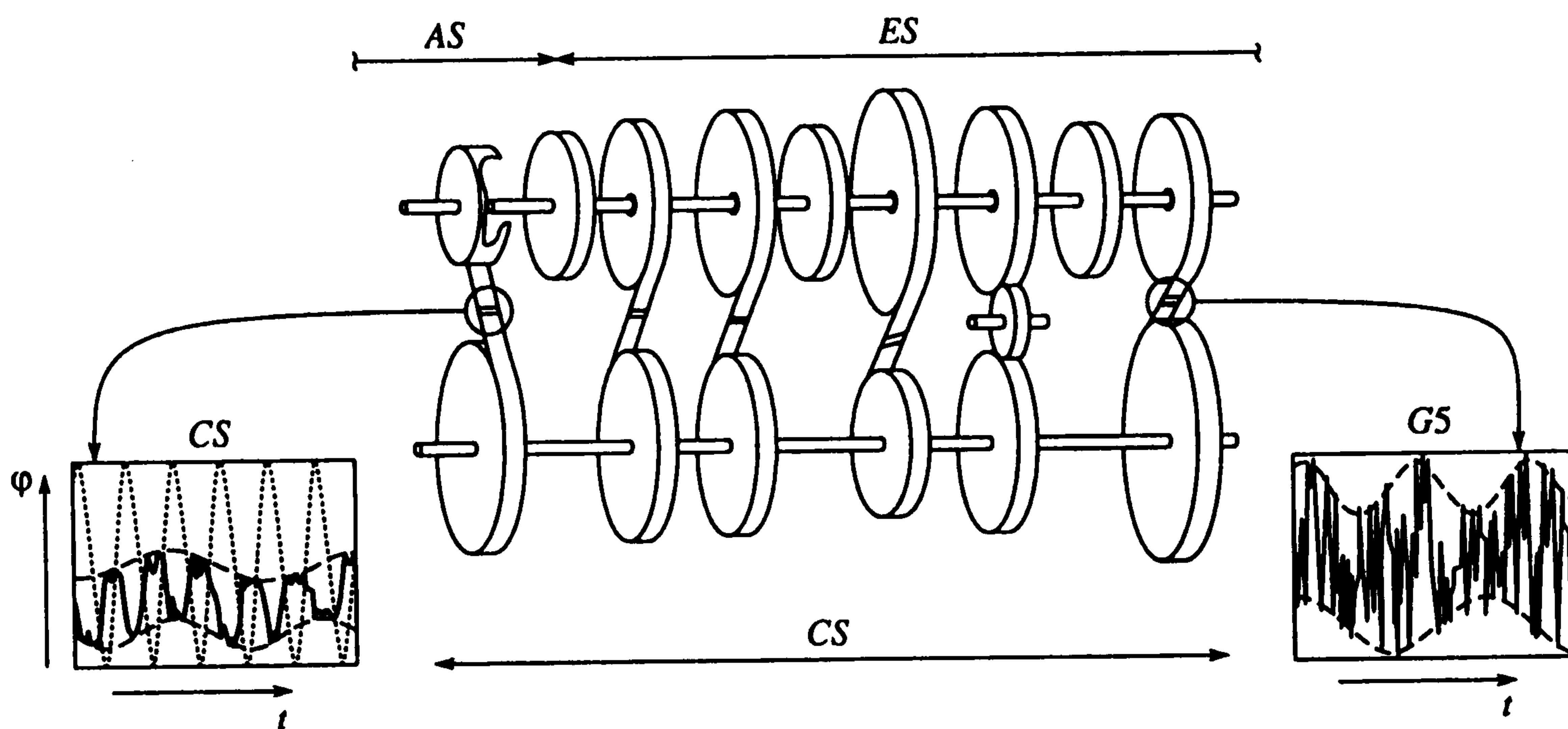
1°. Игрушечный дятел. Примером механической системы с изменяющимися структурными свойствами служит созданный сотрудниками авторов игрушечный дятел, действие которого основано на автоколебаниях (см. фиг. 1 и [11]). На фиг. 1 показан разрез игрушки вертикальной плоскостью и принципиальная схема ее работы. Здесь m_M, J_M – масса и центральный момент инерции муфты, m_S, J_S – аналогичные характеристики "дятла", φ_M и φ_S – углы отклонения от вертикали осей муфты и "дятла" соответственно. Далее φ_{k1} и φ_{k2} – предельные значения вышеупомянутых углов, отвечающие контакту муфты и клюва "дятла" со стержнем; при этих значениях происходят включения и выключения связей. Автоколебания дятла обусловлены наличием накопителя энергии ST , они описываются в отсутствие контактов функциями, включенными в блок VI . При этом муфта играет роль основного переключателя SS , а клюв "дятла" – роль вспомогательного переключателя SB , который не обязателен для того, чтобы игрушка работала. Эти переключатели управляют превращением потенциальной (гравитационной) энергии источника ES в кинетическую энергию поступательного и относительного движений, а также в потенциальную энергию пружинки. Символы r_i обозначают типы имеющихся в системе обратных связей, таких, как включение и выключение односторонних связей (r_1, r_2), превращение энергии при ударах (r_3), а также динамическая связь между координатами r_4 .

Теория, применявшаяся к описанию данной системы в 1984 г., была неполной ввиду отсутствия удовлетворительной концепции удара с трением. Поэтому трение включалось в модель эмпирически. Полученные результаты очень хорошо согласуются с измерениями.

Впоследствии появилась теория удара с трением [12, 13]. Ее приложение к данному примеру подтверждает более простую теорию и в то же время предоставляет улучшенную модель трения. На фиг. 2 некоторые результаты отражены в виде фазовых



Фиг. 2



Фиг. 3

портретов предельных циклов [12]. Конструкционные параметры системы можно найти в [9]. Основные фазы движения таковы (фиг. 2): 1–2 – скольжение, 2 – потеря контакта, 2–3 – свободное падение с высокочастотными колебаниями (частота 73 Гц), 3 – неупругий удар верхнего края муфты, 4 – удар клюва, 5–6 – свободное падение вниз, 6–7 – переход к остановке и самозаклиниванию муфты, 7–1 – угловое движение дятла с низкочастотными колебаниями с частотой около 9 Гц, что также подтверждено экспериментально.

2°. *Стук в шестернях.* Стук в шестернях представляет собой шум, возникающий в каскадах зубчатых передач в отсутствие нагрузки [14]. Примерами могут служить механизмы переключения передач или балансиры, приводимые в движения при помощи зубчатых передач. На фиг. 3 показана пятиступенчатая конфигурация шестерен, в которой ведущий вал AS приводит в движение контрвал CS, и в соответствии с включенной передачей контрвал вращает главный вал ES. Все шестерни зацеплены.

Переключение осуществляется путем синхронизированного соединения подходящей шестерни с главным валом. Эта шестерня будет нагружена в отличие от остальных, которые могут начать стучать вследствие зазоров в зацеплениях. Ведущий вал испытывает со стороны мотора крутильные колебания, близкие к гармоническим. Эти колебания передаются контрвалу, порождая стук в свободных шестернях. На фиг. 3 показан случай, когда включена четвертая передача, которая для механизма данного типа приводит к прямому соединению ведущего и главного валов. Контрвал и все шестерни разгружены. Гармоническое возбуждение приводит к виброударному движению контрвала (слева внизу) и к хаотическим колебаниям шестерен, в частности пятой (справа внизу) [15].

Прекрасную относительную меру шума, порождаемого стуком шестерен, можно получить, суммируя все ударные импульсы Λ_N и вводя интенсивность шума $c \sum |\Lambda_N|$. Многочисленные приложения к реальным зубчатым соединениям подтверждают, что эта мера правильно описывает все параметрические зависимости. На фиг. 4 изображены два примера механизмов переключения передач для пикапа (1) и для автомобиля высшей категории среднего класса (2). Здесь штриховыми линиями изображены теоретические зависимости уровня шума L в децибелах от числа оборотов двигателя в минуту n , а сплошными – экспериментальные результаты. Для подбора коэффициента c использовалось всего одно измерение.

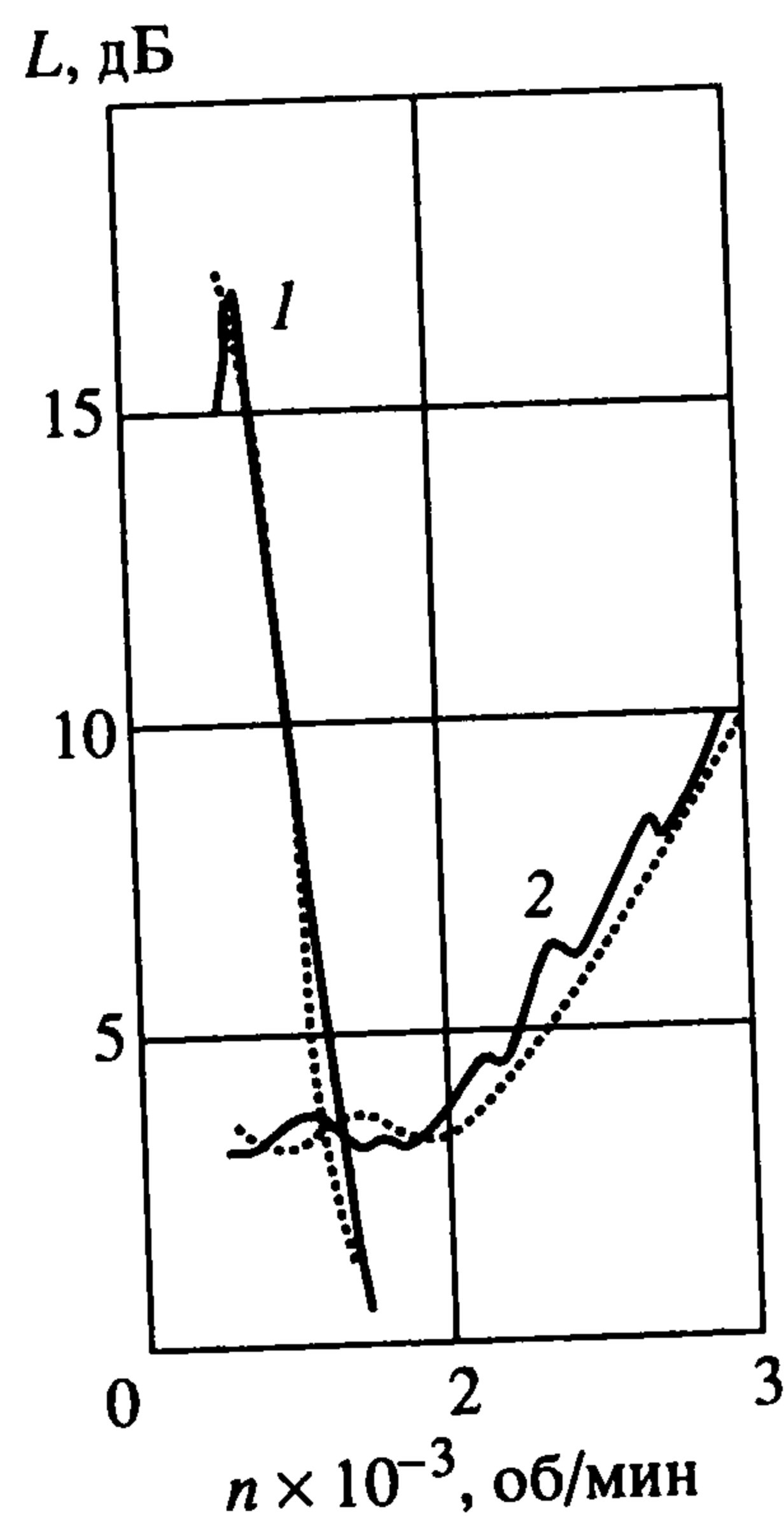
3°. *Демпфер турбинной лопатки.* Предыдущие два примера демонстрируют использование теории удара, дополненной трением. Изучение действия демпфера турбинной лопатки, полностью основанное на процессах скольжения и остановки, явилось шагом к новым исследованиям [16, 17].

Демпферы турбинных лопаток представляют собой согнутые в форме параболических цилиндров стальные листы, они часто используются в газовых турбинах для гашения колебаний лопаток за счет сухого трения, сопровождающего относительное движение. Типичная конфигурация показана на фиг. 5. Она состоит из двух платформ 2 с массами m_1, m_3 , несущих турбинные лопатки 1 с массами m_2, m_4 и разделенных фрикционным демпфером 3 с массой m_5 и моментом инерции J_5 . Смещения платформ и турбинных лопаток описываются линейными координатами q_1, q_2, q_3, q_4 . В отсутствие связей демпфер имеет две поступательных степени свободы q_6, q_7 и одну вращательную q_5 . Постоянная радиальная сила F_Z является центробежной силой, под ее влиянием демпфер прижимается к наклонным плоскостям платформ. Движение лопаток возбуждается газодинамическими силами $F_2(t), F_4(t)$, приближенно описываемыми гармоническим законом. Упругие и диссипативные свойства системы учитываются при помощи четырех пар вязкоупругих элементов c_i, d_i .

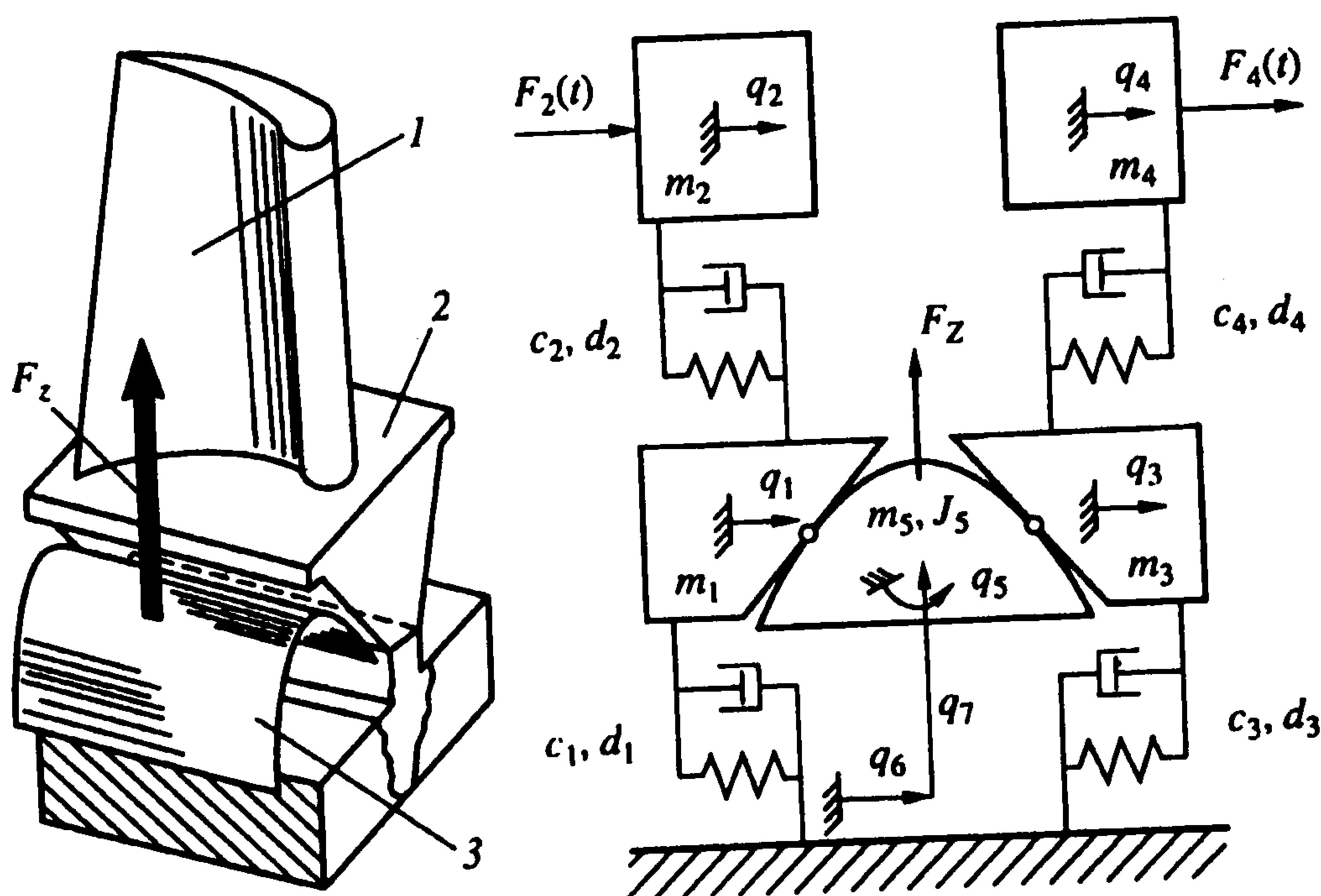
В данной модели возможны такие движения: скольжение в обеих точках контакта K_1 и K_2 (5 степеней свободы); скольжение в точке K_1 при неподвижной точке K_2 (4 степени свободы); скольжение в точке K_2 при неподвижной точке K_1 (4 степени свободы); обе точки K_1 и K_2 неподвижны (3 степени свободы).

Неподвижность одной из точек контакта означает вращение без проскальзывания, а неподвижность обеих точек дает возможность вместо трех координат (q_1, q_3, q_5) использовать одну единственную. Для каждой из этих конфигураций можно составить систему уравнений, описывающих движение в отсутствие переходов. Такие переходы между скольжением и остановкой типичны для систем с трением: остановка скольжения происходит в момент, когда относительная тангенциальная скорость в одной из точек контакта становится равной нулю, при этом сила статического трения больше тангенциальной реакции связи; началу скольжения соответствует условие, когда тангенциальная реакция связи становится равной силе статического трения, при этом появляется ненулевое тангенциальное ускорение.

После каждого перехода для описания дальнейшего поведения системы вплоть до следующего перехода следует выбрать соответствующее множество уравнений движения [16].



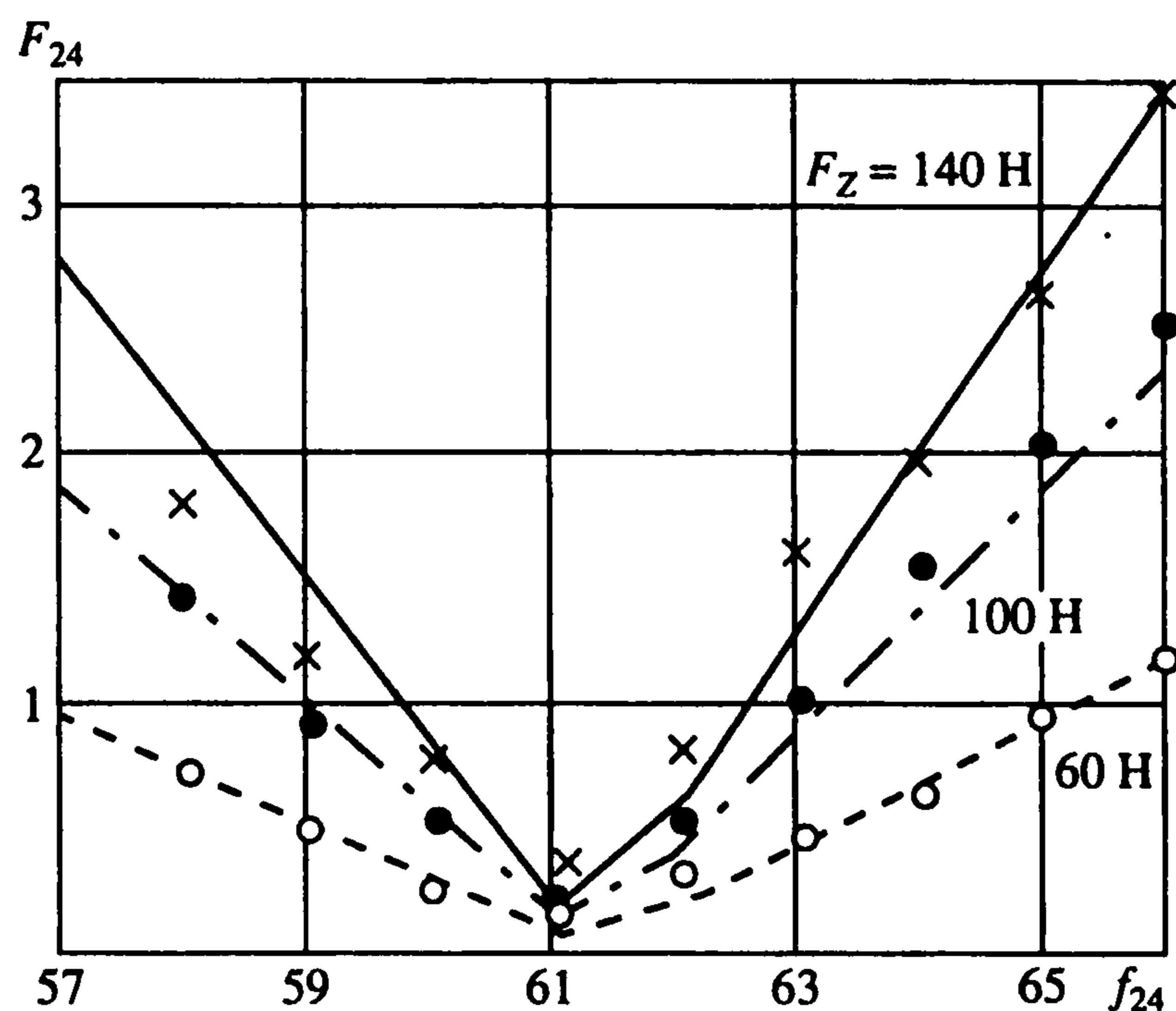
Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 6 показаны теоретические зависимости амплитуды возбуждающей силы F_{24} (в ньютонах) от частоты f_{24} (в герцах) для трех значений центробежной силы F_Z при значении 50° угла платформы; светлыми и темными точками и крестиками представлены экспериментальные данные. Величина F_{24} должна увеличиваться при больших значениях центробежной силы F_Z . Малость величины F_{24} при частоте возбуждения 61 Гц можно объяснить следующим образом. Значение $f_{24} = 61$ Гц соответствует собственной частоте системы лопатка – демпфер. Это означает, что возбуждение с такой частотой приводит к колебаниям лопатки с большой амплитудой и вследствие этого к значительному уменьшению фазы скольжения. При этом демпферы начинают скользить при возбуждении силой с весьма малой амплитудой.

4°. Удар при посадке самолета. Удар при приземлении упругого самолета зависит от его конфигурации, его упругих параметров и от свойств главного и носового шасси. В важной для практики задаче о посадке самолета впервые не удалось, по крайней мере без больших усилий, выписать в явной форме различные множества уравнений



Фиг. 6

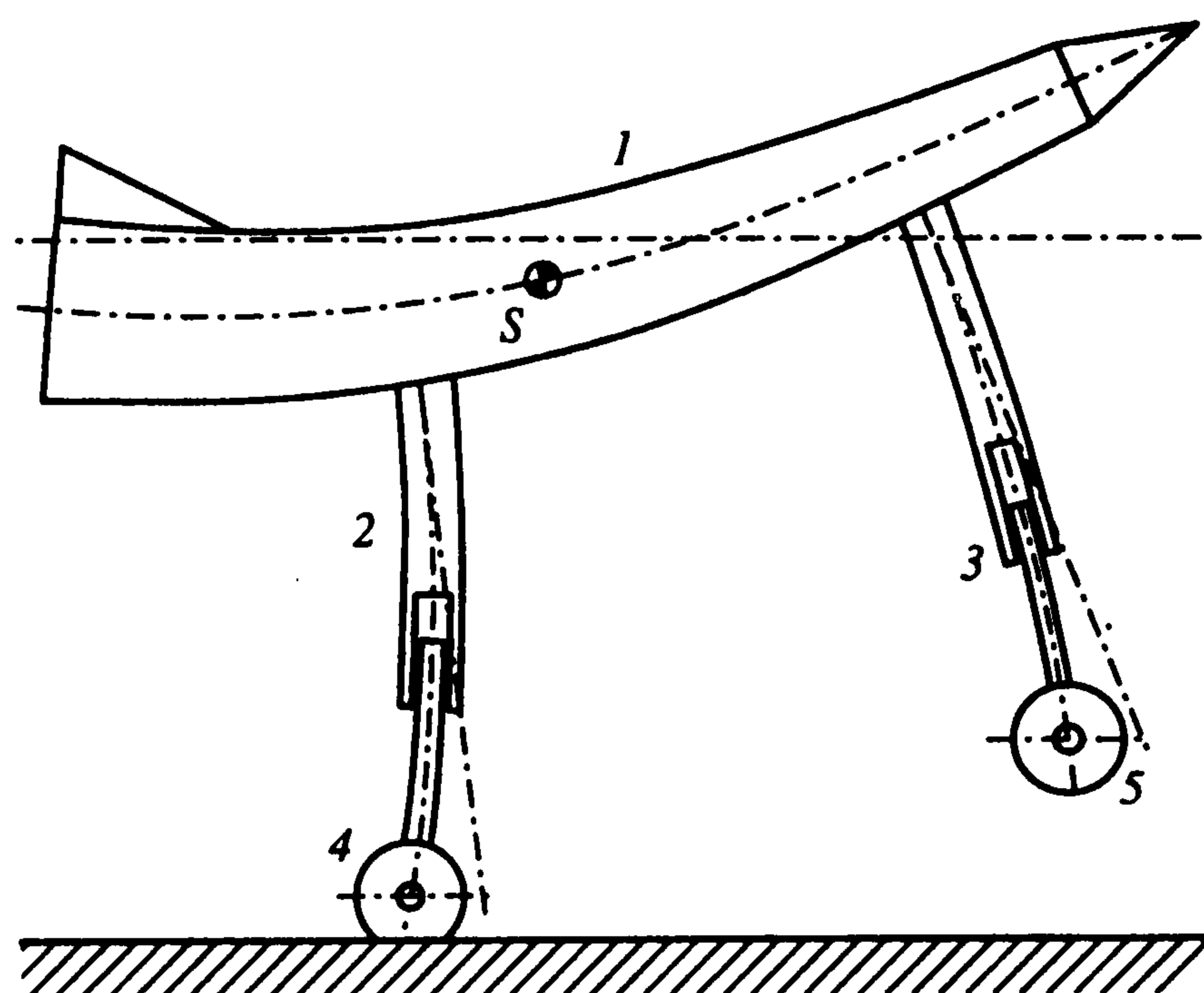
движения. Здесь необходимо было создать некоторый теоретический алгоритм, позволяющий автоматически отбирать нужные уравнения [18, 19]. Внутренняя структура подвесок обуславливает наличие ударов и явлений скольжения с остановками, существенно влияющих на динамику приземления.

Плоская упругая модель (принципиальная схема изображена на фиг. 7) выбрана состоящей из следующих тел [9]: 1 – упругий фюзеляж (S – его центр масс); 2 – упругое главное шасси, 3 – упругое носовое шасси, 4 – жесткие колеса главного шасси, 5 – жесткие колеса носового шасси. Будем полагать, что изгибные деформации амортизаторов ударов однородны при изменении их длины, что означает одинаковый изгиб двух компонент амортизатора. Такое приближение оказывается достаточным.

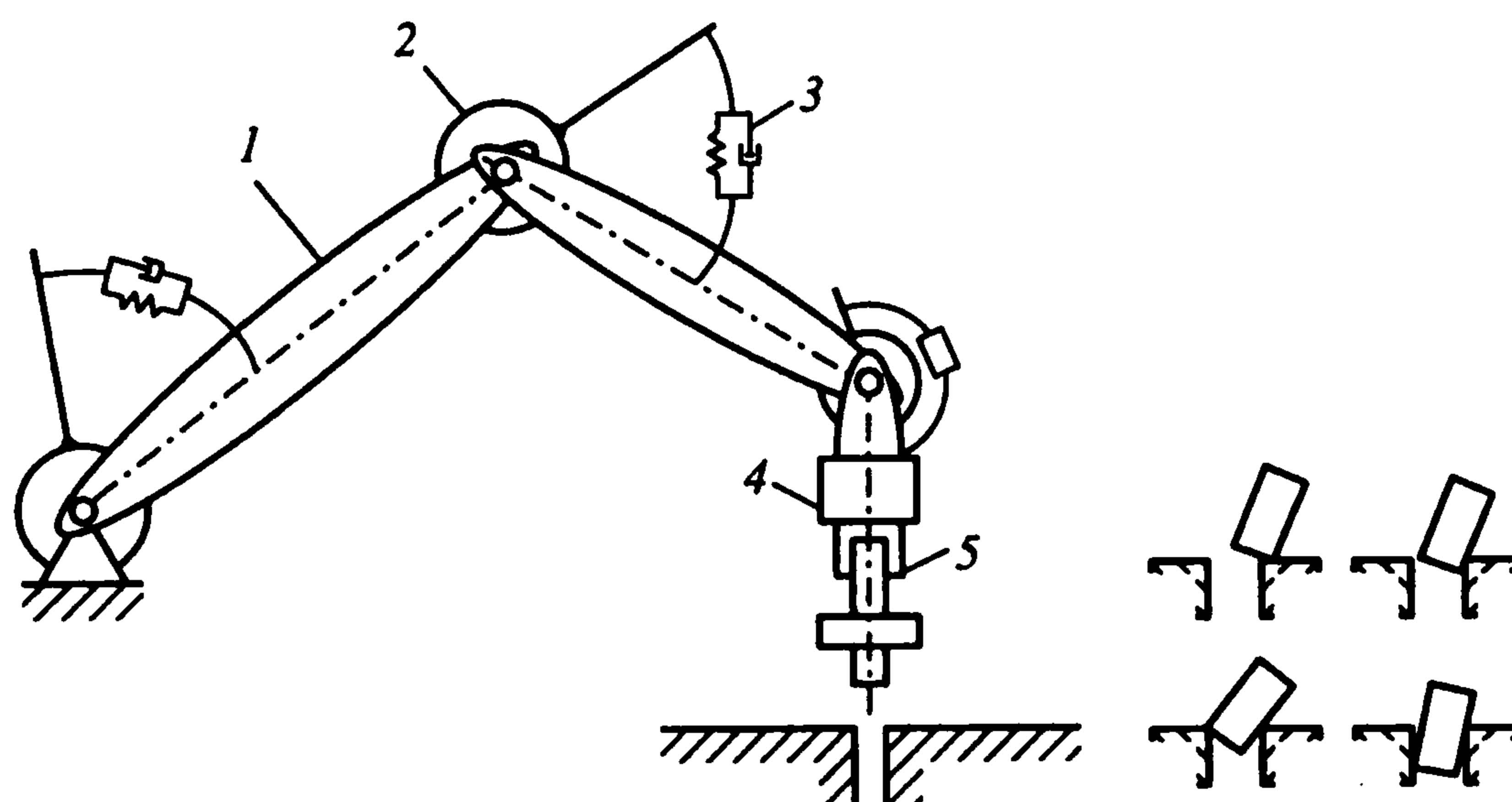
При описании процесса посадки следует рассмотреть нелинейности различных типов. Жесткость шин постепенно возрастает с ростом их деформаций. Кроме того, процесс вращения колес сопровождается трением, связанным с проскальзыванием сильно нелинейными соотношениями. Некоторые свойства самого амортизатора также нелинейны. Работа двух газовых камер описывается законом политропного сжатия и расширения, потери на трение в потоке жидкости обуславливают квадратное демпфирование, и трение в контакте колес с грунтом также нелинейно.

Разрывные нелинейности возникают вследствие наличия верхнего и нижнего ограничителя хода амортизатора, а также вследствие процессов скольжения с остановками для двух цилиндров амортизатора. Различные разрывы в полной системе приводят к тому, что для ее описания потребовалось бы свыше 40 различных множеств уравнений движения, что неосуществимо. К настоящему времени разработан алгоритм для систематического и автоматического генерирования уравнений движения, основанный по большей части на свойствах матрицы связей W (см. ниже разд. 3 и полученные ранее результаты [9]). Результаты хорошо согласуются с практическим опытом.

5°. *Процессы сборки.* Соединение различных частей включает в себя разнообразные и иногда быстро меняющиеся комбинации ударов с трением или без трения, процессов скольжения с остановками и даже заклинивания. Эти комбинации и переходы между ними нельзя предсказать заранее, так как они зависят от текущего состояния системы, поэтому необходима соответствующая теория. Именно эта проблема вызвала появление методов дополненности, субдифференциалов и выпуклого анализа [9, 12, 20].



Фиг. 7



Фиг. 8

Практическое применение перечисленных методов к до известной степени абстрактным теориям обычно разворачивается на различных уровнях: на явление перехода между контактными конфигурациями указывают либо величины относительных кинематических характеристик (в начале процесса), либо величины реакций связей (в конце). Относительные кинематические характеристики могут указывать на наличие перехода или играть роль уравнений связей в качестве компонент матрицы связей, описывающей новую контактную конфигурацию. Для описания самого перехода используется принцип дополнительности кинематических характеристик и реакций связей: если одна из этих двух групп обращается в нуль, то другая – нет. Такое рассмотрение с применением соответствующего математического аппарата [4, 9] позволяет эффективно моделировать процессы сборки. В качестве примера возьмем операцию установки штифта в отверстие, осуществляемую манипулятором [21, 22].

Робот-манипулятор обычно рассматривается как древоподобная система твердых тел и упругих компонент. Звенья очень часто моделируются твердыми телами, и лишь в особых случаях их считают упругими. Сочленения могут идеально описываться некоторым законом зависимости момента от угла поворота или быть упругими и обладать собственными степенями свободы (фиг. 8). Следовательно, можно подразделять общие n степеней свободы на моторные, или внутренние (n_M), внешние (n_A) и

упругие (n_c) степени свободы. Затем можно вывести уравнения движения, применяя принцип Журдена, согласно которому реакции шарниров перпендикулярны направлению движения и не создают работу.

Поскольку большинство задач соединения в сборочных камерах требует небольшой рабочей площади, движение робота будет медленным, и центробежными и кориолисовыми силами можно в дальнейшем пренебречь по сравнению с гравитационными и инерционными силами. Следовательно, уравнения движения робота можно линеаризовать вблизи данного состояния системы. В процессе сборки деталь, удерживаемая роботом, попадает в различные ситуации контакта с присоединяемой частью. Это иллюстрируются фиг. 8 для плоской задачи установки штифта в отверстие. Здесь 1 – рука, 2 – мотор, 3 – модель передачи, 4 – связующий элемент и 5 – лапа.

В этой системе могут возникнуть один или более контактов, ограничивающих движение лапы и, следовательно, мобильность робота за счет замыкания кинематической петли для манипулятора.

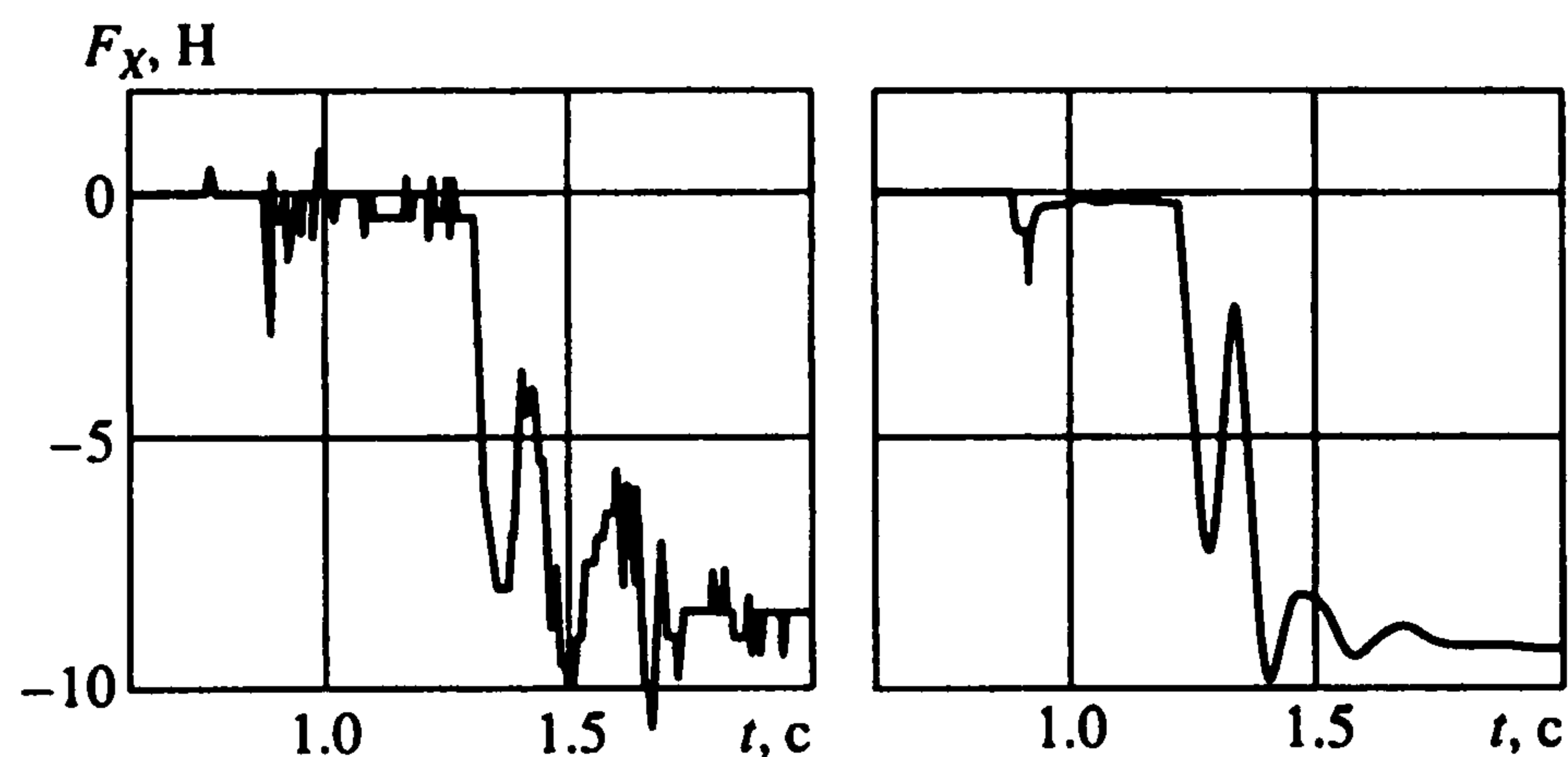
Экспериментальные исследования направлены на проверку теории для процессов сборки с различными конфигурациями и на рассмотрение возмущений в процессе установки штифта в отверстие. Сначала рассмотрим возмущенное движение в плоской задаче, где силы развиваются лишь при наличии неопределенностей. Для проверки предложенного теоретического подхода были проведены эксперименты с лабораторным роботом, имеющим пять степеней свободы и датчик момента силы. Приспособление, содержащее присоединяемую часть, оборудовано шестью датчиками расстояния, измеряющими положение и ориентацию лапы. Кроме того, здесь располагаются два поступательных и три вращательных регулятора, позволяющих вырабатывать определенные ошибки в относительном расположении подлежащих сочленению частей.

В одном из экспериментов исследовался процесс установки штифта при наличии его бокового смещения относительно отверстия. Соответствующие численные (справа) и экспериментальные результаты (слева) представлены на фиг. 9, где t – время, F_x – сила, необходимая для установки штифта в связи с его боковым смещением. Пики на графике силы при $t = 0,9$ – результат удара штифта о кромку. После того как при $t = 1,2$ с достигается двухточечный контакт, движение манипулятора очень быстро замедляется, вплоть до достижения условий заклинивания. Лишь когда управляющие моменты станут достаточно большими, движение продолжится со скольжением в двух точках контакта, а в конце даже в единственной точке. Этот цикл, изображаемый осцилляциями в графике силы, повторяется до конца траектории и демонстрирует явление изменения связей в течение операции сборки.

3. Математическое описание. Рассмотрим систему твердых тел с n_A фрикционными контактами. Максимальное число степеней свободы f достигается, когда ни один из контактов не замкнут. В этом состоянии систему можно описать набором обобщенных координат $q \in R^f$, а уравнения движения примут вид

$$M\ddot{q} - h - \sum_{i=1}^{n_A} (w_{N_i} \lambda_{N_i} + W_{T_i} \lambda_{T_i}) = 0 \quad (3.1)$$

Здесь M – симметричная положительно-определенная матрица, описывающая распределение масс, h содержит гироскопические силы и однозначные приложенные силы, а сумма относится к контактным силам. Для каждой пары точек контакта i возьмем ортогональную систему (n, u, v) , такую, что n – общая нормаль к поверхностям контактирующих тел, а (u, v) отмечают два ортогональных направления в касательной плоскости контакта. Тогда тройка (n, u, v) определяет в конфигурационном пространстве три направления для обобщенных сил w_N и $W_T = (w_U, w_V)$, а λ_N вместе с $\lambda_T^T = (\lambda_U, \lambda_V)$ понимаются как нормальная и две тангенциальных проекции контактных сил.



Фиг. 9

Кинематическое состояние контакта определяется расстоянием $g_N(q, t)$ между участвующими в нем телами, относительными скоростями $(\dot{g}_N, \dot{g}_U, \dot{g}_V)$ точек контакта в направлениях (n, u, v) и их производными по времени $(\ddot{g}_N, \ddot{g}_U, \ddot{g}_V)$. Непосредственные расчеты кинематики контакта приводят к таким соотношениям [19, 21]:

$$\dot{g}_{N_i} = w_{N_i}^T \dot{q} + \hat{w}_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} = W_{T_i}^T \dot{q} + \hat{w}_{T_i} \quad (3.2)$$

В формулах (3.2) величины w_N, W_T определены выше, g_N – расстояние между контактирующими телами, $\dot{g}_N$ описывает относительную скорость точек контакта в нормальном направлении, а $\dot{g}_T = (\dot{g}_U, \dot{g}_V)^T$ – тангенциальная относительная скорость, определяющая также направление относительного скольжения точек контакта в общей касательной плоскости. Дифференцируя соотношения (3.2) по времени, получим

$$\ddot{g}_{N_i} = w_{N_i}^T \ddot{q} - \bar{w}_{N_i}, \quad \ddot{g}_{T_i} = W_{T_i}^T \ddot{q} + \bar{w}_{T_i} \quad (3.3)$$

где $\bar{w}_N = \dot{w}_N^T \dot{q} - \dot{\hat{w}}_N$ и $\bar{w}_T = \dot{W}_T^T \dot{q} + \dot{\hat{w}}_T$. Уравнение (3.3) необходимо для формулировки контактных законов трения на уровне ускорений подобно тому, как индекс дифференциальной алгебраической механической системы понижают с 3 до 1.

Вообще говоря, любую силу, действующую в системе твердых тел, можно выразить через некоторые относительные кинематические величины, такие как относительные перемещения и скорости. Классические приложенные силы представляются непрерывными функциями, а классические двусторонние связи требуют для своего представления многозначных отображений. Используемые ниже контактные законы относятся ко второму типу и образуют характеристики смешанного типа, проявляющие себя в некоторых областях как классические приложенные силы, а в других областях – как связи.

Пусть g_{N_i} – расстояние между точками контакта, λ_{N_i} – соответствующая нормальная сила, тогда недеформируемость твердых тел можно выразить условиями Синьорини – Фикеры [3–6, 12]

$$g_{N_i} \geq 0, \quad \lambda_{N_i} \geq 0, \quad g_{N_i} \lambda_{N_i} = 0 \quad (3.4)$$

которое можно использовать в комбинации, например, с кулоновым трением в тангенциальном направлении, описываемом соотношениями [2–4, 6]

$$\dot{g}_{T_i} = 0 \Rightarrow |\lambda_{T_i}| \leq \mu_{0i} \lambda_{N_i}, \quad \dot{g}_{T_i} \neq 0 \Rightarrow |\lambda_{T_i}| = \mu_i \lambda_{N_i} \quad (3.5)$$

$$\lambda_{T_i} = -\alpha_i \dot{g}_{T_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \mu_{0i} = \mu_i(0)$$

где $\mu_i(\dot{g}_{T_i})$ – коэффициент трения в i -м контакте.

Следуя изложенному ранее подходу [9, 10, 12], введем множества индексов

$$\begin{aligned} I_A &= \{1, 2, \dots, n_A\} \\ I_C(t) &= \{i \in I_A \mid g_{N_i} = 0, \dot{g}_{N_i} \geq 0\} \\ I_N(t) &= \{i \in I_C \mid \dot{g}_{N_i} = 0\} \\ I_T(t) &= \{i \in I_N \mid \dot{g}_{T_i} = 0\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя определенные предположения о непрерывности траекторий $q(t)$, можно представить контактные законы (3.4), (3.5) на уровне ускорений, что позволит в конечном итоге разрешить уравнение (3.1) относительно неизвестных $\ddot{q}$. В результате для контактного закона в нормальном направлении (3.4) получим

$$\begin{aligned} \lambda_{N_i} &= 0 \quad \text{для} \quad i \in I_A \setminus I_N \\ \ddot{g}_{N_i} &\geq 0, \quad \lambda_{N_i} \geq 0, \quad \ddot{g}_{N_i} \lambda_{N_i} = 0 \quad \text{для} \quad i \in I_N \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вторую группу условий (3.7) можно выразить в виде одного из следующих вариационных неравенств [3, 5, 6, 10]:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_N} \ddot{g}_{N_i} (\lambda_{N_i}^* - \lambda_{N_i}) &\geq 0, \quad \lambda_{N_i} \geq 0, \quad \forall \lambda_{N_i}^* \geq 0 \\ \sum_{i \in I_N} (\ddot{g}_{N_i}^* - \ddot{g}_{N_i}) \lambda_{N_i} &\geq 0, \quad \ddot{g}_{N_i} \geq 0, \quad \forall \ddot{g}_{N_i}^* \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогично можно получить из (3.5) закон трения на уровне ускорений в виде [10]

$$\begin{aligned} \lambda_{T_i} &= 0 \quad \text{для} \quad i \in I_A \setminus I_N \\ \lambda_{T_i} &= -e_i \mu_i \lambda_{N_i} \quad \text{для} \quad i \in I_N \setminus I_T \\ \ddot{g}_{T_i} = 0 &\Rightarrow |\lambda_{T_i}| \leq \mu_{0i} \lambda_{N_i}, \quad \ddot{g}_{T_i} \neq 0 \Rightarrow |\lambda_{T_i}| = \mu_{0i} \lambda_{N_i} \\ \lambda_{T_i} &= -\alpha_i \ddot{g}_{T_i}, \quad \alpha_i > 0; \quad i \in I_T \end{aligned} \quad (3.9)$$

где e_i – единичный вектор в направлении скольжения, т.е. $e_i = \dot{g}_{T_i} / |\dot{g}_{T_i}|$. Напомним, что вследствие принятой зависимости от нормальных сил для третьей группы соотношений (3.9) допустимы лишь квазивариационные неравенства вида [10]

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_T} \ddot{g}_{T_i}^T (\lambda_{T_i}^* - \lambda_{T_i}) &\geq 0, \quad |\lambda_{T_i}| \leq \mu_{0i} \lambda_{N_i} \quad \forall |\lambda_{T_i}^*| \leq \mu_{0i} \lambda_{N_i} \\ \sum_{i \in I_T} (\ddot{g}_{T_i}^* - \ddot{g}_{T_i})^T \lambda_{T_i} &\geq \sum_{i \in I_T} \mu_{0i} \lambda_{N_i} (\ddot{g}_{T_i} - \ddot{g}_{T_i}^*), \quad \forall \ddot{g}_{T_i}^* \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.1)–(3.3), (3.7) и (3.9) предоставляют полное описание безударного негладкого движения твердого тела под действием кулонова трения в рамках негладкого анализа. Таким образом, рассмотренные выше уравнения могут далее обсуждаться и оцениваться на основе доступных теоретических результатов и алгоритмов, существующих в данной области [2–4, 6]. Исключенные выше удары могут быть рассмотрены аналогичным образом посредством преобразования уравнения (3.1) в пространство мер и решения его в моменты ударов [2]. Воспользовавшись подходящим законом удара, получим отсюда совокупность соотношений, аналогичных

рассмотренным выше, в которых роль сил играют импульсы, а роль ускорений – скачки скоростей [9, 12, 13].

4. Выводы. В теории систем твердых тел с односторонними контактами методология достигла такого уровня, который делает возможным решение прикладных задач практически во всех областях инженерной механики. Поскольку односторонние контакты очень часто встречаются в машинах и механизмах, применения соответствующей теории еще ожидают своего часа. Здесь был приведен ряд примеров, демонстрирующих типичные черты односторонних связей в машинах: с одной стороны, их наличие может обеспечить определенное функциональное поведение подобно заданной скорости вибротранспорта, с другой стороны, они могут быть источником нежелательных вибраций, шума, подобного стуку в коробках передач, или износа цепей.

Возможности приложений сегодня ограничены трудностями вычислительного характера. Для описания механизма, подобного вибротранспорту, требуются утомительные численные оценки при решении проблем дополненности на каждом шаге вычислений. Даже при наличии современных высокоскоростных компьютеров возникают серьезные проблемы, касающиеся времени счета.

Существует три группы алгоритмов, пригодных для расчетов.

Во-первых, это методы, связанные с перечислением различных вариантов в поиске решения на основе той или иной разумной процедуры метода проб и ошибок. Они неудовлетворительны: в частности, метод Лемке, основанный на хорошо известном симплекс-методе, достаточно хорош, но требует огромного времени расчетов. В рамках итеративных методов многообещающе выглядит модифицированный метод Ньютона, даже для нелинейных проблем дополненности. В настоящее время ведется его разработка.

Вторая проблема, также тесно связанная с численными расчетами, состоит в решении нелинейных условий дополненности, возникающих при рассмотрении пространственных односторонних контактов. До сих пор авторы пользовались следующими методами: линеаризация конусов трения, методы лагранжевых пополнений, а также NCP-функции, фигурирующие в теореме Мангасаряна. Все эти методы удовлетворительны, но нуждаются в усовершенствовании, по крайней мере, необходимо развить лучший из них. Авторы работают и над этим.

Заметим в заключение, что доступные сегодня теории и методы помогают инженерам гораздо лучше понять задачи с односторонними контактами, ранее рассматривавшиеся лишь весьма упрощенно. Современные методы анализа механизмов с односторонними контактами еще пять лет тому назад нельзя было даже вообразить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beletsky V.V.* Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper. Stuttgart: B.G. Teubner, 1995. 148 S.
2. *Moreau J.J.* Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics // *Nonsmooth mechanics and applications*. Wien; New York: Springer, 1988. P. 1–82.
3. *Alart P., Curnier A.* A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1991. V. 92. № 3. P. 353–375.
4. *Panagiotopoulos P.D.* Hemivariational inequalities. Applications in Mechanics and Engineering. Berlin etc.: Springer, 1993. 451 p.
5. *Lötstedt P.* Numerical simulation of time-dependent contact and friction problems in rigid body mechanics // *Technical report TRITA-NA-8214*. Sweden. 1982. 48 p.
6. *Klarbring A., Biörkman G.* A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface // *Computers and Structures*. 1988. V. 30. № 5. P. 1185–1198.
7. *Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А.* Механика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.
8. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.

9. *Glocker Ch., Pfeiffer F.* Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. N.Y.: Wiley, 1996. 317 p.
10. *Wösle M.* Dynamik von räumlichen strukturvarianten Starrkörpersystemen // Fortschritt-Berichte VDI, R. 18. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1997. № 213. 157 S.
11. *Pfeiffer F.* Mechanische systeme mit unstetigen Übergängen // Ing.-Arch. 1984. V. 54. № 3. P. 232–240.
12. *Glocker Ch.* Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen // Fortschritt-Berichte VDI, R. 18. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1995. № 182. 220 S.
13. *Glocker Ch., Pfeiffer F.* Multiple impacts with friction in rigid multibody systems // Nonlinear Dynamics. 1995. V. 7. № 4. P. 471–497.
14. *Küçükay F., Pfeiffer F.* Über Rasselschwingungen in Kfz-Schaltgetrieben // Ing.-Arch. 1986. V. 56. № 1. P. 25–37.
15. *Karagiannis K., Pfeiffer F.* Theoretical and experimental investigation of gear rattling // Nonlinear Dynamics. 1991. V. 2. № 5. P. 367–387.
16. *Hajek M.* Reibungsdämpfer für Turbinenschaufeln // Fortschritt-Berichte VDI, R. 11. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1990. № 128. 119 S.
17. *Pfeiffer F., Hajek M.* Stick-slip motion of turbine blade dampers // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1992. V. 338. № 1651. P. 503–517.
18. *Braun J.* Dynamik und Regelung elastischer Flugzeugfahrwerke. Thesis at the Dept. of Mech. Eng., Inst. B of Mech. Munich Tech. Univ., 1989. 115 p.
19. *Wapenhans H.* Dynamik und Regelung von Flugzeugfahrwerken. Thesis at the Dept. of Mech. Eng., Inst. B of Mech. Munich Tech. Univ., 1990. 100 p.
20. *Seyfferth W.* Modellierung unstetiger Montageprozesse mit Robotern // Fortschritt-Berichte VDI, R. 11. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1993. № 199. 199 S.
21. *Meitinger Th.* Dynamik automatisierter Montageprozesse // Fortschritt-Berichte VDI, R. 2. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1998. № 476. 150 S.
22. *Wapenhans H.* Optimierung von Roboterbewegungen bei Manipulationsvorgängen // Fortschritt-Berichte VDI, R. 2. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1994. № 304. 128 S.
23. *Glocker Ch.* Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1999. V. 177. № 3–4. P. 199–214.

Мюнхен (Германия)
e-mail: glocker@lbm.mw
tw-muenchen.de

Поступила в редакцию
24.II.2000