

УДК 530.18; 629.154.4

© 2000 г. А.П. Иванов, В.В. Самсонова

**ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ
ВБЛИЗИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ
ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

Рассматривается круговая ограниченная задача трех тел, когда пассивно гравитирующая точка испытывает также действие малых сил сопротивления, противоположных вектору абсолютной скорости. Характер потери устойчивости треугольных точек либрации изучается методом Пуанкаре, в котором малым параметром служит отношение величины силы сопротивления к силе гравитационного притяжения; строятся асимптотически устойчивые периодические орбиты. Порождающими являются два ляпуновских семейства периодических орбит, существующих в окрестности точек либрации классической задачи. Расчеты проводились для отношений масс, соответствующих системам Солнце – Юпитер и Земля – Луна при разных значениях параметров, характеризующих закон сопротивления.

Ранее было показано [1, 2], что в рассматриваемой задаче сохраняются положения относительного равновесия, близкие к лагранжевым точкам. В зависимости от характера сопротивления (определяемого гипотетическим распределением межпланетного вещества) эти равновесия могут быть асимптотически устойчивы или неустойчивы. В соответствии с общей теорией динамических систем потеря устойчивости при изменении параметров системы сопровождается бифуркацией рождения цикла. Отсюда следует априорная возможность существования в окрестности неустойчивых точек либрации асимптотически устойчивых периодических орбит.

1. Постановка задачи. Будем исследовать ограниченную задачу трех в разреженной межпланетной среде, оказывающей некоторое (малое) сопротивление движущимся объектам. Было отмечено [3], что на ранних этапах формирования Солнечной системы плотность этой среды была значительно выше, чем в современный период, и ее сопротивление могло играть заметную роль в установлении нынешних орбит; в частности, следствием этого фактора является вековое уменьшение эксцентриситетов кеплеровых эллипсов. При изучении влияния сопротивления на треугольные точки либрации [1, 2] считалось, что основные притягивающие тела движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс, и на малую массу помимо гравитационных сил действует сопротивление вида

$$\mathbf{S} = -\epsilon g(|\mathbf{V}|)f(r_1)\mathbf{V} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{V}$ – скорость в абсолютной системе координат, r_1 – расстояние до Солнца, f – скалярная функция, описывающая распределение плотности среды, g – функция, задающая зависимость силы сопротивления от скорости, ϵ – малая положительная постоянная.

Уравнения движения во вращающейся вместе с основными притягивающими телами системе координат (угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)$) в векторной форме выгля-

дят так [1]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \text{grad } U(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{S} \quad (1.2)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (\mu, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + (\mu-1, 0, 0), \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

где m_1, m_2 – массы основных притягивающих тел.

При $\varepsilon = 0$ система (1.2) обладает положениями равновесия

$$L_4: \quad \mathbf{r}^0 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad L_5: \quad \mathbf{r}^0 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \quad (1.3)$$

для которых $r_1 = r_2 \equiv 1$. Если выполнено неравенство

$$\mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \sqrt{69}/18 = 0,0385... \quad (1.4)$$

то эти равновесия в первом приближении устойчивы. При этом, согласно теореме Ляпунова о голоморфном интеграле, в окрестности каждой из точек (1.3) существует по три (по числу степеней свободы системы (1.2)) семейства периодических орбит. Первые два из них отвечают корням $\omega_1 > \omega_2 > 0$ определяющего уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + (27/4)M = 0, \quad M = \mu(1-\mu) \quad (1.5)$$

При этом условия теоремы Ляпунова не выполняются для второго семейства для тех значений μ , для которых

$$27M = \frac{4n^2}{(n^2 + 1)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Орбиты третьего семейства ортогональны плоскости движения основных притягивающих тел (см. [4]).

Для малых значений $\varepsilon > 0$ точки либрации смещаются на величину порядка ε от значений (1.3) [1, 2]. При этом изменяется характер их устойчивости, поскольку корни характеристического уравнения сходят с мнимой оси. Вследствие этого разрушаются и ляпуновские семейства: поскольку возмущения неконсервативны, сохраниться могут лишь такие изолированные орбиты, для которых циркуляция сил сопротивления равна нулю. Построение таких орбит составляет предмет данной работы.

2. Метод исследования. Суть метода Пуанкаре состоит в последовательной аппроксимации периодического решения системы с малым параметром ε с погрешностью $O(\varepsilon^n)$. При этом в качестве начального приближения выбирается такое решение невозмущенной системы (т.е. $\varepsilon = 0$), которое удовлетворяет так называемому амплитудному уравнению [5]. Это уравнение имеет довольно простой смысл в натуральных механических системах, подверженных действию малых дополнительных сил: циркуляция этих сил на периодическом решении Γ невозмущенной системы должна равняться нулю [5, 6]:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{S}, d\mathbf{r}) = 0 \quad (2.1)$$

Обсуждаемая ограниченная задача трех тел обладает периодическими решениями разных типов (см. [7] и имеющийся там список литературы). Если функции f, g в формуле (1.1) заданы, то проверка условия (2.1) сводится к квадратурам.

Будем исследовать лишь ляпуновские семейства вблизи треугольных точек либрации (1.3). При этом периодические орбиты возмущенной системы можно рассматривать в плане бифуркации рождения цикла из положения равновесия при фиксированном ε и изменении параметра μ или параметров, описывающих тип сопротивления. Методы исследования такой бифуркации изложены ранее [8].

Существует два основных типа бифуркации рождения цикла: субкритическая и суперкритическая. Первый из них характеризуется сосуществованием устойчивого равновесия и неустойчивого цикла; при этом потеря устойчивости равновесия сопровождается исчезновением цикла. Для второго типа устойчивый цикл рождается при потере устойчивости равновесия. Для определения типа бифуркации достаточно выяснить, соответствует ли корень амплитудного уравнения области устойчивости положения равновесия. Решение этой задачи включает в себя несколько этапов.

1°. Для произвольной точки на границе области устойчивости точки либрации в сопротивляющейся среде определить, какой из корней характеристического уравнения лежит на мнимой оси. Это позволит выяснить, какое из трех ляпуновских семейств порождает предельный цикл.

2°. Затем необходимо построить требуемое семейство ляпуновских орбит в окрестности точек либрации в пустоте. При этом можно комбинировать численные расчеты с аналитическими результатами [4].

3°. Задаваясь значениями параметров вблизи границы области устойчивости, произвести расчеты циркуляции сил сопротивления вдоль периодических орбит классической задачи. Полученные результаты позволят определить коэффициенты нормальной формы уравнений движения, ответственные за характер бифуркации, и определить корни амплитудного уравнения. Тем самым будут построены порождающие орбиты (нулевое приближение в методе Пуанкаре).

В дальнейшем возможно уточнение порождающих орбит по методу Пуанкаре. Здесь оно не рассматривается.

3. Результаты. Реализуем схему исследования, описанную в предыдущем разделе.

Будем считать неравенство (1.4), выражающее условие устойчивости точек либрации в отсутствие сопротивления, выполненным. При этом характеристическое уравнение имеет три пары корней на мнимой оси

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{D}), \quad \lambda_{3,4}^2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{D}), \quad \lambda_{5,6}^2 = -1, \quad D = 1 - 27M \quad (3.1)$$

При наличии сопротивления вида (1.1) собственные значения (3.1) смещаются с мнимой оси на величину порядка ε ; при этом третья пара всегда переходит в левую полуплоскость, а расположение двух остальных пар зависят от вида функции f, g .

Было получено [2] следующее условие, при выполнении которого обе этих пары попадают в левую полуплоскость (в уточненной форме):

$$\sqrt{D}(1 + \gamma) > |\beta(2 - \mu) - \gamma\kappa| \quad (3.2)$$

$$\gamma = \frac{V^0 g'(V^0)}{2g(V^0)}, \quad \beta = \frac{f'(1)}{f(1)}, \quad V^0 = \sqrt{1 - M}, \quad \kappa = 3 - \frac{9}{2} \frac{M}{1 - M}$$

Неравенство (3.2) имеет одинаковую форму для обеих точек L_4 и L_5 ; здесь V^0 обозначает абсолютную скорость точки либрации. Вещественные части корней характеристического уравнения имеют такой вид

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,3} = -\varepsilon f(1)g(V^0)((1 + \gamma) \pm [\gamma\kappa - \beta(2 - \mu)]/\sqrt{D}) \quad (3.3)$$

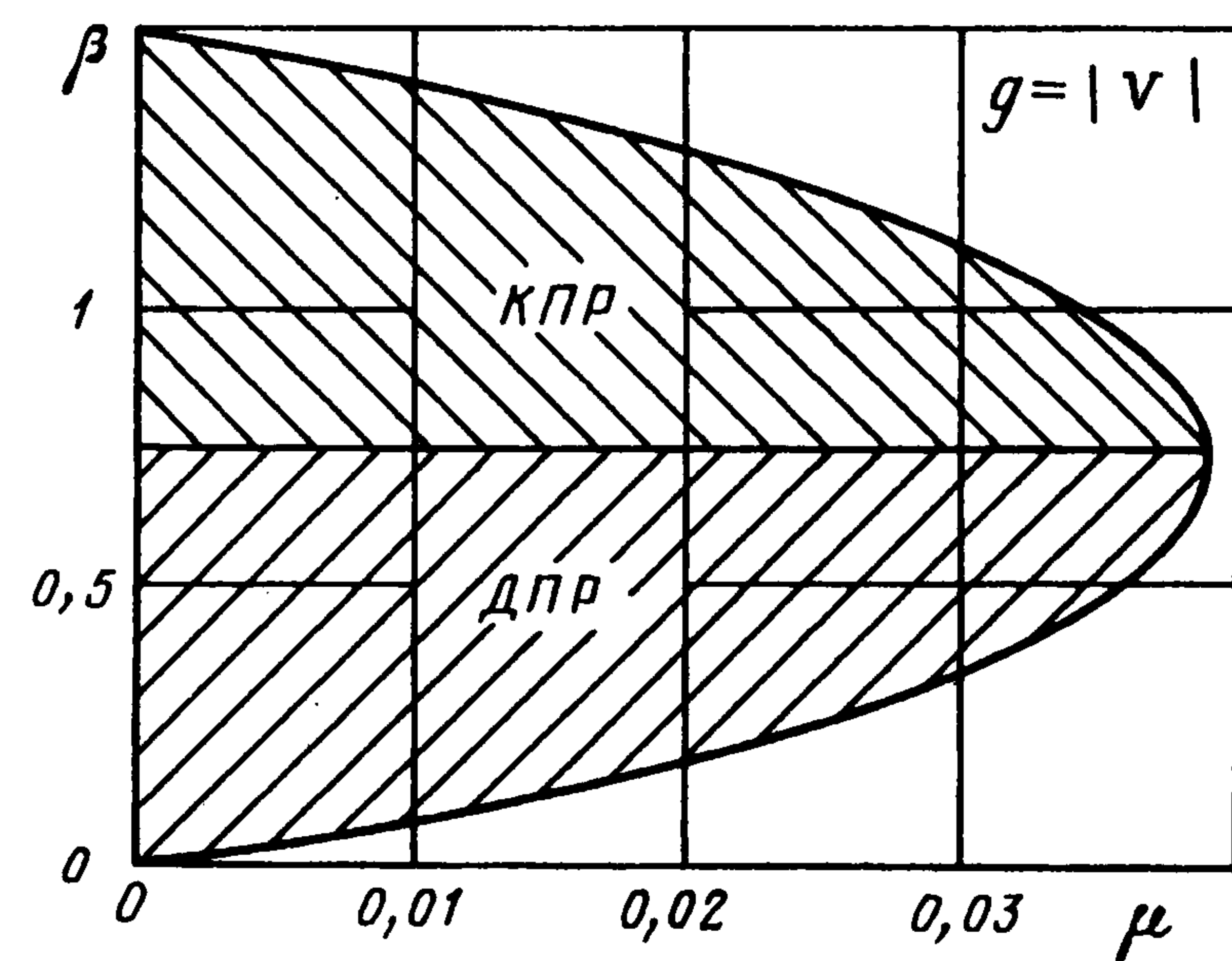
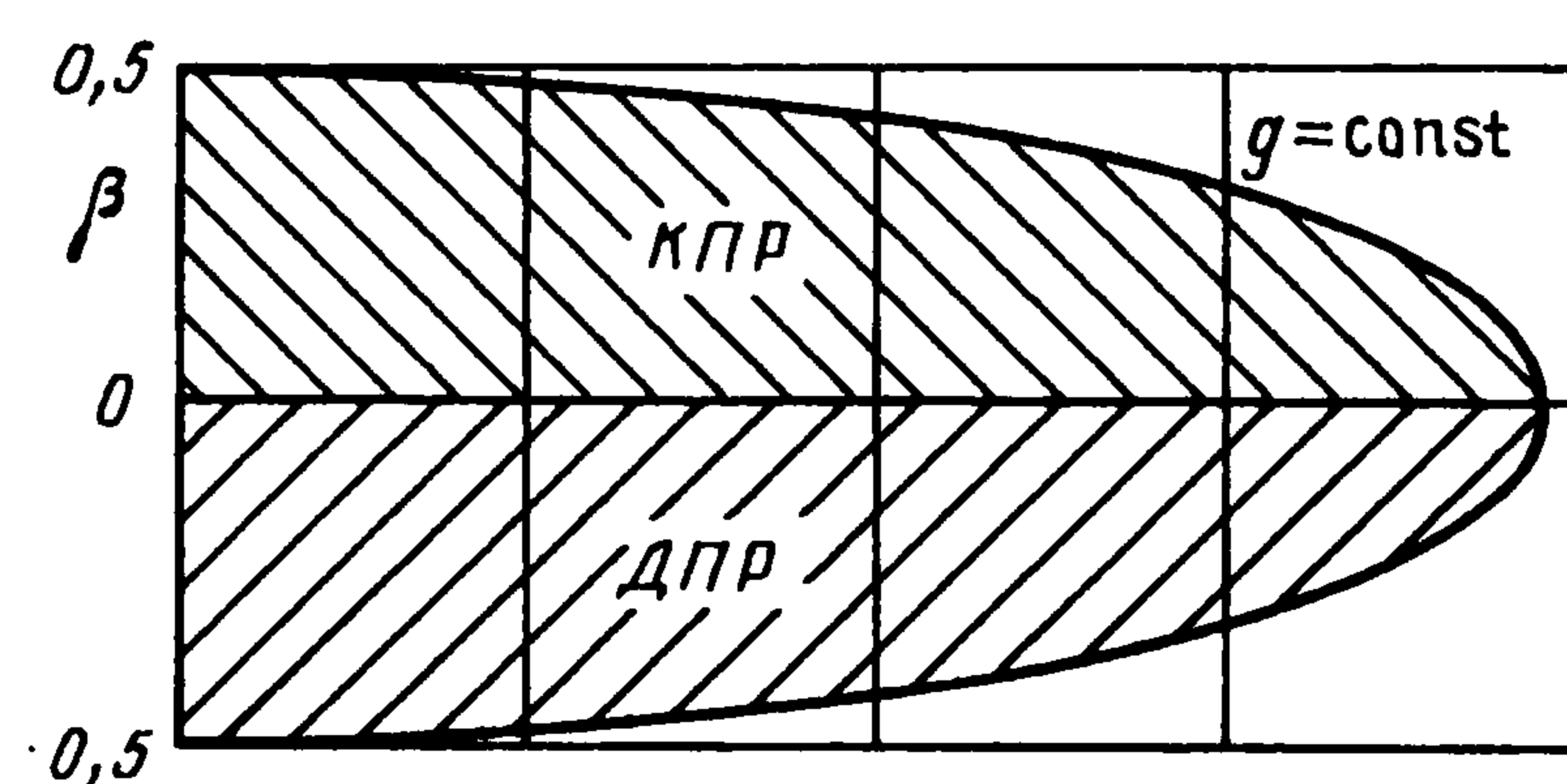
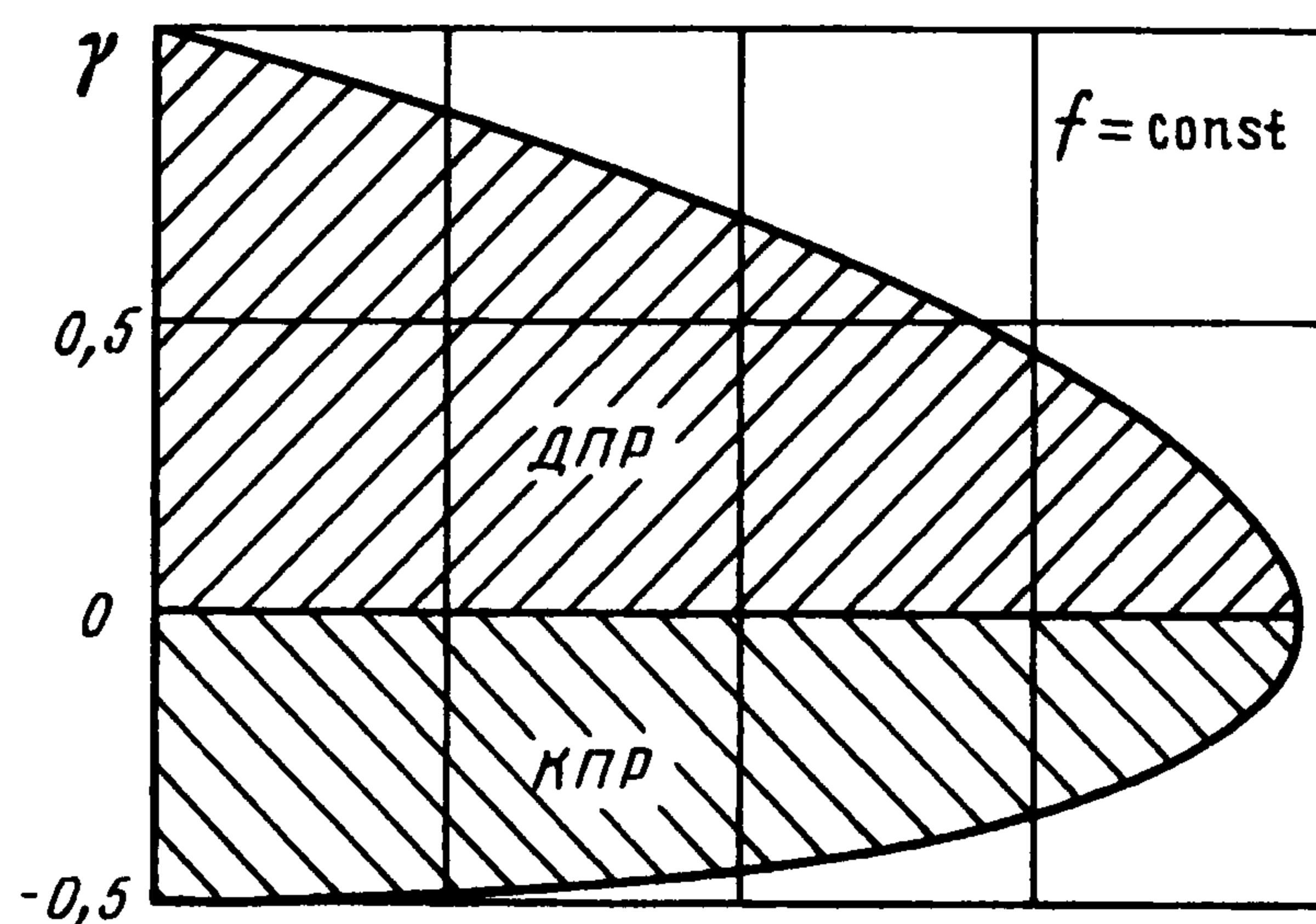
Ввиду наличия в правой части неравенства (3.2) знака абсолютной величины, возможны два случая, когда оно нарушается. В первом из этих случаев

$$\sqrt{D}(1 + \gamma) < \beta(2 - \mu) - \gamma\kappa \quad (3.4)$$

При этом вследствие (3.3) получаем $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_3 < 0$. Следовательно, возможно рождение предельных циклов лишь из короткопериодических орбит (т.е. из орбит ляпуновского семейства, соответствующего корню λ_1).

Во втором случае

$$\sqrt{D}(1 + \gamma) > \gamma\kappa - \beta(2 - \mu) \quad (3.5)$$



Здесь имеем, напротив, $\text{Re } \lambda_1 < 0$, $\text{Re } \lambda_3 > 0$, поэтому предельный цикл может родиться лишь из долгопериодического семейства.

Согласно полученным выше результатам, надлежит построить два семейства ляпуновских орбит в окрестностях треугольных точек либрации, лежащие в плоскости движения основных притягивающих тел. Решение этой задачи подробно описано [4]. Бифуркация рождения цикла описывается формулой

$$v = Kl^2 + o(l^2) \quad (3.6)$$

где v – некоторый параметр, характеризующий удаление изображающей точки от границы области устойчивости, l – длина орбиты.

На фигуре представлены области устойчивости треугольных точек либрации в среде с сопротивлением различного вида. Здесь штриховка указывает на то, какое из ляпуновских семейств испытывает бифуркацию при выходе на границу области. Для среды постоянной плотности (в уравнении (1.1) $f = \text{const}$), параметр γ определяется формулой

$$\gamma = V^{\circ} g'(V^{\circ}) / (2g(V^{\circ}))$$

где V° – абсолютная скорость точки либрации. Бифуркация долгопериодических решений (ДПР) имеет субкритический характер, а короткопериодических решений (КПР) – суперкритический, т.е. устойчивый предельный цикл рождается из КПР. Размер такого цикла определяется по формуле (3.6), в которой $\nu = \gamma^* - \gamma$, $K = 6,0 \cdot 10^{-3}$ для соотношения масс $\mu = 9,5 \cdot 10^{-4}$ (S – J) и $K = 2,7 \cdot 10^{-3}$ для $\mu = 1,215 \cdot 10^{-2}$ (E – M). Здесь S – Солнце, J – Юпитер, E – Земля, M – Луна, $\gamma^* = \gamma^*(\mu)$ – значение, соответствующее нижней границе области.

В случаях вязкого трения (в уравнении (1.1) $g = \text{const}$) и аэродинамического сопротивления ($g = |V|$) коэффициент β определяется формулой

$$\beta = |r^{\circ} - r_1| f'(|r^{\circ} - r_1|) / f(|r^{\circ} - r_1|)$$

где r° – радиус-вектор точки либрации. Вид бифуркаций аналогичен предыдущим, причем $\nu = \beta - \beta^*$, для устойчивых циклов $K = 6,5 \cdot 10^{-3}$ (S – J) и $K = 3,3 \cdot 10^{-3}$ (E – M) в случае $g = \text{const}$ и $K = 7,2 \cdot 10^{-3}$ (S – J) и $K = 4,8 \cdot 10^{-3}$ (E – M) в случае $g = |V|$. Здесь $\beta^* = \beta^*(\mu)$ – значение, соответствующее верхней границе области.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00281).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А.П. Влияние малых сил сопротивления на относительное равновесие // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 22–30.
2. Иванов А.П., Соколовская В.В. Об устойчивости треугольных точек либрации задачи трех тел в сопротивляющейся среде // Космич. исслед. 1997. Т. 35. № 5. С. 495–500.
3. Smart W.M. Celestial Mechanics. London, et al. 1953. = Смарт У.М. Небесная механика. М.: Мир, 1965. 502 с.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1949. 244 с.
6. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ. 1934. Т. 4, вып. 8.
7. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.
8. Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and its Applications. N.Y.: Springer, 1976. = Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.