

УДК 531.36:534.1

© 2000 г. А.Л. Куницын

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ
ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ**

Рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел, в которой пассивно гравитирующая точка кроме ньютоновской силы тяготения со стороны основных тел испытывает еще и силу светового давления от каждого из них. Такая задача достаточно адекватно моделирует, например, движение частицы газопылевого облака, находящегося в поле двух гравитирующих и излучающих звезд. Для случая эллиптической ограниченной задачи, когда основные тела обращаются относительно друг друга по эллиптическим орбитам, устанавливается существование семейства положений относительного равновесия, аналогичных лагранжевым треугольным точкам либрации классической ограниченной задачи трех тел. На основе линеаризованных уравнений движения выводятся необходимые условия орбитальной устойчивости найденных треугольных точек либрации. Показывается, что в конфигурационном пространстве системы в круговом варианте задачи область устойчивости имеет весьма простой геометрический смысл. Для малых значений эксцентриситета устанавливаются условия существования параметрического резонанса, приводящего к неустойчивости в эллиптическом варианте задачи.

Фотогравитационная ограниченная задача трех тел (см. обзор [1]) достаточно адекватно моделирует, например, движение частицы газопылевого облака, находящегося в поле двух гравитирующих и излучающих звезд. Большой интерес в этой задаче представляет исследование положений относительного равновесия во вращающейся вместе со звездами системе координат, аналогичных коллинеарным и треугольным точкам либрации классической ограниченной задачи трех тел. Было проведено достаточно полное исследование семейства таких точек в круговом варианте фотогравитационной задачи (включающее анализ их устойчивости в первом приближении) [2–5], а также дан нелинейный анализ в некоторых случаях внутреннего резонанса¹. Интересно выяснить влияние эксцентриситета орбиты основных тел на условия существования и устойчивости указанных положений относительного равновесия. Некоторые аспекты этой задачи рассматривались ранее [6–9]. Однако результаты либо носят частный характер (предполагалось [6], что излучает только одно тело, а для случая малых эксцентриситетов сделан только вывод [7] о малом изменении области устойчивости круговой задачи без обнаружения новых зон неустойчивости вследствие наличия эксцентриситета и возникновения параметрического резонанса), либо не дают полной картины области устойчивости, поскольку представляют расчеты на ЭВМ отдельных точек этой области для некоторых конкретных числовых значений всех четырех параметров задачи (двух коэффициентов редукции, массового параметра и эксцентриситета) [8, 9].

Предлагаемый в данной работе подход (переход в конфигурационное пространство) позволяет получить достаточно простую и физически ясную картину влияния эксцентриситета орбиты основных тел на расположение и устойчивость треугольных точек либрации в случае малых его значений. При этом обнаружены новые зоны неустойчивости, возникающие при наличии сколь угодно малых значений эксцентриситета и отсутствующие в круговой задаче. Устанавливается, что эта неустойчивость вызвана появлением параметрического резонанса (показано, что возможен только один тип такого резонанса), которому также дана простая геометрическая интерпретация.

¹ Турешбаев А.Т. Устойчивость стационарных решений фотогравитационной ограниченной задачи трех тел. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. М., 1986. 114 с.

1. Уравнения движения и положения относительного равновесия. Будем предполагать, что на частицу P пренебрежимо малой массы m со стороны тела S массой M кроме гравитационной силы $F_g = fMm/R^2$ (R – расстояние между телами) действует еще репульсивная сила светового давления, определяемая как [2]

$$F_p = (1 + \varepsilon)sC/R^2 \quad (1.1)$$

где C – коэффициент, характеризующий мощность источника излучения, s – характерная площадь поперечного сечения частицы, ε – коэффициент отражения ($0 \leq \varepsilon \leq 1$).

Суммарную силу F , действующую на частицу P , можно представить в виде $F = QF_g$, где Q – постоянный коэффициент, характеризующий влияние силы светового давления, равный

$$Q = (F_g - F_p)/F_g, \quad -\infty < Q \leq 1$$

и называемый коэффициентом редукции массы частицы P .

С учетом (1.1) получим

$$Q = 1 - q\sigma, \quad q = C/(fM), \quad \sigma = (1 + \varepsilon)s/m \quad (1.2)$$

(σ – парусность частицы). Как видим, коэффициент редукции Q определяется не только характеристиками источника излучения, но и парусностью частицы P . Для однородных частиц сферической формы с радиусом ρ и с плотностью δ будем иметь

$$Q = 1 - 3q(1 + \varepsilon)/(4\delta\rho)$$

т.е. влияние светового давления возрастает с уменьшением абсолютных размеров частицы и может быть сколь угодно велико даже для частиц с высокой плотностью.

Для описания движения пассивно гравитирующей точки P в гравитационно-репульсивном поле двух излучающих точечных масс S_1 и S_2 , обращающихся относительно друг друга по эллиптической орбите с эксцентриситетом e , в прямоугольной барицентрической, вращающейся вокруг оси OZ системе координат $OXYZ$ (используемой в классической ограниченной задаче трех тел [10]) будем иметь

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} - \ddot{v}X = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \ddot{Y} + 2\dot{X} - \ddot{v}Y = \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad \ddot{Z} = \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (1.3)$$

$$U = Q_1 \frac{1-\mu}{R_1} + Q_2 \frac{\mu}{R_2}, \quad R_j = (X - X_j)^2 + Y^2 + Z^2, \quad j = 1, 2$$

Здесь $X_1 = -\mu$ и $X_2 = 1 - \mu$ – безразмерные координаты точек S_1 и S_2 (за единицу массы и длины приняты сумма их масс и расстояние между ними $r = p/(1 + e \cos v)$, где p , e и v – соответственно фокальный параметр, эксцентриситет и истинная аномалия их орбиты), а Q_1 и Q_2 ($-\infty < Q_j \leq 1$) – коэффициенты редукции массы частицы P (при $Q_1 = Q_2 = 1$ уравнения (1.3) переходят в уравнения классической ограниченной задачи трех тел). Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Перейдем в системе (1.3) к новым переменным x, y, z по формулам

$$X = rx, \quad Y = ry, \quad Z = rz$$

а в качестве новой независимой переменной возьмем истинную аномалию v (дифференцирование по v опять будем обозначать точкой). Тогда система (1.3) запишется так

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = f(v) \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = f(v) \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \ddot{z} = f(v) \frac{\partial W}{\partial z} \quad (1.4)$$

$$W = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - ez^2 \cos v) + U, \quad f(v) = (1 + e \cos v)^{-1}$$

Рассмотрим положения относительного равновесия (точки либрации) частицы P в орбитальной плоскости движения основных тел при $e \neq 0$, т.е. в случае эллиптической ограниченной фотогравитационной задачи трех тел (в случае круговой задачи этот вопрос рассматривался в [3–5]). При $z = 0$, $y = 0$ координаты этих точек x_* и y_* найдутся из системы уравнений

$$x - Q_1(1 - \mu)(x + \mu)/R_1^3 - Q_2\mu(x - 1 + \mu)/R_2^3 = 0 \quad (1.5)$$

$$1 - Q_1(1 - \mu)/R_1^3 - Q_2\mu/R_2^3 = 0$$

содержащих три параметра (Q_1 , Q_2 , μ), и трудно аналитически разрешимой относительно указанных координат. Учитывая, однако, что параметры Q_1 и Q_2 входят в систему (1.5) линейно, легко найдем их зависимость от координат точек либрации. Будем иметь

$$Q_j = R_j^3, \quad j = 1, 2, \quad R_1 + R_2 \geq 1 \quad (1.6)$$

Отсюда заключаем, что для всякого μ и любой пары $Q_1 > 0$ и $Q_2 > 0$ (т.е. только в том случае, когда гравитация преобладает над репульсией), для которой $Q_1^{1/3} + Q_2^{1/3} \geq 1$, найдется и пара значений R_1 и R_2 , определяющих две симметричные относительно оси Ox треугольные точки либрации. Все множество таких точек (соответствующее различным значениям Q_1 и Q_2) целиком заполняет область плоскости xu , ограниченную двумя окружностями единичных радиусов с центрами в точках S_1 и S_2 . Отметим, что подобно классическому случаю эти точки существуют как в круговой, так и в эллиптической задаче с любым значением эксцентриситета.

Поскольку, как это следует из соотношений (1.2), коэффициенты редукции определяются не только параметрами источника излучения, но и парусностью частицы P , то можно допустить, что для данной пары основных тел S_1 и S_2 в указанной области существования треугольных точек либрации будет находиться бесчисленное множество различных частиц, имеющих соответствующую коэффициенту редукции из (1.6) парусность.

Из соотношений (1.2) вытекает, что для данной пары тел S_1 и S_2 коэффициенты редукции всех частиц, находящихся в треугольных точках либрации, должны удовлетворять одному и тому же соотношению

$$(1 - Q_1)/(1 - Q_2) = q_1/q_2 = k$$

в котором без нарушения общности можно, очевидно, считать, что $0 \leq k \leq 1$. Отсюда, согласно (1.6), получаем условие для нахождения координат всех треугольных точек либрации, возможных для данной пары основных тел, характеризуемой значением постоянной k ,

$$(1 - R_1^3)/(1 - R_2^3) = k \quad (1.7)$$

Соответствующие уравнению (1.7) кривые для разных значений k изображены на фиг. 1.

2. Устойчивость треугольных точек либрации в круговой задаче. Рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову найденных треугольных точек либрации при нулевом и достаточно малых значениях эксцентриситета e . Вводя возмущения $x_1 = x - x_*$, $x_2 = y - y_*$, $x_3 = z - z_*$, получим следующие уравнения возмущенного движения в первом приближении (суммирование ведется от $j = 1$ до $j = 2$):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + c_{xx}x_1 + c_{xy}x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 + c_{xy}x_1 + c_{yy}x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_3 + c_{zz}x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} c_{xx} &= f(\nu) \{-1 + \sum \Phi_j [R_j^2 - 3(x_* - x_j)^2]\} \\ c_{xy} &= f(\nu) [-3y_* \sum \Phi_j (R_j - x_j)] \\ c_{yy} &= f(\nu) [-1 + \sum \Phi_j (R_j^2 - 3y_*^2)], \quad c_{zz} = 1 \\ \Phi_1 &= Q_1(1 - \mu) / R_1^5, \quad \Phi_2 = Q_2 \mu / R_2^5 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Видно, что коэффициенты уравнений (2.1) – аналитические функции эксцентриситета e , который будем рассматривать как малый параметр системы (2.1). Тогда, как известно [11], характеристические показатели периодической системы (2.1) при $e \neq 0$ должны обращаться в корни характеристического уравнения соответствующей автономной системы (получаемой из (2.1) при $e = 0$), которое распадается на квадратное

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

и биквадратное

$$\lambda^4 + (4 + c_{xx} + c_{yy})\lambda^2 + (c_{xx}c_{yy} - c_{xy}^2) = 0 \quad (2.3)$$

Исключая в коэффициентах этих уравнений величины Q_1 и Q_2 при помощи соотношений (1.6) и полагая

$$y_* / R_j = \sin \psi_j, \quad (x_* - x_j) / R_j = (-1)^{j+1} \cos \psi_j, \quad j = 1, 2$$

получим выражения для корней уравнения (2.3) относительно λ^2

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{-1 \pm [1 - 36\mu(1 - \mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2)]^{1/2}\} \quad (2.4)$$

Из условия отрицательности правых частей равенств (2.4) найдем необходимые условия устойчивости треугольных точек либрации при $e = 0$ (корни квадратного уравнения, соответствующего изменению координаты z , как и в классической задаче, оказываются равными $\pm i$)

$$36\mu(1 - \mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2) \leq 1 \quad (2.5)$$

При отсутствии светового давления полученное условие превращается в известное [10] необходимое условие устойчивости треугольных точек либрации L_4 и L_5 классической ограниченной задачи трех тел (для этого в (2.5) нужно положить $\psi_1 = \psi_2 = \pi/3$). Для достаточно малых значений μ , определяемых условием

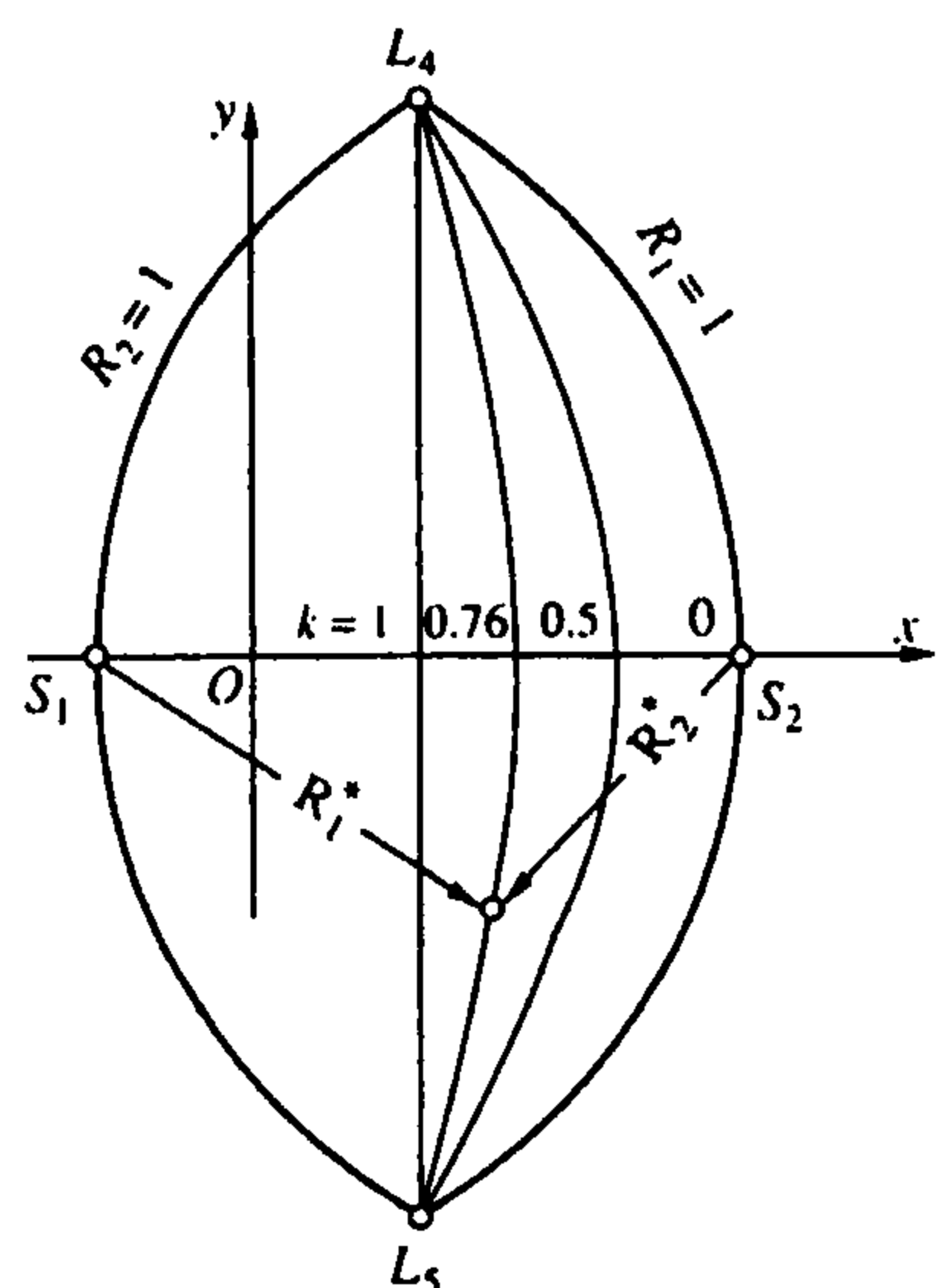
$$36\mu(1 - \mu) \leq 1$$

устойчивыми будут все точки либрации. Максимальное значение $\mu = 1/2 - \sqrt{2}/3 = 0,028595\dots$, определяемое этим условием, несколько меньше соответствующего предельного значения для устойчивости в классической задаче. Однако устойчивость точек либрации в рассматриваемой задаче возможна и при больших значениях μ .

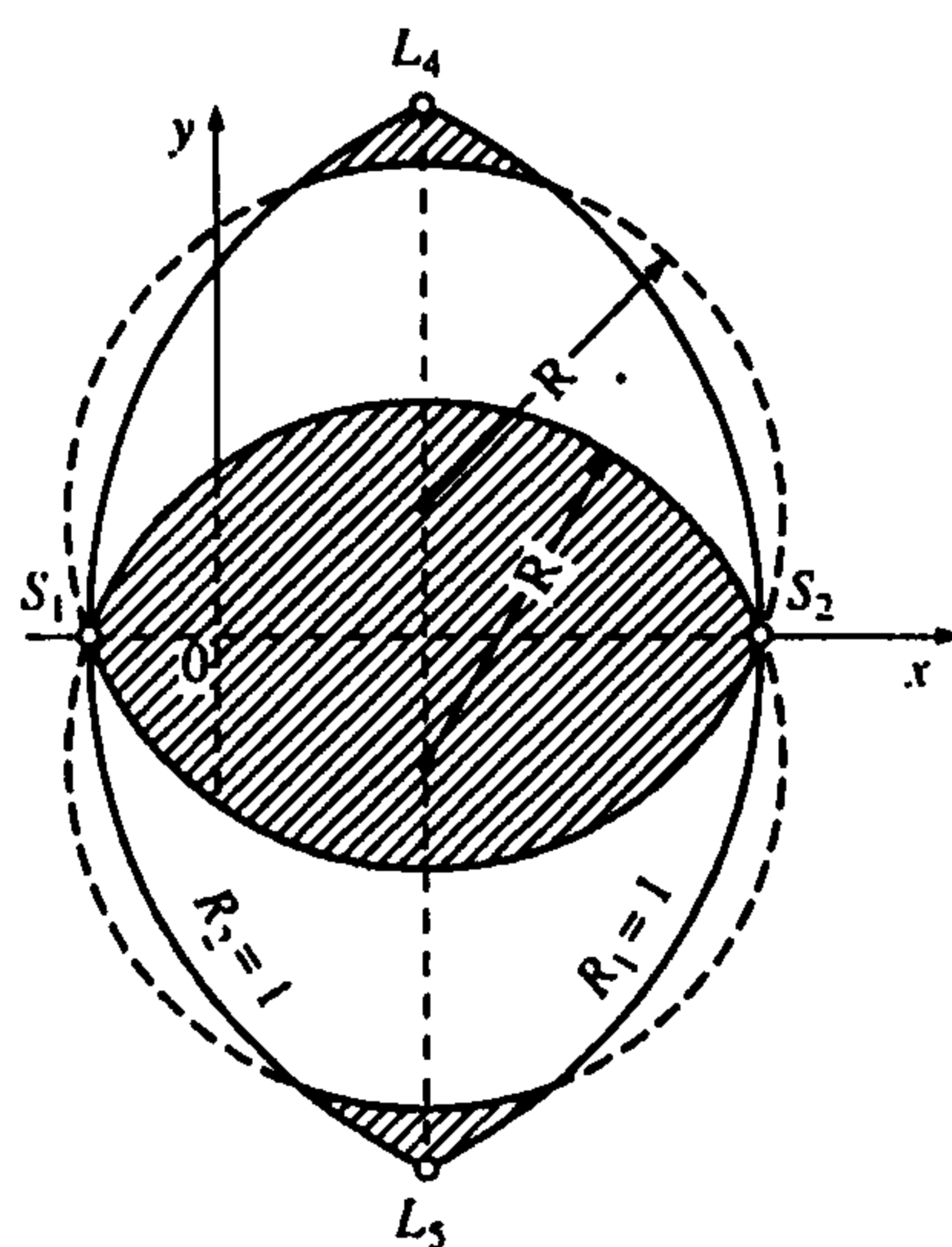
Действительно, для этого только нужно, чтобы координаты точек либрации удовлетворяли неравенству (2.5), что возможно при любых μ для некоторых ψ_1 и ψ_2 .

Можно убедиться, что в этом случае область устойчивости будет состоять из двух частей (на фиг. 2 они отмечены штриховкой), разделенных щелью неустойчивости, границами которой являются дуги двух окружностей одного и того же радиуса $R = 3\sqrt{\mu(1 - \mu)}$, и имеющие в качестве общей хорды отрезок S_1S_2 (фиг. 2). Такое расщепление области устойчивости происходит при значениях μ , превышающих меньший корень уравнения (очевидно без нарушения общности можно считать, что $\mu \leq 0,5$)

$$36\mu(1 - \mu) = 1$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При дальнейшем увеличении μ щель неустойчивости расширяется, а часть области устойчивости, примыкающая к классической точке либрации, уменьшается, стягиваясь в эту точку при другом бифуркационном значении μ , являющимся меньшим корнем уравнения

$$27\mu(1 - \mu) = 1$$

и совпадающим с критическим для устойчивости значением μ в классической ограниченной задаче трех тел. Часть же области устойчивости, примыкающая к оси Ox , несколько уменьшаясь в размерах, остается вплоть до $\mu = 0,5$.

3. Влияние эксцентриситета. Перейдем к вопросу об устойчивости треугольных точек либрации при не равных нулю, но достаточно малых значениях эксцентриситета e орбит основных тел. Хотя теперь расстояния между телами в исходной системе координат $OXYZ$ не могут оставаться неизменными, величины R_1 и R_2 по-прежнему будут постоянными, если в некоторый момент времени они были определены согласно соотношениям (1.6).

Уравнения возмущенного движения теперь не будут автономными, но их периодические коэффициенты будут содержать 2π -периодические функции истинной аномалии ν , обращающиеся в нуль при $e = 0$ и при достаточно малых значениях эксцентриситета являющиеся аналитическими функциями последнего. Известно [11], что характеристические показатели рассматриваемого класса гамильтоновых систем при отсутствии параметрического резонанса отличаются от корней характеристического уравнения соответствующей автономной системы (получающейся из периодической при обращении малого параметра в нуль) на величину порядка квадрата малого параметра, роль которого в рассматриваемой задаче играет эксцентриситет e . Отсюда можно заключить, что область устойчивости треугольных точек либрации при малых значениях e будет мало отличаться от построенной выше области их устойчивости при $e = 0$. Однако известно [11, 12], что даже при сколь угодно малых значениях малого параметра в указанной области устойчивости могут возникать зоны неустойчивости, соответствующие случаям параметрического резонанса, когда характеристические показатели системы при $e = 0$ удовлетворяют одному из условий

$$2\omega_\alpha = p, \quad \omega_\alpha + \omega_\beta = p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

При $e = 0$ эти характеристические показатели обращаются в корни характеристического уравнения (2.3), которые, согласно (2.4), будут такими:

$$\omega_\alpha = (-1)^\alpha |\lambda_\alpha|, \quad \alpha = 1, 2$$

Таким образом, зоны неустойчивости параметрического резонанса при $e \neq 0$ будут рождаться из кривых параметрического резонанса (3.1) при $e = 0$. Из элементарного анализа можно убедиться, что из всех возможных случаев параметрического резонанса (3.1), как и в классической ограниченной задаче трех тел [12], при $e = 0$ реализуется только один случай

$$4\omega_2^2 \equiv 2\{1 - [1 - 36\mu(1 - \mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2)]^{1/2}\} = 1 \quad (3.2)$$

Как следует из теории параметрического резонанса гамильтоновых систем [11, 12] (а рассматриваемая система допускает представление в гамильтоновой форме), для действительного возникновения неустойчивости при малых e и выполнении соотношения (3.2) необходимо, чтобы при разложении в ряд Фурье периодических коэффициентов системы (2.1) обязательно присутствовали гармоники $\cos \nu$, $\sin \nu$, что, очевидно, и будет иметь место, как это видно из выражений (2.2) для этих коэффициентов.

Отсюда заключаем, что все множество неустойчивых в первом приближении точек либрации при малых, но не равных нулю значениях эксцентриситета будет лежать в области, примыкающей к кривой, задаваемой уравнением (3.2), приводящимся к виду

$$48\mu(1 - \mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2) = 1 \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что эта неустойчивость возникает лишь при значениях μ из промежутка $\mu^* \leq \mu \leq 0,5$, где $\mu^* = \frac{1}{2} - \sqrt{11/3}/4 = 0,0212865\dots$ – меньший корень уравнения

$$48\mu(1 - \mu) = 1$$

Полученное уравнение так же, как и уравнение границы области устойчивости (2.5), описывает две дуги окружности одинаковых радиусов $R = 2\sqrt{3\mu(1 - \mu)}$ с общей хордой, представляющей отрезок S_1S_2 , вблизи которых при достаточно малых значениях $e \neq 0$ треугольные точки либрации будут неустойчивы по Ляпунову, в том числе и в строгом смысле (т.е. в силу полных уравнений возмущенного движения) вследствие возникновения параметрического резонанса. Как видим, такой случай неустойчивости будет иметь место для всякой пары тел S_1 , S_2 и, по крайней мере, для тех точек либрации, координаты которых удовлетворяют условию (1.7) и равенству (3.3) одновременно.

Заметим, что обнаруженная неустойчивость треугольных точек либрации является обобщением случая неустойчивости, обусловленной точно таким же типом параметрического резонанса, возникающего и в классической ограниченной эллиптической задаче трех тел, получаемой из рассматриваемой при $Q_1 = Q_2 = 1$ [12, 13]. Интересно, что соответствующее резонансное значение μ в точности совпадает с его бифуркационным значением, при котором происходит расщепление области устойчивости в круговой фотогравитационной задаче. Отметим еще, что данная интерпретация области устойчивости и случая неустойчивости, обусловленного параметрическим резонансом, позволяют весьма просто получить результаты работы [6], где учитывалось излучение только от одного из основных тел (т.е. один из коэффициентов редукции равен единице). В этом случае все треугольные точки либрации располагаются на одной из окружностей единичного радиуса. Они все устойчивы при $\mu \leq \frac{1}{2} - \sqrt{2}/3$, а при больших значениях устойчивыми будут лишь те из них, которые расположены на части указанной окружности, примыкающей к точке L_4 и L_5 . Параметрический резонанс в отличие от общего случая здесь возникает в окрестности только одной точки (вторая дуга, соответствующая параметрическому резонансу, не пересекает указанной окружности единичного радиуса): Данная интерпрета-

ция позволит также более целенаправленно провести дальнейший численный анализ области устойчивости при произвольных значениях эксцентриситета, начатый в [8, 9].

Автор благодарит В.В. Белецкого за обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00122) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (294).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kunitsyn A.L., Polyakhova E.N. The restricted photogravitational three-body problem: A modern state // *Astron. and Astrophys. Trans.* 1995. V. 6. С. 283–293.
2. Радзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // *Астрон. ж.* 1950. Т. 27. № 4. С. 249–256.
3. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Письма в Астрон. ж.* 1983. Т. 9. № 7. С. 432–435.
4. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Письма в Астрон. ж.* 1985. Т. 11. № 2. С. 145–148.
5. Лукьянов Л.Г. Лагранжевы решения в фотогравитационной ограниченной круговой задаче трех тел // *Астрон. ж.* 1984. Т. 61. Вып. 3. С. 564–570.
6. Markellos V.V., Perdios E., Labropoulou P. Linear stability of the triangular equilibrium restricted problem // *Astrophys. and Space Sci.* 1992. V. 194. P. 207–213.
7. Kumar V., Choudhry R.K. Nonlinear stability of the triangular libration points for the photogravitational elliptic restricted three-body problem // *Celest. Mech.* 1990. V. 48. № 4. P. 299–317.
8. Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю. Об устойчивости лагранжевых точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел // *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия.* 1996. № 5. С. 71–76.
9. Кочеткова А.Ю. Об устойчивости в нелинейном приближении треугольных точек либрации в пространственной ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел // *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия.* 1999. № 5. С. 69–71.
10. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1964. 560 с.
11. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука. 1987. 328 с.
12. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
13. Danby J. M.A. Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of two bodies // *Astr. J.* 1964. V. 69. № 2. P. 165.

Москва

Поступила в редакцию
7.III.2000