

УДК 531.391

© 2000 г. В.Г. Вильке, А.В. Шатина

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Исследуется ограниченная круговая задача трех тел, когда два массивных тела, рассматриваемые как материальные точки, движутся по заданным круговым орбитам в одной плоскости, а третье тело малой массы предполагается сферически симметричным и деформируемым, его центр масс движется в плоскости круговых орбит первых двух тел, а вращение вокруг центра масс происходит вокруг нормали к плоскости движения центра масс. Существенным обстоятельством, влияющим на эволюцию движения малого сферически симметричного деформируемого тела, является рассеяние энергии при его деформациях, что приводит к эволюции его орбиты и угловой скорости вращения. Поскольку предполагается, что массы двух тел (для Солнечной системы это могут быть Солнце и Юпитер) относятся как один к μ ($\mu \ll 1$), то эволюция движения деформируемого тела разбивается на два этапа. На первом этапе "быстрой" эволюции его орбита стремится к круговой с центром в массивном теле с массой, равной единице, а вращение совпадает с орбитальным (режим гравитационной стабилизации, резонанс 1:1). При этом тело оказывается деформированным (сплюснутым по полюсам и вытянутым вдоль радиуса, соединяющего это тело малой массы с массивным телом) [1, 2]. На втором этапе "медленной" эволюции учитывается влияние тела с массой μ , что приводит к эволюции круговой орбиты деформируемого тела.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть две материальные точки M_1 и M_2 , массы которых равны единице и μ ($\mu \ll 1$), движутся по круговым орбитам под действием сил ньютоновского притяжения вокруг общего центра масс O в плоскости OXY . Пусть $OM_2 = b$, $OM_1 = \mu b$, а угол α между осью OX и радиус-вектором OM_2 точки M_2 меняется по закону

$$\alpha(t) = \frac{\omega_3 t}{1 + \mu} + \alpha(0), \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{f}{b^3}}$$

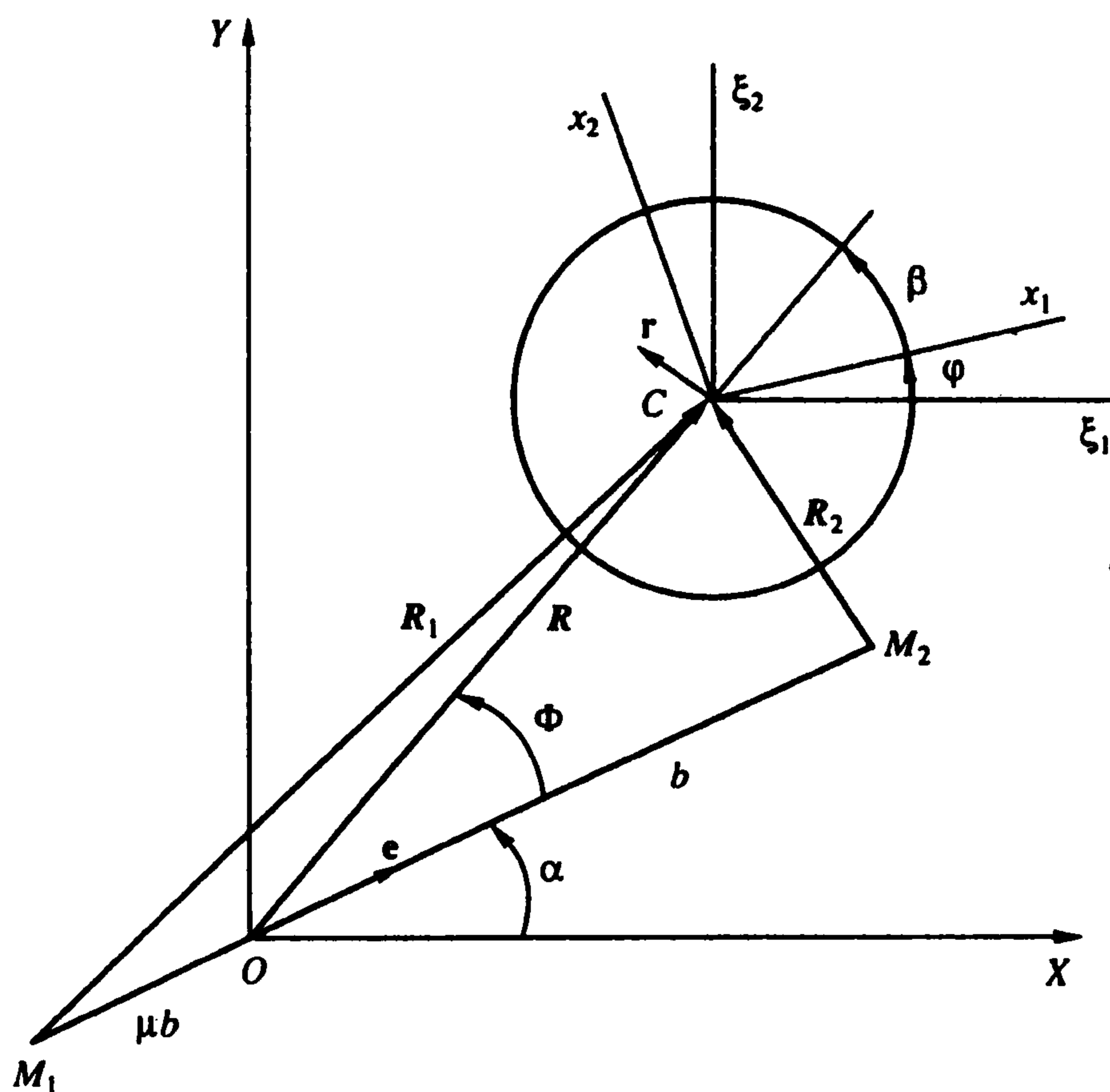
где f – гравитационная постоянная (фиг. 1).

Далее предположим, что центр масс C вязкоупругого деформируемого однородного шара массы m и плотности ρ движется в плоскости OXY , $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки C . Положение точек шара определяется векторным полем

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + O(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{m} \int_V \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}, t) \rho d\mathbf{x}, \quad \int_V \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_V \text{rot } \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$$

Здесь $V = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| < r_0\}$ – область в E^3 , занимаемая шаром в естественном недеформированном состоянии, условия (1.1) однозначно определяют радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ центра масс C деформированного шара и систему координат $Cx_1x_2x_3$, относительно которой шар в интегральном смысле не вращается [1]. Оператор $O(t) = O(\varphi(t))$ определяет



Фиг. 1

переход от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кёнига $C\xi_1\xi_2\xi_3$ и имеет вид

$$O(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Кинетическая энергия шара представляется функционалом

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\xi}^2 \rho dx = \frac{1}{2} \int_V [O^{-1} \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]^2 \rho dx$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, определяемый равенством $\boldsymbol{\omega} \times (\cdot) = O^{-1} \dot{O}(\cdot)$ и имеющий вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

С учетом условий (1.1) получим

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \int_V \dot{\varphi}^2 [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx + \int_V (\dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \dot{\mathbf{u}}) \rho dx + \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx$$

Функционал потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = - \int_V \frac{f \rho dx}{\sqrt{(\mathbf{R}_1 + O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2}} - \int_V \frac{\mu f \rho dx}{\sqrt{(\mathbf{R}_2 + O(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2}} + \mathcal{E}[\mathbf{u}] \quad (1.2)$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{C} = \mathbf{R} + \mu b \mathbf{e}, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{C} = \mathbf{R} - b \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \quad (1.3)$$

$$\mathcal{E}[\mathbf{u}] = \int_V a (I_E^2 - a'_1 \Pi_E) dx, \quad a > 0, \quad 0 < a'_1 < 3$$

$$a = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad a'_1 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}$$

$$I_E = \sum_{i=1}^3 e_{ii}, \quad \Pi_E = \sum_{i < j}^3 (e_{ii} e_{jj} - e_{ij}^2), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$\mathcal{E}[\mathbf{u}]$ – функционал потенциальной энергии упругих деформаций, соответствующий классической теории упругости малых деформаций [1], E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Так как $|\mathbf{R}_k| \gg |\mathbf{r} + \mathbf{u}|$ ($k = 1, 2$), то подынтегральные выражения в (1.2) можно разложить в ряд. Ограничиваясь членами третьего порядка по степеням $|\mathbf{r} + \mathbf{u}|/R_k$ и линейными по $|\mathbf{u}|/R_k$, где $R_k = |\mathbf{R}_k|$ ($k = 1, 2$), получим

$$\Pi = -\frac{fm}{R_1} - \frac{\mu fm}{R_2} + \frac{f}{R_1^3} \int_V \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R}_{10}, \mathbf{r})(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R}_{10}, \mathbf{u})\} \rho dx + \\ + \frac{\mu f}{R_2^3} \int_V \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R}_{20}, \mathbf{r})(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R}_{20}, \mathbf{u})\} \rho dx + \mathcal{E}[\mathbf{u}]$$

Здесь

$$\mathbf{R}_{k0} = \mathbf{R}_k / R_k, \quad k = 1, 2$$

$$R_1 = (R^2 + 2\mu Rb \cos \Phi + \mu^2 b^2)^{1/2}, \quad R_2 = (R^2 - 2Rb \cos \Phi + b^2)^{1/2}$$

$R = |\mathbf{R}|$, Φ – угол между векторами $\mathbf{OC}$ и $\mathbf{OM}_2$.

Уравнения движения запишем в форме уравнений Рауса, используя канонические переменные Делоне – Андуайе (I, L, G, φ, l, g), определяющие движение центра масс шара и его вращение вокруг оси Sx_3 , и лагранжевы переменные $u_1(\mathbf{r}, t), u_2(\mathbf{r}, t), u_3(\mathbf{r}, t)$.

Модуль вектора момента количеств движения шара относительно системы координат $S\xi_1\xi_2\xi_3$ определяется равенством

$$I = \nabla_{\dot{\varphi}} T = J_{33}[\mathbf{u}] \dot{\varphi} + G_u \quad (1.4)$$

$$J_{33}[\mathbf{u}] = \int_V [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx, \quad G_u = (\mathbf{e}_3, \int_V [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}}] \rho dx)$$

Переход от переменных $(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R})$ к каноническим переменным Делоне (L, G, l, g) осуществляется с помощью соотношений [3, 4]

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{fm}{R} = -\frac{f^2 m^3}{2L^2} \quad (1.5)$$

$$R = \frac{G^2}{fm^2(1 + e \cos \vartheta)}, \quad \cos w = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}, \quad l = w - e \sin w, \quad e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$$

Здесь e – эксцентриситет орбиты центра масс шара, ϑ, l, w – истинная, средняя и эксцентрические аномалии соответственно, g – долгота перигелия от восходящего узла. В переменных Делоне

$$\mathbf{R} = (R \cos(g + \vartheta), R \sin(g + \vartheta), 0), \quad \Phi = g + \vartheta - \alpha$$

Функционал Рауса определяется равенством

$$\mathcal{R} = T_2 - T_0 + \Pi$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \int_V \dot{\varphi}^2 [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx, \quad T_0 = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx$$

С учетом преобразований (1.4), (1.5) получим

$$\mathcal{R}[I, L, G, \varphi, l, g, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \alpha] = \frac{(I - G_u)^2}{2J_{33}[\mathbf{u}]} - \frac{f^2 m^3}{2L^2} - \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \mu f m \left(\frac{R_1 - R}{\mu R_1 R} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{f}{R_1^3} \int_V \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(O^{-1} \mathbf{R}_{10}, \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}_{10}, \mathbf{u})\} \rho dx + \\
& + \frac{\mu f}{R_2^3} \int_V \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(O^{-1} \mathbf{R}_{20}, \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}_{20}, \mathbf{u})\} \rho dx + \mathcal{E}[\mathbf{u}]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Функционал $J_{33}[\mathbf{u}]$ можно представить в виде суммы момента инерции недеформированного шара относительно оси $C\xi_3$, линейной части функционала $J_{33}[\mathbf{u}]$ по компонентам вектора $\mathbf{u}$ и квадратичной части этого функционала по компонентам вектора $\mathbf{u}$

$$J_{33}[\mathbf{u}] = A + J_{33}^{(1)}[\mathbf{u}] + J_{33}^{(2)}[\mathbf{u}]$$

$$A = \frac{2}{5} m r_0^2, \quad J_{33}^{(1)}[\mathbf{u}] = 2 \int_V [(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - (\mathbf{e}_3, \mathbf{r})(\mathbf{e}_3, \mathbf{u})] \rho dx, \quad J_{33}^{(2)}[\mathbf{u}] = \int_V [\mathbf{u}^2 - (\mathbf{e}_3, \mathbf{u})^2] \rho dx$$

Уравнения движения вязкоупругого шара записываются в форме уравнений Рауса

$$\dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi}, \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial l}, \quad \dot{l} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial L}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial g}, \quad \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial G} \tag{1.7}$$

$$\int_V \left[\left(-\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{R} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{D} + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} + \lambda_2 \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} \right] dx = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3 \tag{1.8}$$

где $(W_2^1(V))^3$ – пространство С.Л. Соболева, $\mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi \mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}]$ – диссипативный функционал, χ – коэффициент внутреннего вязкого трения. Последнее уравнение записано в виде вариационного принципа Даламбера – Лагранжа и содержит два неопределенных множителя $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, порожденных условиями (1.1).

Будем полагать, что наименьшая частота собственных колебаний шара много больше угловых скоростей $\dot{\Phi}$ и ω_3 . Это означает, что при соответствующем выборе масштабов размерных величин числовое значение модуля упругости материала шара E будет велико, а параметр $\varepsilon = E^{-1}$ мал. Перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ после затухания собственных колебаний из-за наличия диссипативных сил будут пропорциональны малому параметру ε

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$$

Если принять $\varepsilon \neq 0$, $\mu = 0$, то система уравнений (1.7), (1.8) будет описывать эволюцию движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил при условии, что плоскость орбиты центра масс остается неподвижной, а вращение вокруг центра масс происходит вокруг нормали к этой плоскости. Пространственный вариант этой задачи, а также указанный частный случай были изучены ранее [1, 5]. Было показано, что деформируемая планета при наличии диссипации энергии стремится к стационарному движению, при котором центр масс планеты описывает окружность, а ее ориентация неизменна в орбитальных осях. Скорость этой эволюции имеет порядок $\varepsilon \chi$.

Приступим к изучению случая, когда $\varepsilon \neq 0$, $\mu \neq 0$, и выясним, как наличие третьего тела (планеты массы μ) повлияет на эволюцию движения вязкоупругого шара.

2. Построение приближенных эволюционных уравнений движения вязкоупругого шара в ограниченной задаче трех тел. Функционал Рауса (1.6) при учете формул (1.3) представим в виде

$$\mathcal{R} = \frac{(I - G_u)^2}{2J_{33}[\mathbf{u}]} - \frac{f^2 m^3}{2L^2} - \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + H[\mu, R, \Phi, \beta, \mathbf{u}] + \mathcal{E}[\mathbf{u}] \tag{2.1}$$

$$\Phi = g + \vartheta - \alpha, \quad \beta = g + \vartheta - \varphi$$

$$\begin{aligned}
H[\mu, R, \Phi, \beta, \mathbf{u}] &= F_0 + \int_V \{F_1(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - F_2(\xi_0, \mathbf{r})(\xi_0, \mathbf{u}) - \\
&- F_3[(\xi_0, \mathbf{r})(\xi_1, \mathbf{u}) + (\xi_1, \mathbf{r})(\xi_0, \mathbf{u})] - F_4(\xi_1, \mathbf{r})(\xi_1, \mathbf{u})\} dx \\
\xi_0 &= O^{-1}\mathbf{R}_0 = (\cos \beta, \sin \beta, 0) \\
\xi_1 &= O^{-1}\mathbf{e} = (\cos(\beta - \Phi), \sin(\beta - \Phi), 0) \\
F_i &= F_i(\mu, R, \Phi), \quad i = 0, 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

Таким образом, зависимость функционала H от переменных L, G, l, g, φ осуществляется через функции R, Φ, β по формулам (1.5), (2.1).

Функции F_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) могут быть разложены в ряд по степеням малого параметра μ . Ограничиваясь членами нулевого и первого порядка малости по μ , получим

$$\begin{aligned}
F_0 &= \mu f_{01}, \quad f_{01} = fmR^{-1}(q \cos \Phi - p) \\
F_1 &= f_{10} + \mu f_{11}, \quad f_{10} = \rho f R^{-3}, \quad f_{11} = \rho f R^{-3}(p^3 - 3q \cos \Phi) \\
F_2 &= f_{20} + \mu f_{21}, \quad f_{20} = 3 \rho f R^{-3}, \quad f_{21} = 3 \rho f R^{-3}(p^5 - 5q \cos \Phi) \\
F_3 &= \mu f_{31}, \quad f_{31} = 3 \rho f R^{-3}(q - qp^5) \\
F_4 &= \mu f_{41}, \quad f_{41} = 3 \rho f R^{-3} q^2 p^5 \\
q &= bR^{-1}, \quad p = (1 - 2q \cos \Phi + q^2)^{-1/2}
\end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением класса квазикруговых орбит, т.е. орбит, эксцентриситет которых равен нулю. Для этого покажем, что уравнения (1.7) допускают указанное ниже множество решений.

Лемма 1. Система уравнений (1.7) имеет в качестве решений класс квазикруговых орбит, когда эксцентриситет $e(t) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим разность $L - G$ и покажем, что производная по времени от этой разности в силу уравнений (1.7) обращается в нуль при $e = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\dot{L} - \dot{G} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial g} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial l} = \frac{\partial H}{\partial g} - \frac{\partial H}{\partial l} = \\
&= \frac{\partial H}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial g} + \frac{\partial H}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial g} - \frac{\partial H}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{\partial H}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial l} - \frac{\partial H}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial l}
\end{aligned}$$

Из определения функций Φ и β , согласно формулам (2.1), получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g} = 1, \quad \frac{\partial \beta}{\partial g} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial l} = \frac{\partial \vartheta}{\partial l}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial l} = \frac{\partial \beta}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial l} = \frac{\partial \vartheta}{\partial l}$$

Далее, согласно преобразованиям (1.5),

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{L^3}{fm^2 G} e \sin \vartheta, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial l} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

При $e = 0$ имеем $\partial R / \partial l = 0$, $\partial \vartheta / \partial l = 1$. Следовательно, $\dot{L} - \dot{G} = 0$. Лемма 1 доказана.

Поскольку для класса квазикруговых орбит переменные Делоне вырождаются, то целесообразно в этом случае использовать канонические переменные Пуанкаре [6]

$$\Lambda = L, \quad \Gamma = L - G, \quad \lambda = l + g, \quad \gamma = -g$$

Для класса квазикруговых орбит ($e = 0$)

$$\Gamma(t) = 0, \quad R = \Lambda^2 / fm^2, \quad \vartheta = l, \quad \Phi = \lambda - \alpha, \quad \beta = \lambda - \varphi \quad (2.2)$$

Функционал Рауса в переменных Андуайе – Пуанкаре имеет вид

$$\mathcal{R}[I, \Lambda, \varphi, \lambda, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \alpha] = \frac{(I - G_u)^2}{2J_{33}[\mathbf{u}]} - \frac{f^2 m^3}{2\Lambda^2} - \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + \\ + H[\mu, R, \Phi, \beta, \mathbf{u}] + \mathcal{E}[\mathbf{u}]$$

R, Φ, β определены соотношениями (2.2).

Уравнения движения представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial H}{\partial \beta} \\ \dot{\Lambda} &= -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} - \frac{\partial H}{\partial \beta} \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Lambda} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3} - \frac{I - G_u}{J_{33}[\mathbf{u}]} + \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Lambda} - \frac{\omega_3}{1 + \mu} = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3} + \frac{\partial H}{\partial \Lambda} - \frac{\omega_3}{1 + \mu} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \int_V [(\rho \ddot{\mathbf{u}} + \frac{d}{dt} \left\{ \rho \frac{I - G_u}{J_{33}[\mathbf{u}]} [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] \right\} + \rho \frac{I - G_u}{J_{33}[\mathbf{u}]} [\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{u}}] - \\ - \rho \frac{(I - G_u)^2}{J_{33}^2[\mathbf{u}]} [\mathbf{r} + \mathbf{u} - (\mathbf{e}_3, \mathbf{r} + \mathbf{u}) \mathbf{e}_3] + \nabla_{\mathbf{u}} H + \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{D} + \lambda_1) \delta \mathbf{u} + \\ + \lambda_2 \operatorname{rot} \delta \mathbf{u}] dx = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если $\varepsilon = 0$, то $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$, и уравнения (2.3) выглядят следующим образом:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\Lambda} = -\frac{\partial F_0}{\partial \Phi}, \quad \dot{\beta} = \omega_2 - \omega_1 + \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}, \quad \dot{\Phi} = \omega_2 - \frac{\omega_3}{1 + \mu} + \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\omega_1 = \frac{I}{A}, \quad \omega_2 = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3}, \quad \omega_3 = \left(\frac{f}{b^3} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) описывают движение шара как твердого тела в классической ограниченной задаче трех тел в классе квазикруговых орбит.

При $\varepsilon \neq 0$, согласно методу разделения движений [1], после затухания собственных колебаний вязкоупругого шара решение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ищется в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \dots$$

При этом множители Лагранжа λ_1 и λ_2 также необходимо искать в виде разложений по степеням ε

$$\lambda_1(t) = \lambda_{10}(t) + \varepsilon \lambda_{11}(t) + \dots$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_{20}(t) + \varepsilon \lambda_{21}(t) + \dots$$

Уравнение для функции $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ примет вид

$$\int_V \left[\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{I}{A} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} \right) - \rho \frac{I^2}{A^2} \mathbf{r} + \rho \frac{I^2}{A^2} (\mathbf{e}_3, \mathbf{r}) \mathbf{e}_3 + F_1 \mathbf{r} - F_2(\xi_0, \mathbf{r}) \xi_0 - \right.$$

$$-F_3[(\xi_0, \mathbf{r})\xi_1 + (\xi_1, \mathbf{r})\xi_0] - F_4(\xi_1, \mathbf{r})\xi_1 + \lambda_{10}]\delta \mathbf{u} dx + \\ + \varepsilon (\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E}[\mathbf{u}_1] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}_1], \delta \mathbf{u}) + \int_{\partial V} (\lambda_{20} \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma = 0 \quad (2.7)$$

При получении последнего интеграла в формуле (2.7) была использована теорема Остроградского – Гаусса

$$\int_V \lambda_{20} \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} dx = \int_{\partial V} (\delta \mathbf{u} \times \lambda_{20}) \mathbf{n} d\sigma$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности шара ∂V . Дифференцирование по времени в (2.7) производится в силу "невозмущенной" системы (2.5), поэтому в уравнении (2.7)

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{I}{A} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} \right) = 0$$

Так как работа упругих и диссипативных сил на бесконечно малых поворотах равна нулю, то, положив в (2.7) $\delta \mathbf{u} = \delta \alpha \times \mathbf{r}$, получим

$$\int_{\partial V} (\lambda_{20} \times \mathbf{n}) (\delta \alpha \times \mathbf{r}) d\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^3 (\lambda_{20}, \delta \alpha) = 0, \quad \forall \delta \alpha \in E^3$$

откуда следует, что $\lambda_{20} = 0$. Далее, полагая $\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in E^3$, получим из (2.7), что $\lambda_{10} = 0$.

Таким образом, уравнение для функции $\mathbf{u}_1$ первого приближения примет вид

$$\varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1] = \rho \frac{I^2}{A^2} \mathbf{r} - \rho \frac{I^2}{A^2} (\mathbf{r}, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 - F_1 \mathbf{r} + F_2(\xi_0, \mathbf{r})\xi_0 + \\ + F_3[(\xi_0, \mathbf{r})\xi_1 + (\xi_1, \mathbf{r})\xi_0] + F_4(\xi_1, \mathbf{r})\xi_1 \quad (2.8)$$

Здесь

$$\varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}] = -\frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \right)$$

Граничные условия для функции $\mathbf{u}_1$ состоят в равенстве нулю напряжений на поверхности шара

$$\sigma_n = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) может быть представлено в форме

$$\varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1] = \frac{2}{3} \rho \omega_1^2 \mathbf{r} + \frac{1}{3} \rho \omega_1^2 B_1 \mathbf{r} + B_2 \mathbf{r} \quad (2.10)$$

$$B_1 = \operatorname{diag}\{1; 1; -2\}$$

$$B_2 \mathbf{r} = -F_1 \mathbf{r} + F_2(\xi_0, \mathbf{r})\xi_0 + F_3[(\xi_0, \mathbf{r})\xi_1 + (\xi_1, \mathbf{r})\xi_0] + F_4(\xi_1, \mathbf{r})\xi_1$$

$$B_2^T = B_2, \operatorname{tr} B_2 = -3F_1 + F_2 + 2F_3 \cos \Phi + F_4 = 0$$

Матрицы операторов B_1, B_2 являются симметричными матрицами с нулевым следом.

Так как уравнение (2.10) линейно, то его решение можно представить в виде суммы трех функций

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{13} \quad (2.11)$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_{11}] = \frac{2}{3} \rho \omega_1^2 \mathbf{r}, \quad \varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_{12}] = \frac{1}{3} \rho \omega_1^2 B_1 \mathbf{r}, \quad \varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_{13} + \chi \dot{\mathbf{u}}_{13}] = B_2 \mathbf{r} \quad (2.12)$$

и граничным условиям (2.9)

Решения уравнений (2.12) имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{11} &= -\frac{2}{3}\rho\omega_1^2[d_1\mathbf{r}^2 + d_2]\mathbf{r} \\ \mathbf{u}_{12} &= \frac{1}{3}\rho\omega_1^2\mathbf{u}_{120}, \mathbf{u}_{13} \approx \left(1 - \chi\frac{d}{dt}\right)\mathbf{u}_{130} \\ \mathbf{u}_{1j0} &= a_1(B_{j-1}\mathbf{r}, \mathbf{r})\mathbf{r} + a_2\mathbf{r}^2 B_{j-1}\mathbf{r} + a_3 B_{j-1}\mathbf{r}, \quad j = 2, 3 \\ d_1 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(4-3\nu)}, \quad d_2 = -\frac{(3-\nu)(1-2\nu)}{2(4-3\nu)}r_0^2 \\ a_1 &= \frac{1+\nu}{5\nu+7}, \quad a_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7}, \quad a_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7}r_0^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функция $\mathbf{u}_{13}$ представлена двумя первыми членами степенного ряда по χ в предположении, что $|\chi\omega_k| \ll 1$ ($k = 1, 2, 3$). Дифференцирование по времени в выражении для функции $\mathbf{u}_{13}$ производится в силу "невозмущенной" системы (2.5).

Найденное решение

$$\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1 = \varepsilon(\mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{13})$$

описывает вынужденные колебания вязкоупругого шара. Согласно асимптотическому методу разделения движений [1], необходимо далее подставить это решение в правые части уравнений (2.3). При выполнении указанной процедуры приходится неоднократно вычислять тройные интегралы по области V . Сформулируем ряд утверждений, помогающих существенно упростить эти вычисления.

Лемма 2. Если

$$\mathbf{u} = -c(d_1\mathbf{r}^2 + d_2)\mathbf{r}$$

то

$$\int_V (\mathbf{r}, \mathbf{u})dx = 3cD_1, \quad \int_V (\mathbf{P}, \mathbf{r})(\mathbf{Q}, \mathbf{u})dx = cD_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}); \quad D_1 = \frac{8}{105}\pi r_0^7(1-2\nu)$$

где $c, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ – постоянные, не зависящие от $\mathbf{r}$.

Лемма 3. Если

$$\mathbf{u} = c[a_1(B\mathbf{r}, \mathbf{r})\mathbf{r} + a_2\mathbf{r}^2 B\mathbf{r} + a_3 B\mathbf{r}]$$

где B – симметричная матрица с нулевым следом, то

$$(\mathbf{P}, \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u}dx) = 0, \quad \int_V (\mathbf{r}, \mathbf{u})dx = 0$$

$$\int_V (\mathbf{P}, \mathbf{r})(\mathbf{Q}, \mathbf{u})dx = cD_2(B\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad D_2 = \frac{4\pi r_0^7(1+\nu)(9\nu+13)}{105(5\nu+7)}$$

причем $c, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, B$ не зависят от $\mathbf{r}$.

Доказательство лемм 2 и 3 проводится путем непосредственных вычислений интегралов по шару.

В результате подстановки решения $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1$ в уравнения (2.3) получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций I, Λ, Φ, β , содержащая малые параметры ε, χ, μ , которая определяет влияние вынужденных колебаний вязкоупругого шара на его поступательно-вращательное движение. Ввиду громоздкости этих уравнений представим их в общем виде:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= P_1, \quad \dot{\Lambda} = P_2, \quad \dot{\Phi} = P_3, \quad \dot{\beta} = P_4 \\ P_k &= P_k(I, \Lambda, \Phi, \varepsilon, \chi, \mu), \quad k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Правые части системы (2.14) 2π -периодичны по переменной Φ и не зависят от переменной β , поэтому четвертое уравнение (2.14) отделяется от уравнений этой системы и может быть проинтегрировано после определения функций I , Λ , Φ из первых трех уравнений. На следующем шаге систему первых трех уравнений (2.14) будем рассматривать как систему с малым параметром μ при фиксированных значениях ε , χ . При $\mu = 0$ получим

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 18\varepsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^4 (\omega_2 - \omega_1) \\ \dot{\Lambda} &= -18\varepsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^4 (\omega_2 - \omega_1) \\ \dot{\Phi} &= \omega_2 - \omega_3 + 6\varepsilon\chi D_2 \rho^2 \Lambda^{-1} \omega_2^2 (\omega_1^2 + 6\omega_2^2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Система (2.15) имеет решение

$$I = I(0), \quad \Lambda = \Lambda(0), \quad \Phi = \omega t + \Phi(0)$$

$$\omega = \omega_2 - \omega_3 + 6\varepsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^2 (\omega_1^2 + 6\omega_2^2) / \Lambda(0)$$

причем начальные значения $I(0)$ и $\Lambda(0)$ связаны соотношением

$$I(0)/\Lambda = f^2 m^3 / (\Lambda(0))^3$$

Примем это движение за невозмущенное. Оно соответствует режиму гравитационной стабилизации шара на круговой орбите.

Решение первых трех уравнений (2.14) будем искать в виде разложений [1, 8]

$$I = J_1 + \mu N_{11}(J, \psi) + \mu^2 N_{12}(J, \psi) + \dots, \quad \Lambda = J_2 + \mu N_{21}(J, \psi) + \mu^2 N_{22}(J, \psi) + \dots$$

$$\Phi = \psi + \mu M_1(J, \psi) + \mu^2 M_2(J, \psi) + \dots, \quad J = (J_1, J_2), \quad \omega_1(J_1) = \omega_2(J_2)$$

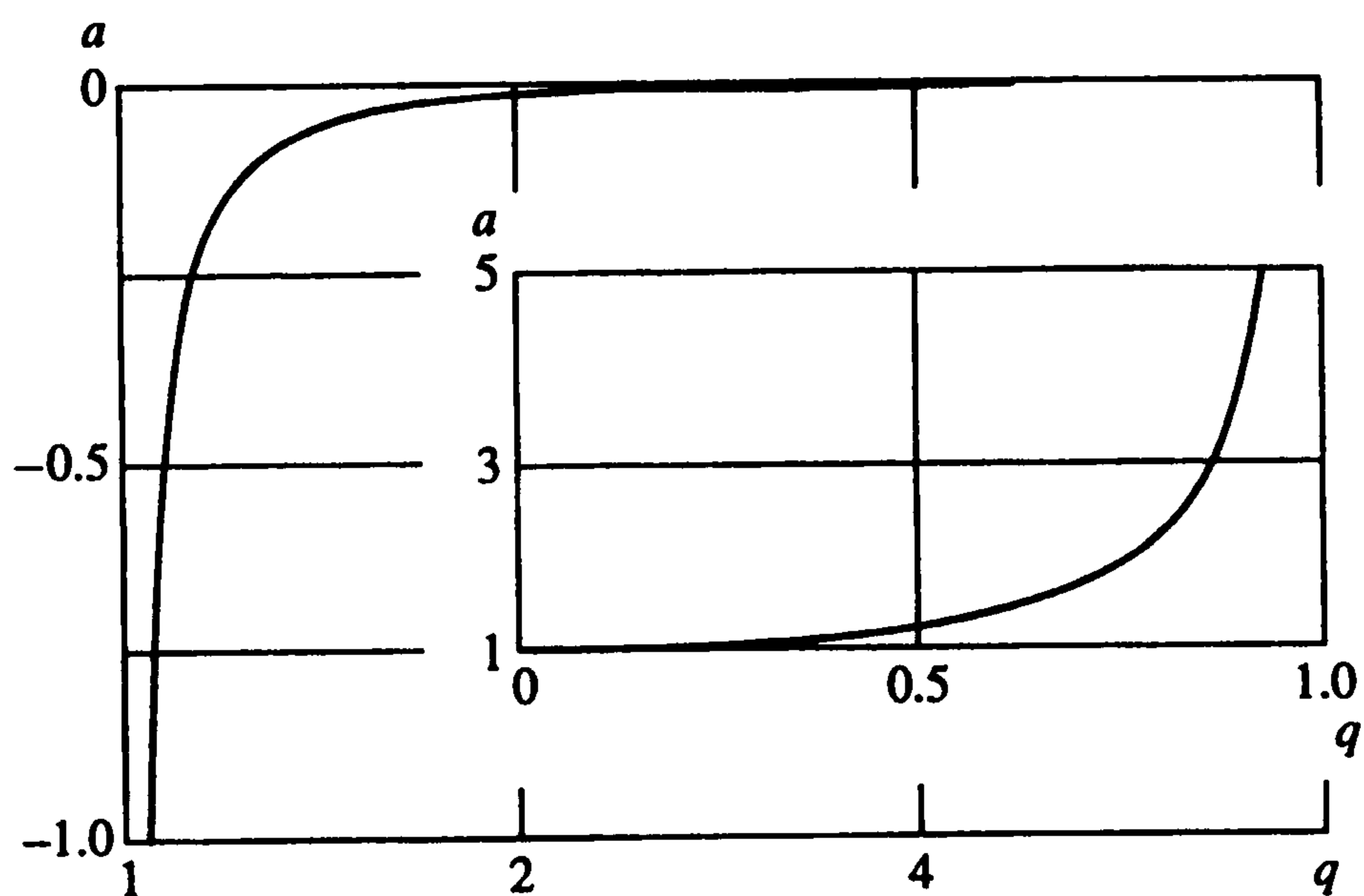
где функции N_{1k} , N_{2k} , M_k ($k = 1, 2, \dots$) 2π -периодичны по переменной ψ и имеют нулевое среднее по этой переменной.

Как функции времени, J_1 , J_2 , ψ задаются дифференциальными уравнениями

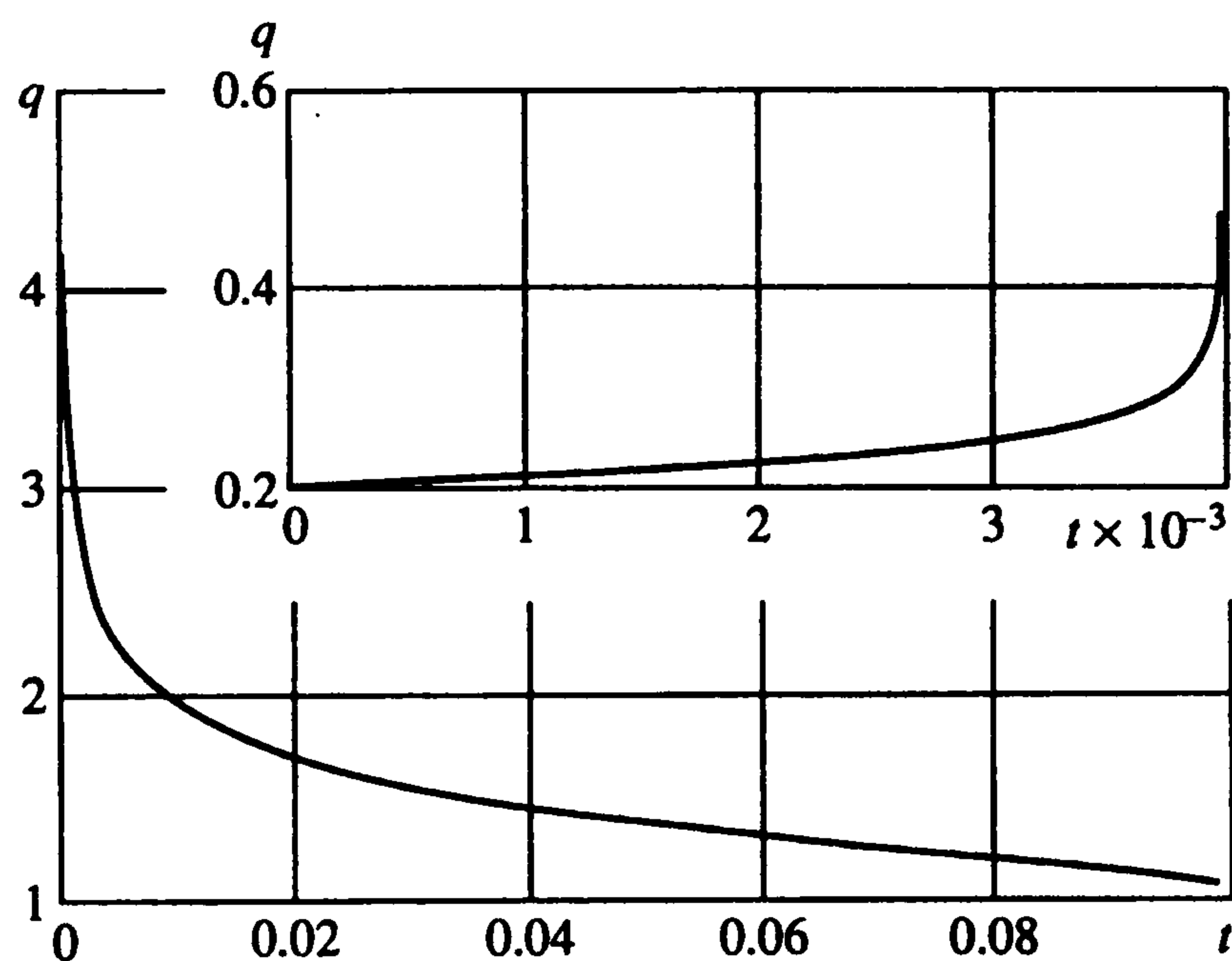
$$\dot{J}_1 = \mu A_{11}(J) + \dots, \quad \dot{J}_2 = \mu A_{21}(J) + \dots, \quad \dot{\psi} = \omega(J) + \mu B_1(J) + \dots$$

Уравнения первого приближения для медленных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11} + \frac{\partial N_{11}}{\partial \psi} \omega &= -2\varepsilon\chi D_2 \left\{ f_{20} \frac{\partial}{\partial \psi} (f_{31} \sin \psi + f_{41} \sin \psi \cos \psi) (\omega_2 - \omega_3) - \right. \\ &\quad \left. - f_{20}^2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial J_2} N_{21} - \frac{\partial \omega_1}{\partial J_1} N_{11} + \frac{\partial f_{01}}{\partial J_2} \right) \right\} \\ A_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \psi} \omega &= -\frac{\partial f_{01}}{\partial \psi} + \varepsilon D_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \rho \omega_1^2 f_{11} + \frac{2}{3} f_{20} f_{21} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} f_{20} f_{31} \cos \psi + f_{20} f_{41} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos 2\psi \right) \right\} + \\ &\quad + 2\varepsilon\chi D_2 \left\{ f_{20} \frac{\partial}{\partial \psi} (f_{31} \sin \psi + f_{41} \sin \psi \cos \psi) (\omega_2 - \omega_3) - \right. \\ &\quad \left. - f_{20}^2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial J_2} N_{21} - \frac{\partial \omega_1}{\partial J_1} N_{11} + \frac{\partial f_{01}}{\partial J_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Для определения функций $A_{11}(J)$ и $A_{21}(J)$ необходимо усреднить правые части системы (2.16) по угловой переменной ψ . В результате получим

$$A_{11} = -A_{21} = 2\epsilon\chi D_2 f_{20}^2 \left\langle \frac{\partial f_{01}}{\partial J_2} \right\rangle \left(\langle \cdot \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) d\psi \right)$$

Приближенные уравнения, описывающие эволюцию переменных I и Λ , выглядят следующим образом:

$$\dot{J}_1 = -\dot{J}_2 = 36\epsilon\chi\mu\rho^2 D_2 \omega_2^5 a(q) \quad (2.17)$$

$$a(q) = \left\langle \frac{1 - q \cos \psi}{(1 - 2q \cos \psi + q^2)^{3/2}} \right\rangle, \quad \omega_2 = \frac{f^2 m^3}{J_2^3}, \quad q = \frac{b}{R} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^{2/3} = \frac{f m^2 b}{J_2^2}$$

Из (2.17) для безразмерной переменной q при учете соотношений

$$J_2 = m \sqrt{\frac{fb}{q}}, \quad \dot{q} = -\frac{2q}{J_2} \dot{J}_2$$

получим дифференциальное уравнение

$$\dot{q} = \varepsilon \chi \mu n q^9 a(q), \quad n = \frac{72 \rho^2 f^2 D_2}{m b^8} > 0 \quad (2.18)$$

Графики функции $a(q)$ представлены на фиг. 2. При $q = 1$ интеграл, определяющий функцию $a(q)$, расходится. Так как $\dot{q} = -bR^{-2}\dot{R}$, то $\dot{R} < 0$ при $R > b$ и $\dot{R} > 0$ при $R < b$. Это означает, что орбита деформированного вязкоупругого шара приближается к орбите тела массы μ . В процессе этого приближения угловая скорость ω_2 стремится к угловой скорости ω_3 , и переменная Φ перестает быть быстрой, что не позволяет использовать принятую выше схему асимптотического метода.

На фиг. 3 представлены графики функции $q = q(t)$, полученные в результате интегрирования уравнения (2.18) в предположении, что коэффициент $\varepsilon \chi \mu n = 1$. Если в начальный момент времени $q(0) > 1$ (внутренние планеты), то q убывает и стремится к единице, а если $q(0) < 1$, то q возрастает и также стремится к единице. При приближении q к единице скорость эволюции увеличивается, так как соответствующий интеграл в правой части уравнения (2.18) расходится при $q = 1$.

Если ω_2 и ω_3 близки друг к другу, то это означает, что деформированный шар в процессе движения по орбите периодически сближается с телом массы μ и возникает проблема их взаимного захвата с образованием двойной планетной системы, подобной системе Земля – Луна. В Солнечной системе примером такой ситуации может служить система Солнце – Юпитер, а деформируемые планеты – многочисленные спутники Юпитера, пережившие в процессе эволюции своих орбитальных движений вокруг Солнца захват Юпитером. Эти же соображения могут быть отнесены к системе Солнце – Сатурн с многочисленными спутниками у последнего.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00253).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 1997. Ч. 1. 215 с.; Ч. 2. 160 с.
2. Белецкий В.В. Движение спутника около центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
3. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.
4. Татарinov Я.В. Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ, 1984. 295 с.
5. Вильке В.Г., Марков Ю.Г. Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты в центральном поле сил // Астрон. журн. 1988. Т. 65. Вып. 4. С. 861–867.
6. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 404 с.
7. Love A. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. = Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
8. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.