

УДК 531.36

© 2000 г. К. Попп

О НЕГЛАДКИХ СИСТЕМАХ В МЕХАНИКЕ

Дается обзор исследований негладких динамических систем, представляющих интерес для практики и часто возникающих при решении прикладных задач. Рассматривается два типа негладких систем: с ударами и с трением. Для каждого типа приводится набор базовых моделей с указанием конкретных приложений и обзором результатов исследований.

1. Введение. Приводя ряд важных для практики примеров, автор надеется стимулировать дальнейшую работу в данной области, так как современное состояние проблемы изучения негладких систем оставляет желать лучшего как в прикладном, так и в математическом плане. Будем рассматривать примеры, в которых негладкие явления обусловлены либо кинематическими связями, либо физическими эффектами, подобными трению и ударам, либо зазорами. При моделировании реальных практических систем такие явления исторически сначала рассматривались как погрешности, которыми можно пренебречь. Затем их описывали приближенно при помощи сглаженных характеристик, что зачастую противоречило физическому смыслу. Лишь недавно появились уточненные модели, в которых эти явления рассматривались как нелинейные, что оправдано с физической точки зрения. Однако адекватность построенных для реальных систем моделей зависит как от правильности нашего понимания происходящих физических процессов, так и от поставленной задачи. Таким образом, нужно следовать золотому правилу: модели должны быть простыми, насколько возможно, и точными, насколько необходимо.

В частности, такие физические явления, как трение и удары, обычно описываются простыми соотношениями типа законов кулоновского трения или ньютоновского восстановления. При более глубоком физическом рассмотрении эти негладкие модели следует заменить гладкими, тем самым существенно усложняя их. Однако с прикладной точки зрения остается открытым вопрос: как исследовать негладкие динамические системы?

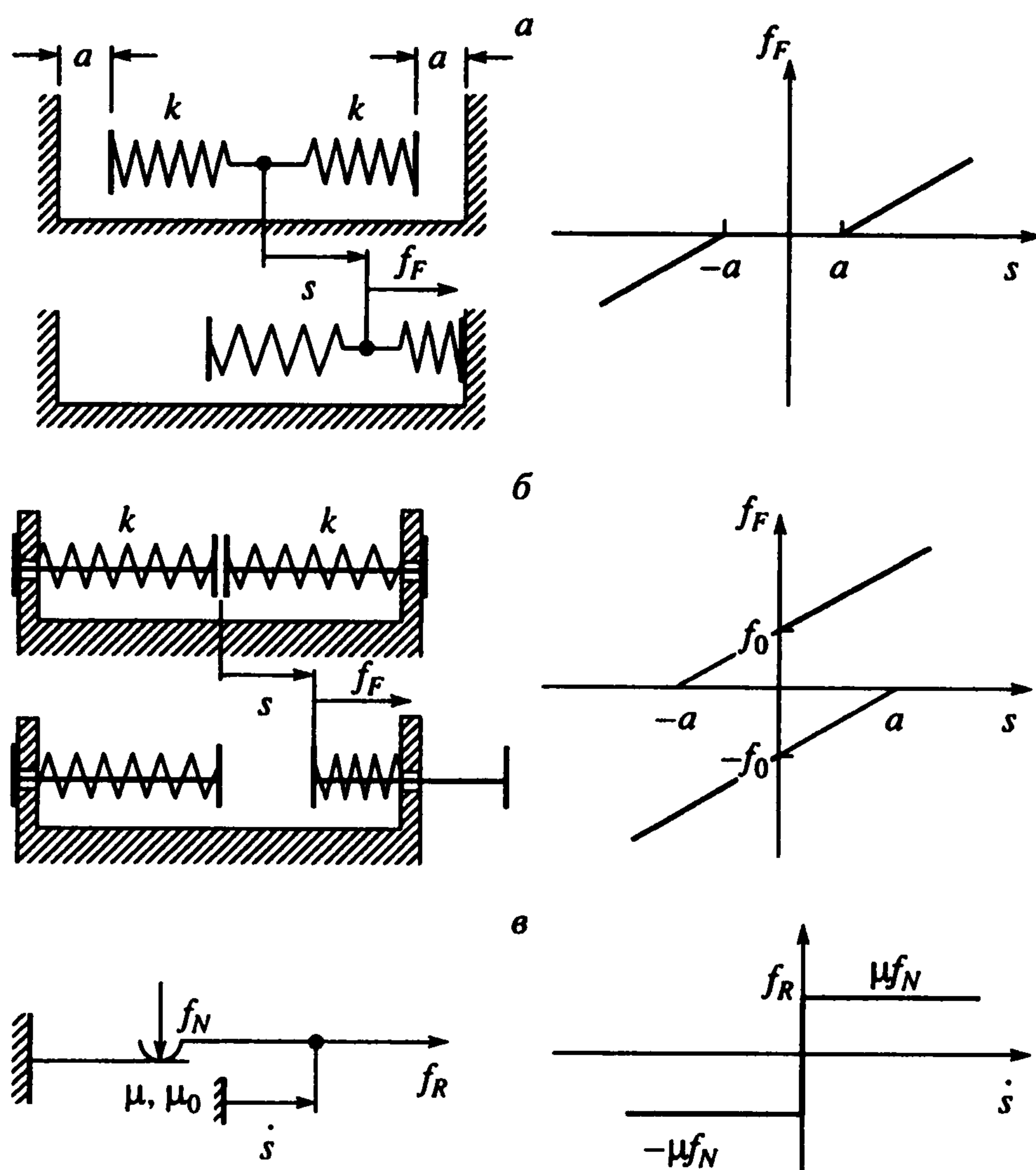
Можно сказать, что негладкая система характеризуется отсутствием непрерывности или дифференцируемости у приложенных сил и/или характеристик движения. На фиг. 1 показаны три простых механических силовых элемента (слева) с негладкими характеристиками (справа). Обычно эти элементы связаны с некоторыми массами и другими элементами и образуют некоторую динамическую систему.

В случае *a* имеем систему линейных пружин с жесткостями *k*, соединенных с зазором величины *2a*. Соответствующая силовая характеристика имеет вид

$$f_F = \begin{cases} k(s-a) & \text{при } s \geq a \\ 0 & \text{при } |s| \leq a \\ k(s+a) & \text{при } s \leq -a \end{cases}$$

В случаях *б* и *в* соответствующие силы меняют знак при изменении знака перемещения *s* или скорости $\dot{s}$ соответственно. На фиг. 1, *б* представлена система линейных пружин (с жесткостями *k*) с предварительным натягом $|f_0| = ka$ и силовой характеристикой

$$\begin{aligned} f_F &= k(s+a) & \text{при } s > 0 \\ |f_F| &\leq ka & \text{при } s = 0 \\ f_F &= k(s-a) & \text{при } s < 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

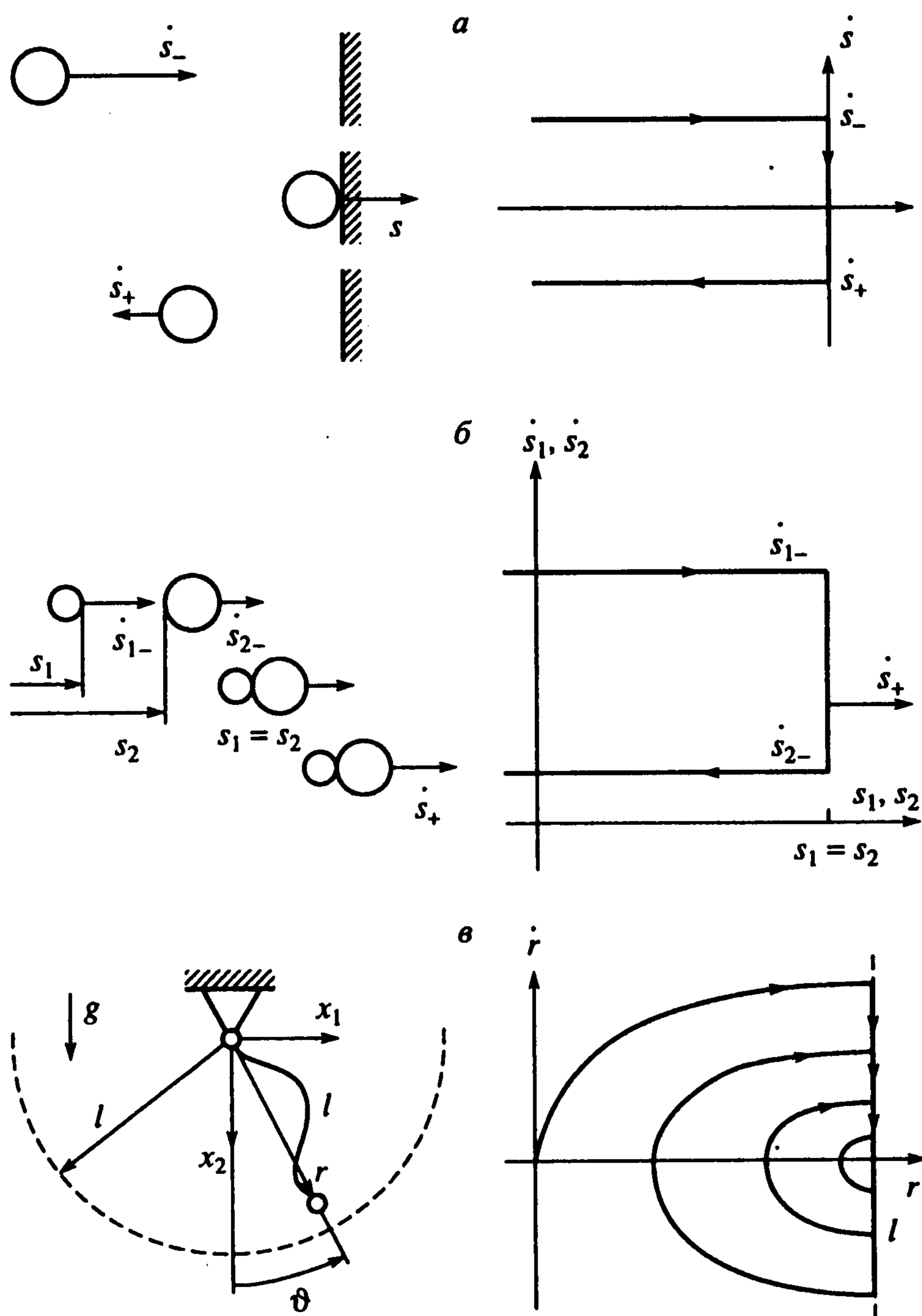
Фиг. 1, в описывает пару сухого кулонова трения с коэффициентом μ , здесь f_N обозначает нормальную нагрузку. Силовая характеристика в данном случае описывается формулами

$$\begin{aligned} f_R &= \mu f_N & \text{при} & \dot{s} > 0 \\ |f_R| &\leq \mu f_N & \text{при} & \dot{s} = 0 \\ f_R &= -\mu f_N & \text{при} & \dot{s} < 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вертикальный участок силовых характеристик (1.1) и (1.2) вблизи начала имеет особый механический смысл: здесь сила не активна, а является реакцией связи, и ее уже нельзя задать при помощи некоторой зависимости. Тем не менее в механической системе имеется достаточное количество уравнений связей или условий, накладываемых на реакции, для однозначного вычисления этих сил. Например, если ограничим в системе перемещения или скорости, т.е. наложим на нее кинематические связи, то сможем уменьшить число ее степеней свободы и в то же время определить реакции связей. Этот факт иллюстрируется фиг. 2, где изображены три простые характеристики движения. В случаях а и б показаны системы с ударами, в которых послеударная скорость рассчитывается в соответствии с гипотезой Ньютона при помощи коэффициента восстановления e . В случае а точечная масса движется свободно в области $s \leq 0$ и упруго соударяется с жесткой стенкой при $s = 0$, при этом $\dot{s}_+ = -e\dot{s}_-$, где $0 < e \leq 1$. В случае б система включает две точечных массы с координатами s_1, s_2 , односторонняя связь описывается неравенством $s_2 - s_1 \geq 0$. При $s_1 = s_2$ в системе происходит пластический удар ($e = 0$), он приводит к изменению числа степеней свободы с двух до одной. Послеударные скорости выражаются соотношением

$$\dot{s}_{1+} = \dot{s}_{2+} = \frac{m_1 \dot{s}_{1-} + m_2 \dot{s}_{2-}}{m_1 + m_2}$$

Подобная ситуация возникает в системах, где фиксируются некоторые координаты, например в механизмах с зажимами. Примером может служить разворачивание складных солнечных



Фиг. 2

панелей на космическом корабле. Когда смежные панели достигнут конечного положения, их относительное движение внезапно останавливается, что приводит к уменьшению числа степеней свободы f . Другим примером является материальная точка, подвешенная на нити длины l (случай в), которая движется в некоторой плоскости и может располагаться внутри круга радиуса l ($r < l, f = 2$) или на его границе ($r = l, f = 1$). Здесь имеется односторонняя связь вида $g(x_i, \dot{x}_i, t) \leq 0$, где g — некоторая функция, зависящая от кинематических величин (например, на фиг. 2, в: $g = x_1^2 + x_2^2 - l^2$).

Другой способ введения этой односторонней связи требует рассмотрения силы натяжения нити f_N . При расположении точки внутри круга нить не натянута, т.е. $f_N = 0$ при $g < 0$ ($f = 2$). Натянутой нити соответствует расположение точки на окружности, так что $f_N > 0$ для $g = 0$ ($f = 1$). Таким образом, сила натяжения нити удовлетворяет неравенству $f_N \geq 0$, дополняющему условие связи $g \leq 0$. Эти два соотношения можно связать условием дополненности $gf_N = 0$, справедливым в любой момент времени t . Таким образом, получим полное описание односторонней связи в виде

$$g \leq 0, \quad f_N \geq 0, \quad gf_N = 0$$

Такая постановка задачи играет центральную роль во всех контактных проблемах с односторонними связями.

Другие примеры негладких систем можно найти в теории управления, где обычно связи накладываются на управляющие переменные. Так, при управлении в системе с обратной связью переключение происходит в зависимости от состояния системы при активных связях, см., например, [1]. Дальнейшие примеры можно найти в системах с переменной структурой, в которых происходят переключения между различными структурами вплоть до достижения цели управления, называемой скользящим режимом [2]. Далее будем использовать термин "переключение" также в случае систем, где управление отсутствует, чтобы не ограничивать общности изложения.

Математическое описание негладких систем содержит следующие компоненты: 1) математическое описание всех гладких подсистем, возникающих при всевозможных переключениях; 2) индикаторную функцию или поверхность переключения, определяющие, где в фазовом пространстве происходит негладкий переход; 3) функцию перехода, определяющую изменения, сопровождающие переключение из одного состояния в другое.

Рассматривая, в частности, систему с двумя переключающимися состояниями p и q , описываемыми при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, получим следующее математическое описание:

1) $\dot{z} = f_p(z)$, $z(t_0) = z_0$, $f_p \in C^1$ до переключения ($t < t^*$), $\dot{z} = f_q(z)$, $z(t_+^*) = z_+$, $f_q \in C^1$ после переключения ($t > t^*$);

2) поверхность переключения

$$S_p = \{z \in R^n \mid h_p(z) = 0\}$$

3) функция переключения для $t = t^*$ и $h_p(z) = 0$

$$z(t_+^*) = u_{pq}[z(t_-^*)]$$

Возьмем в качестве примера удар точечной массы о твердую стенку (фиг. 2, а). Переменными состояниями являются s и $\dot{s}$. Допустим, что скорости точечной массы до и после удара постоянны. Тогда соотношения 1–3 примут вид

1) $\dot{s} = \dot{s}_- = \text{const}$, т.е. $s = \dot{s}_- t + s_0$ до переключения ($t < t^*$)

$\dot{s} = \dot{s}_+ = \text{const}$, т.е. $s = \dot{s}_+ t + s_+$ после переключения ($t > t^*$);

2) поверхность переключения

$$s = \{s \mid s = 0\}$$

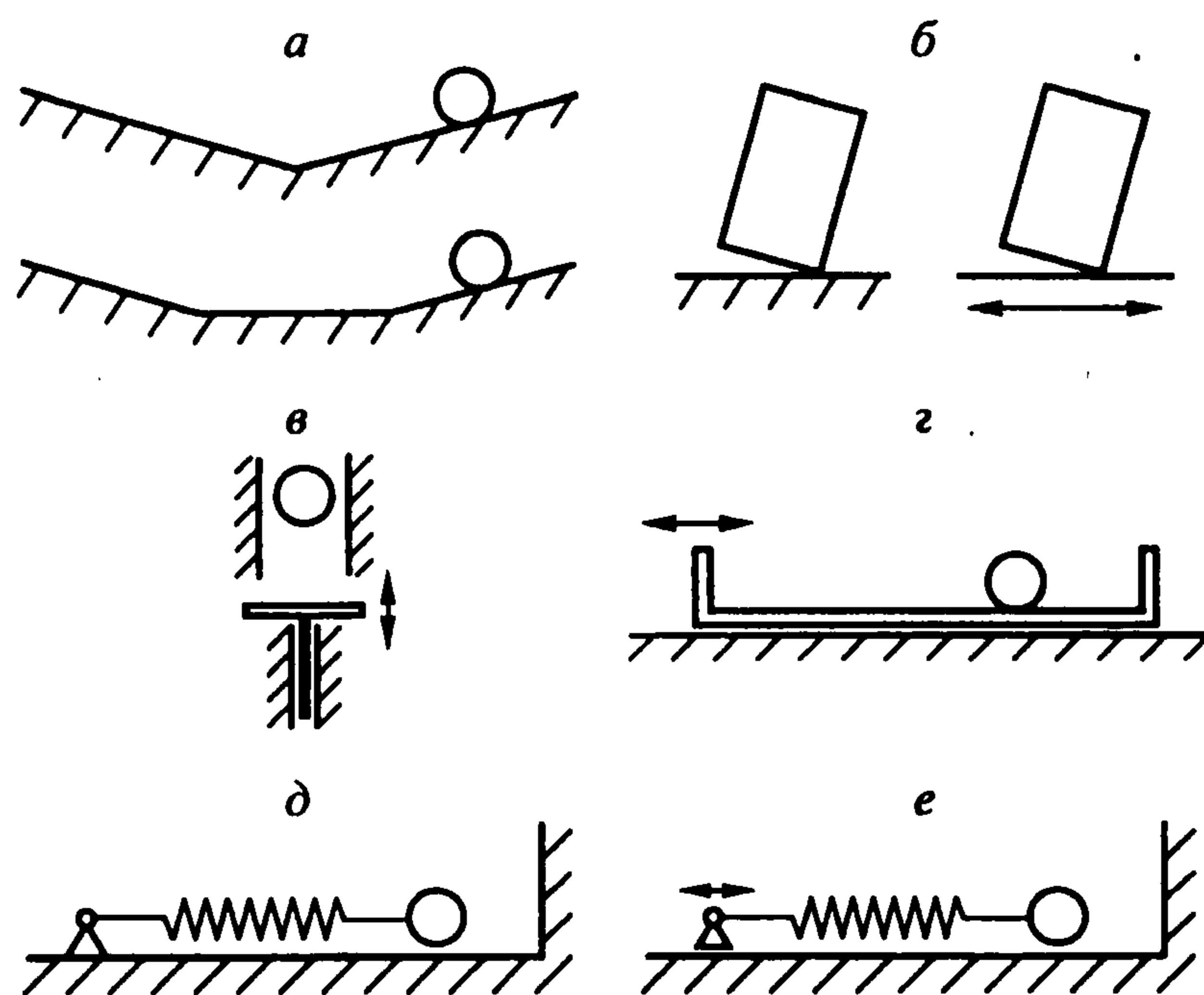
3) функция переключения для $t = t^*$ и $s = 0$:

$$\dot{s}_+ = -e\dot{s}_-, \text{ т.е. } s_+ = s_- = 0$$

Ниже приведем обзор литературы по негладким системам с учетом приложений. Поскольку имеем дело со сложными нелинейными динамическими проблемами, движение может быть хаотическим. Особого упоминания заслуживают общие работы по негладким системам: [3–6], где рассмотрены также проблемы кратных ударов, которые здесь не обсуждаются, а также монографии российских авторов [7, 8].

2. Примеры негладких систем. Следующие примеры, так же как и ссылки, далеки от полноты. Возникает проблема классификации этих примеров, особенно в случае, когда они включают несколько негладких физических эффектов. Здесь выбрано разделение на системы с ударами и системами с трением. Сначала указаны простые модели, а затем упомянуты более сложные приложения.

Системы с ударами. На фиг. 3 приведен набор простых систем с ударами, которые несложно продемонстрировать наглядно, вместе с соответствующими механическими моделями. На фиг. 3, а показан очень простой пример осциллятора с кусочно-постоянной восстанавливающей силой в отсутствие и при наличии зоны нечувствительности. В обоих случаях фазовый портрет состоит из двух семейств парабол с негладким переходом между ними [9]. Проблема качающихся блоков в отсутствие и при наличии колебаний основания, показанная на фиг. 3, б, датируется 1956 г. (см. [10, 11], где обсуждается конструкция оснований зданий, подверженных колебаниям вследствие землетрясений). Был выполнен ряд экспериментов при помощи вибро-



Фиг. 3

стенда с гармоническим и случайным возбуждением [12]. Исследован частный случай ударов свободных качающихся блоков [13]. Вынужденные колебания исследовались, например, в [14–17], а также в [18–20], где рассматривались также удары о боковые стороны блока.

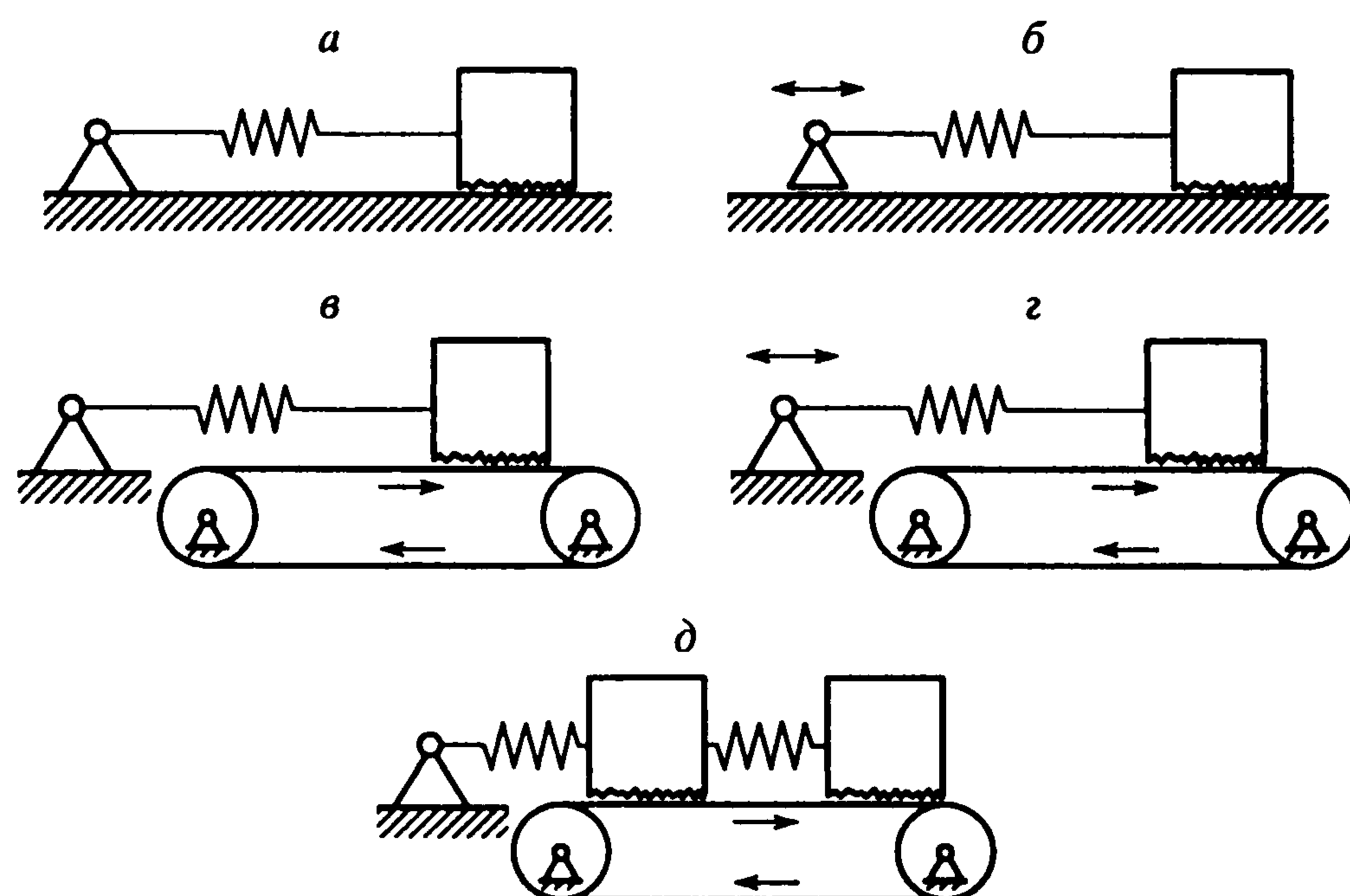
Задача о подсакивающем мяче (фиг. 3, в) была исследована [21, 22] для случайных повторяющихся ударов. Были рассмотрены удары, обусловленные гармоническими колебаниями основания, и при некоторых упрощающих предположениях построено соответствующее двумерное дискретное отображение [23, 24]. Определены границы областей притяжения, которые оказались фрактальными кривыми [25]. Регулярное движение определяется числом периодов возбуждения, размещающихся на интервале между последовательными ударами, а также периодичностью самого движения. Такое поведение аналогично работе ударной бурильной машины [26].

Другая важная для практики проблема – стук в зубчатых передачах в случае, когда шестерни не нагружены. Простая механическая модель этого явления, в которой удары являются следствием зазора, показана на фиг. 3, г (см. [27]). Эта проблема всесторонне изучалась [28–31], и были построены периодические и хаотические движения. Результаты моделирования подтверждены экспериментами. Представляет интерес обзор [32], где имеются дальнейшие ссылки. Аналогичные исследования были выполнены в [33, 34]. Близким, но иным импульсивным процессом, является грохот нагруженных шестерен [32, 35, 36]. Другими приложениями являются соударения труб в теплообменных аппаратах [37, 38] и соединения с зазорами [39, 40].

На фиг. 3, д изображен ударный осциллятор в отсутствие и при наличии внешнего возбуждения. Он был исследован [41] под названием виброударной системы. Обширное исследование, включающее хаотические движения, выполнено в [42–44]. Переход к хаосу также рассматривался в [45]. В качестве технических приложений отметим ударные молоточки принтеров [46–48] и копыры [49]. Обнаружен новый тип бифуркаций, так называемая бифуркация касания, являющаяся предельным случаем ударов с малой скоростью сближения [50, 51]. Новые численные и экспериментальные результаты представлены в [52–54], где имеются и дальнейшие ссылки.

До сих пор говорилось лишь о свободных и вынужденных колебаниях. Однако существуют негладкие параметрические колебания, а также автоколебания. При помощи метода точечных отображений, а также других методов были рассмотрены импульсивные системы с параметрическим возбуждением [55, 56]. В рамках обсуждения систем со скачкообразно изменяющимися переменными состояниями был дан обзор и приведены приложения к автомобилям на поднимающихся путепроводах [57, 58].

Что касается автоколебаний, то обсуждались классические задачи о маятнике часов, электрическом звонке и различных гидравлических автоколебательных системах [9]. Был изучен [59, 60] игрушечный "дятел", демонстрирующий автоколебания. Был выполнен подробный анализ такой важной технической системы, как железнодорожная тележка, [61–63]; здесь также были найдены хаотические колебания.



Фиг. 4

Системы с трением. Сухое трение проявляется в природе двояко: 1) как сопротивление началу движения из положения равновесия (фазы покоя), при этом трение проявляет себя как реакция связи; 2) как сопротивление существующему движению (фаза скольжения), при этом силу трения можно отнести к заданным активным силам.

В системах с фрикционными колебаниями, представленных на фиг. 4, присутствуют оба этих явления. В простом фрикционном осцилляторе без внешнего возбуждения, показанном на фиг. 4, а, трение приводит к диссипации энергии до тех пор, пока масса не остановится в так называемой мертвой зоне [9]. Для осцилляторов на фиг. 4, б–д оба явления могут иметь место попеременно, что приведет к скольжению с остановками. Можно найти подробные описания этих систем [64–67]. Обсуждалась физическая природа трения [68, 69]. Обзор структурных вибраций в системах с фрикционными контактами был дан автором ранее [70] и здесь не приводится. Ниже будут даны некоторые дополнительные ссылки для задач, изображенных на фиг. 4.

На фиг. 4, б изображен фрикционный осциллятор с внешним возбуждением, исследования которого восходят к статье [71]. Были рассмотрены случаи гармонического и случайного возбуждения [72–74].

Автоколебательный фрикционный осциллятор, показанный на фиг. 4, в, обладает грубым предельным циклом. Энергия поступает от движущегося ремня к осциллятору либо за счет наличия у сил трения падающей характеристики [9, 67, 75], либо (при постоянстве сил трения) за счет флуктуации нормальных сил [76, 77]. Такие колебания с участками скольжения и остановками встречаются как в повседневной жизни, так и в технических системах. Примерами являются звучание духовых инструментов и звон бокалов, скрип дверей и мела, стук суставов роботов, дребезг в машинах, скрежет тормозов и визг при движении трамваев на поворотах. Было исследовано появление визга при движении железнодорожных колес [78, 79], дребезг в машинах [80, 81].

Грубый предельный цикл можно разрушить путем приложения дополнительного внешнего возбуждения, как показано на фиг. 4, г. Этот случай был подробно изучен [53, 82–89]; обнаружено большое разнообразие бифуркаций, которые исследованы численно и экспериментально. Имеется анализ некоторых фрикционных осцилляторов с несколькими степенями свободы, показанных на фиг. 4, д [54, 90–92].

3. Заключительные замечания. В заключение уместно сформулировать ряд вопросов.

1. Как можно эффективно строить решения в негладких системах? Существующие методы сшивки решений, точечных отображений, методы сглаживания и численного моделирования нуждаются в оценке и улучшении.

2. Как можно исследовать свойства решений негладких систем? Требуются эффективные методы исследования устойчивости и бифуркаций.

3. Как перестроить характеристики аттракторов для негладких систем? Необходимо развить методы вычисления показателей Ляпунова и размерности аттракторов; все эти методы должны быть применимы к анализу негладких систем с несколькими степенями свободы, встречающихся в приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Interscience Publ., 1962. 360 p.
2. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение к системам переменной структуры. М.: Наука, 1974. 272 с.
Utkin V.I. Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems. M.: Mir, 1978. 257 p.
3. Nonsmooth Mechanics and Applications / Eds *J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos*. CISM Courses and Lectures N 302. Wien: Springer, 1988. 462 p.
4. Nonlinear Dynamics in Engineering Systems / Ed. *W. Schiehlen*. Proc. IUTAM Symp. Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. 362 p.
5. *Brogliato B.* Nonsmooth Impact Mechanics. Lecture Notes in Control and Information Sciences 220. B.: Springer, 1996. 400 p.
6. *Glocker C., Pfeiffer F.* Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. N.Y.: Wiley, 1996. 317 p.
7. *Beletsky V.V.* Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper. Stuttgart: Teubner, 1995. 148 S.
8. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
9. *Magnus K., Popp K.* Schwingungen. Stuttgart: Teubner, 1997. 400 p.
10. *Housner G.W.* Limit design of structures to resist earthquakes // Proc. World Conf. on Earthquake Engineering, 1956. Berkeley, Calif.: Univ. California, 1956. P. 5.1–5.13.
11. *Housner G.W.* The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes // Bull. Seismol. Soc. America. 1963. V. 53. № 2. P. 403–417.
12. *Priestley M.J.N., Evison R.J., Carr A.J.* Seismic response of structures free to rock on their foundations // Bull. of the New Zealand Nat. Seismol. Soc. for Earthquake Engng. 1978. V. 11. № 3. P. 141–150.
13. *Lipscombe P.R., Pellegrino S.* Free rocking of prismatic blocks // J. Eng. Mech. 1993. V. 119. P. 1387–1410.
14. *Aslam M., Godden W.G., Scalize D.T.* Earthquake rocking response of rigid bodies // J. Struct. Engng. Proc. ASCE. 1980. V. 106. № 2. P. 377–392.
15. *Ishyama Y.* Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations // Earthquake Engng. and Struct. Dynamics. 1982. V. 10. № 5. P. 635–650.
16. *Iyengar R.N., Manohar C.S.* Rocking response of rectangular rigid blocks under random noise base excitations // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 1991. V. 26. № 6. P. 885–892.
17. *Yim S.C.S., Lin H.A.* Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects // J. Eng. Mechanics. 1991. V. 117. № 9. P. 2079–2100.
18. *Hogan S.J.* On the motion of a rigid block, tethered at one corner, under harmonic forcing // Proc. R. Soc. Lond. 1992. V. 439A. P. 35–45.
19. *Hogan S.J.* Heteroclinic bifurcations in damped rigid block motion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1992. V. 439. № 1905. P. 155–162.
20. *Hogan S.J.* Slender rigid block motion // J. Eng. Mech. 1994. V. 120. № 1. P. 11–24.
21. *Wood L.A., Byrne K.P.* Analysis of a random repeated impact process // J. Sound Vibrat. 1981. V. 78. № 3. P. 329–345.
22. *Wood L.A., Byrne K.P.* Experimental investigation of a random repeated impact process // J. Sound Vibrat. 1982. V. 85. № 1. P. 53–69.
23. *Holmes P.J.* The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table // J. Sound Vibrat. 1982. V. 84. № 2. P. 173–189.
24. *Guckenheimer J., Holmes P.J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcation of Vector Fields. N.Y.: Springer, 1983. 453 p.
25. *Isomaki H.* Fractal properties of the bouncing-ball dynamics // Nonlinear Dynamics in Engineering Systems / Ed. *W. Schiehlen*. Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. P. 125–131.
26. *Glocker Ch., Pfeiffer F.* Dynamical systems with unilateral contacts // Nonlinear Dynamics. 1992. V. 3. № 4. P. 245–259.
27. *Reithmeier E.* Periodic solutions of nonlinear dynamical systems with discontinuities // Nonlinear Dynamics in Engineering Systems / Ed. *W. Schiehlen*. Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. P. 125–131.

28. *Kucukay F., Pfeiffer F.* Über Rasselschwingungen in KfZ-Schaltgetrieben // Ing.-Arch. 1986. V. 56. № 1. P. 25–37.
29. *Pfeiffer F.* Seltsame Attraktoren in Zahnradgetrieben // Ing.-Arch. 1988. V. 58. № 2. P. 113–125.
30. *Karagiannis K., Pfeiffer F.* Theoretical and experimental investigations of gear-rattling // Nonlinear Dynamics. 1991. V. 2. P. 367–387.
31. *Kunert A., Pfeiffer F.* Stochastic model for rattling in gear-boxes // Nonlinear Dynamics in Engineering Systems / Ed. W. Schiehlen. Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. P. 125–131.
32. *Pfeiffer F.* Dynamical systems with time-varying or unsteady structure // ZAMM. 1991. V. 71. № 4. P. T6-T22.
33. *Michalopoulos D., Dimarogonos A.* Dynamic behavior of geared systems with backlash due to stick-slip vibratory motion // Wear. 1982. V. 81. № 1. P. 135–143.
34. *Kleczka M., Kreuzer E., Wilmers C.* Crises in mechanical systems // Nonlinear Dynamics in Engineering Systems / Ed. W. Schiehlen. Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. P. 125–131.
35. *Prestl W.* Zahnhämmern in Rädertrieben von Dieselmotoren // Fortschr.-Ber. VDI. R. 11. Düsseldorf: VDI Verlag, 1991. № 145. 142 S.
36. *Fritzer A.* Nichtlineare Dynamik von Steuertrieben // Fortschr.-Ber. VDI. R. 11. Düsseldorf: VDI Verlag, 1992. № 176. 143 S.
37. *Whiston G.S.* Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator // J. Sound Vibrat. 1987. V. 118. № 3. P. 395–424.
38. *Goyder H., Teh C.E.* A study of the impact dynamics of loosely supported heat exchanger tubes // Trans. ASME J. Pressure Tech. 1989. V. 111. № 4. P. 394–401.
39. *Szczygielski W.M.* Dynamisches Verhalten eines schnell drehenden Rotors bei Anstreifvorgängen. Diss. Nr. 8094, ETH. Zürich: Techn. Hochschule, 1986. 107 S.
40. *Deck J.F., Dubowsky S.* On the limitations of predictions of the dynamics response of machines with clearance connections // ASME Flexible Mechanisms, Dynamics and Analysis. 1992. V. 47. P. 461–469.
41. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. Приближенные методы. М.: Наука, 1978. 352 с.
42. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound Vib. 1983. V. 90. № 1. P. 129–155.
43. *Shaw S.W.* Dynamics of harmonically excited system having rigid amplitude constraints. P. 1: Subharmonic motions and local bifurcations // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 2. P. 453–458.
44. *Shaw S.W.* Dynamics of harmonically excited system having rigid amplitude constraints. P. 2: Chaotic motions and global bifurcations. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 2. P. 459–464.
45. *Peterka F., Vacik J.* Transition to chaotic motion in mechanical systems with impact // J. Sound Vibrat. 1992. V. 154. № 1. P. 95–115.
46. *Hendriks F.* Bounce and chaotic motion in impact print hammers // IBM J. Res. Development. 1983. V. 27. № 3. P. 24–31.
47. *Tung P.C., Shaw S.W.* The dynamics of an impact print hammer // J. Vibrat. and Acoust. Stress, Reliability Design. 1988. V. 110. № 2. P. 193–200.
48. *Springer H., Ullrich M.* Dynamics of dot-matrix printers // Nonlinear Dynamics in Engineering Systems / Ed. W. Schiehlen. Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. P. 297–304.
49. *Vielsack P., Storz M.* Bifurcation of motion in a technical system with stick-slip and impact / Inst. f. Wiss. Rechnen u. Math. Modellbildung: Preprint Nr. 95/5, Uni Karlsruhe, 1995. P. 9.
50. *Nordmark A.B.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator // J. Sound Vibrat. 1991. V. 145. № 2. P. 279–297.
51. *Budd C., Dux F.* Chattering and related behaviours in impact oscillators // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347. № 1683. P. 365–389.
52. *Bishop S.R., Thompson M.G., Foale S.* Prediction of period-1 impacts in a driven beam / Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. № 1954. P. 2579–2592.
53. *Hinrichs N., Oestreich M., Popp K.* Dynamics of oscillators with impact and friction // Chaos, Soliton and Fractals. 1997. V. 8. № 4. P. 535–558.

54. *Oestreich M.* Untersuchung von Schwingern mit nichtglatten Kennlinien // Fortschr.-Ber. VDI. R. 11. Düsseldorf: VDI Verlag, 1998. № 258. 166 S.
55. *Hsu C.S.* Impulsive parametric excitation: Theory // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1972. V. 39. № 9. P. 551–558.
56. *Hsu C.S.* Cell-to-Cell Mapping. N.Y.: Springer, 1987. 352 P.
57. *Popp K.* Beiträge zur Dynamik von Magnetschwebbahnen auf geständerten Fahrwegen // Fortschr.-Ber. VDI-Z. R 12. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1978. № 35. 194 S.
58. *Popp K.* Analyse von Systemen mit Impuls-Parametererregung // Ing.-Arch. 1980. V. 50. № 1. P. 49–60.
59. *Pfeiffer F.* Mechanische Systeme mit unstetigen Übergängen // Ing.-Arch. 1984. V. 54. № 3. P. 232–240.
60. *Glocker C.* Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen // Fortsch.-Ber. VDI. R 18. Düsseldorf: VDI Verlag, 1995. № 182. 220 S.
61. *Kaas-Petersen C.* Chaos in a railway bogie // Acta mech. 1986. V. 61. № 1–4. P. 89–107.
62. *True H.* Some recent developments in nonlinear railway vehicle dynamics / Proc. 1st Europ. Nonlinear Oscillat. Conf. B.: Akademie Verlag, 1993. P. 129–148.
63. *Isaksen P., True H.* On the ultimate transition to chaos in the dynamics of Cooperrider's bogie // Chaos, Solitons and Fractals. 1997. V. 8. № 4. P. 559–581.
64. *Ibrahim R.* A Friction – induced vibration, chatter, squeal, and chaos // Trans. ASME. Friction-Induced Vibr., Chatter, Squeal, and Chaos. 1992. V. 49DE. P. 107–121.
65. Dynamics with Friction / Eds *A. Guran A. et al.* Singapore: World Scientific, 1996. 264 p.
66. *Feeny F., Guran A., Hinrichs N., Popp K.* A historical review on dry friction and stick-slip phenomena // Appl. Mech. Rev. 1998. V. 51. № 5. P. 321–341.
67. *Hinrichs N.* Reibungsschwingungen mit Selbst- und Fremderregung: Experiment, Modellierung und Berechnung // Fortschr.-Ber. VDI. R 11. Düsseldorf: VDI Verlag, 1997. № 240. 124 S.
68. Fundamentals of Friction: Macroscopic and Microscopic Processes / Eds *I.L. Singer., H.M. Pollock.* NATO ASI Series E. V. 220. Dordrecht: Kluwer, 1992. 621 p.
69. *Persson B.N.J.* Sliding Friction. B.: Springer, 1998. 462 p.
70. *Popp K.* Nichtlineare Schwingungen mechanischer Strukturen mit Füge- oder Kontaktstellen // ZAMM. 1994. V. 74. № 3. P. 147–165.
71. *Den Hartog J.P.* Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction // Trans ASME. 1931. N APM 53–9. P. 107–115.
72. *Marui E., Kato S.* Forced vibration of a base-excited single-degree-of-freedom system with Coulomb friction // Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. 1984. V. 106. № 4. P. 280–285.
73. *Shaw S.W.* On the dynamic response of a system with dry friction // J. Sound Vibrat. 1986. V. 108. № 2. P. 305–325.
74. *Moser M.A.* The response of stick-slip systems to random seismic excitation. Diss. Caltech, Pasadena, 1987. 166 p.
75. *Kauderer H.* Nichtlineare Mechanik. B.: Springer, 1958. 694 S.
76. *Oden J.T., Martins J.A.* Models and computational methods for dynamic friction phenomena // Comput. Meth. in Appl. Mech and Engng. 1985. V. 52. № 1–3. P. 527–634.
77. *Feeny B.F., Moon F.C.* Chaos in a forced dry-friction oscillator: Experiments and numerical modeling // J. Sound Vibrat. 1994. V. 170. № 3. P. 303–323.
78. *Popp K., Schneider E., Irretier H.* Noise Generation in railway wheels due to rail-wheel contact forces / Proc. 9th IAVSD-Symp. Linköping, 1985. P. 448–466.
79. *Finberg U.* A model of wheel-rail squealing noise // J. Sound Vibrat. 1990. V. 143. № 3. P. 365–377.
80. *Grabec I.* Chaotic dynamics of cutting process // Intern. J. Mech. Tools Manufct. 1988. V. 28. № 1. P. 19–32.
81. *Gradisek J., Govekar E., Grabec I.* A chaotic cutting process and determining optimal cutting parameter values using neural networks // Intern. Machine Tools Manufact. 1996. V. 36. № 10. P. 1161–1172.
82. *Popp K., Stelter P.* Nonlinear oscillations of structures induced by dry friction // Proc. Nonlinear Dynamics in Engineering Systems: IUTAM Symp. Stuttgart, 1989. B.: Springer, 1990. P. 233–240.
83. *Popp K., Stelter P.* Stick-slip vibrations and chaos // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 332. № 1624. P. 89–105.

84. *Stelter P.* Nichtlineare Schwingungen reibungserregter Strukturen // Fortschr.-Ber. VDI. R. 11. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1990. № 137. 136 S.
85. *Popp K.* Chaotische Bewegungen beim Reibschwinger mit simultaner Selbst- und Fremderregung // ZAMM. 1991. V. 71. № 4. P. T71–T73.
86. *Popp K.* Some model problems showing stick-slip motion and chaos // Trans. ASME. Friction-induced Vibrat., Chatter, Squeal, and Chaos, DE. V. 49. 1992. P. 1–12.
87. *Popp K., Hinrichs N., Oestreich M.* Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous self and external excitation // Sadhana, Bangalore. 1995. V. 20. № 2–4. P. 627–654.
88. *Popp K., Hinrichs N., Oestreich M.* Analysis of a self excited friction oscillator with external excitation // Dynamics with Friction / Eds A. Guran et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 1–35.
89. *Oestreich M., Hinrichs N., Popp K.* Bifurcation and stability analysis for a non-smooth friction oscillator // Arch. Appl. Mech. 1996. V. 66. № 5. P. 301–314.
90. *Stelter P., Sextro W.* Bifurcation in dynamic systems with dry friction // Intern. Series of Numerical Mathematics. 1991. V. 97. P. 343–347.
91. *Sikora J., Bogacz R.* On dynamics of several degrees of freedom system // ZAMM. 1993. V. 73. № 4/5. P. T118–T122.
92. *Bogacz R., Ryzek B.* Dry friction self-excited vibrations; Analysis and Experiments // Engng. Trans. 1997. V. 45. № 3/4. P. 487–504.

Ганновер (Германия)
e-mail: popp@ifm.uni-hannover.de

Поступила в редакцию
27.IV.2000