

УДК 531.36

© 2000 г. А.А. Буров, М. Паскаль, С.Я. Степанов

ГИРОСКОПИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕУГОЛЬНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Исследуется гироскопическая устойчивость треугольных решений в обобщенной плоской задаче трех тел (материальных точек), отличающейся от классической задачи трех тел добавлением безмассового эластичного троса, связывающего два из трех тел. Показано, что при малой жесткости троса и существенно неравных массах связанных тел треугольные движения устойчивы при любых значениях остальных параметров системы.

Гироскопическая устойчивость рассматриваемых движений в случае жесткой связки и равных масс связанных тел исследовалась ранее [1]; в частности, была приведена диаграмма распределения областей гироскопической устойчивости, которая показывает, что в спутниковой области параметров системы треугольные решения неустойчивы и поэтому представляют ограниченный интерес для космической практики.

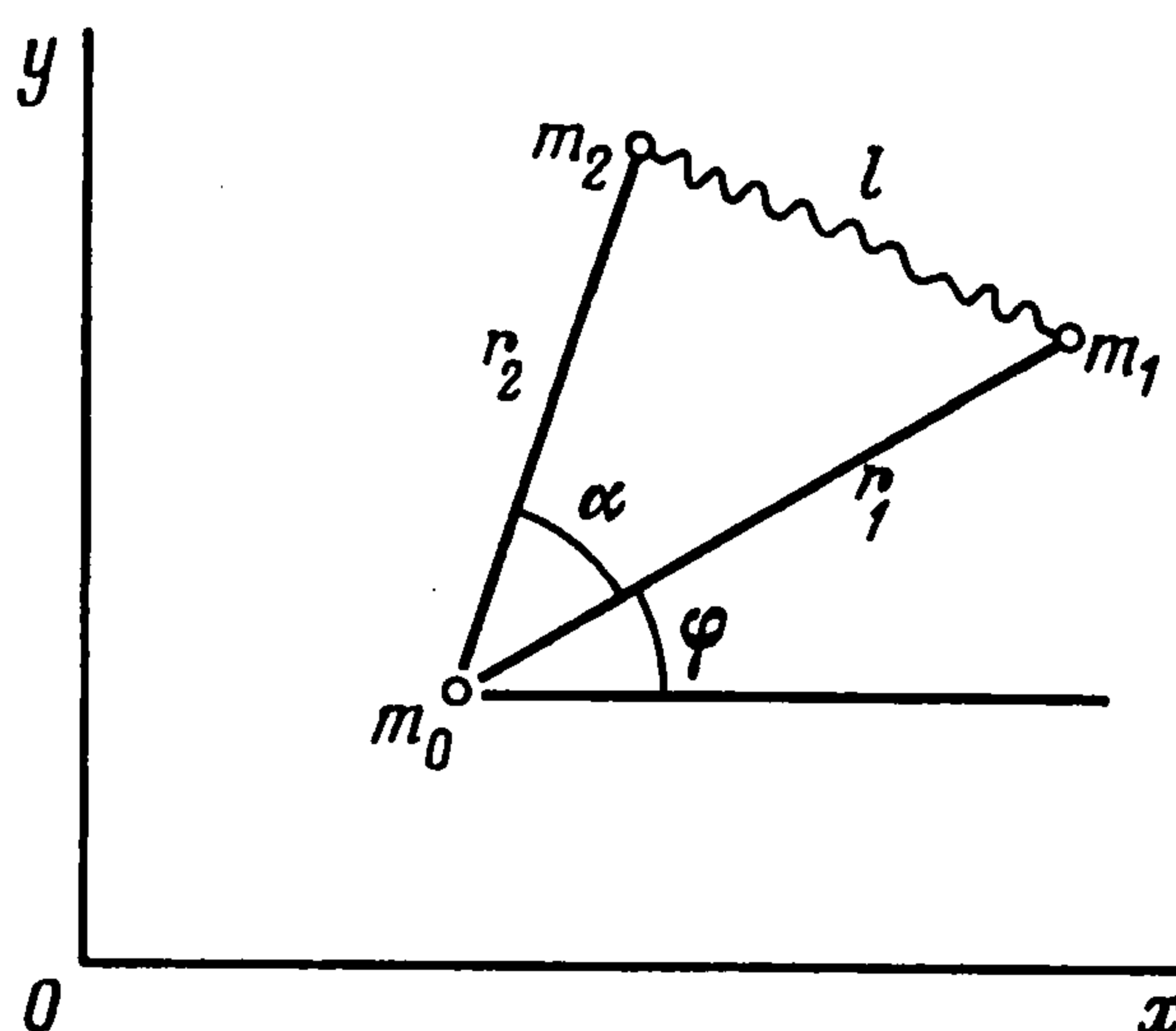
В предлагаемом исследовании жесткая связка заменяется на упругую и прослеживается изменение этой диаграммы в зависимости от коэффициента упругости троса и соотношения величин концевых масс. Оказывается, что при уменьшении жесткости троса область гироскопической устойчивости увеличивается, смещается в сторону области параметров, характерных для спутников, и при значении коэффициента упругости, меньшем некоторого критического значения, накрывает эту область. Таким образом, при достаточной эластичности связки треугольные движения могут представлять интерес при проектировании двухмассовых тросовых спутниковых систем. Положительное влияние на устойчивость оказывает и неравенство масс связанных тел. При существенно неравных массах и достаточно малой жесткости троса треугольные движения становятся гироскопически устойчивыми при любых значениях остальных параметров.

Без учета взаимного ньютоновского тяготения связанных тел расчетное натяжение троса оказывается положительным. На первый взгляд, отсюда следует, что соединение может быть реализовано при помощи троса. Однако при дополнительном учете ньютоновского тяготения между этими телами натяжение оказывается положительным только при достаточно большой длине троса. Для меньших длин натяжение отрицательно, и для физической реализации связи в этом случае на концах троса нужно использовать малые реактивные двигатели (например, баллончики со сжатым газом), создающие две равные постоянные растягивающие силы, действующие вдоль троса.

Изучалась [2] устойчивость и бифуркация стационарных движений в плоской задаче двух материальных точек, связанных безмассовой пружиной, в центральном ньютоновском поле тяготения. Рассматривались [3] пространственные стационарные движения такой системы, причем получены достаточные условия устойчивости одной из прямолинейных конфигураций. Были получены [4] достаточные и необходимые условия устойчивости стационарных движений в постановке, принятой в предлагаемой статье.

В некоторых работах (см., например, [5] и ссылки в ней) обсуждался вопрос о построении управлений, обеспечивающих соединение элементов протяженных орбитальных конструкций с помощью создания искусственных сил, имитирующих упругие и вязкоупругие силы.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть три материальные точки с массами m_0 , m_1 и m_2 движутся в неподвижной плоскости, определяемой системой коор-



Фиг. 1

динат Oxy (фиг. 1), (x, y) – координаты точки m_0 , r_1, r_2 – расстояния от точки m_0 до точек m_1, m_2 , φ – угол между осью Ox и вектором m_0m_1 и α – угол между m_0m_1 и m_0m_2 . Координаты точек m_1 и m_2 определяются формулами $(x + r_1c_1, y + r_1s_1)$ и $(x + r_2c_2, y + r_2s_2)$, где

$$c_1 = \cos \varphi, \quad c_2 = \cos(\varphi + \alpha), \quad s_1 = \sin \varphi, \quad s_2 = \sin(\varphi + \alpha), \quad c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha$$

Для обобщенных скоростей введем обозначения

$$u_1 = \dot{x}, \quad u_2 = \dot{y}, \quad u_3 = \dot{\varphi}, \quad v_1 = \dot{r}_1, \quad v_2 = \dot{r}_2, \quad v_3 = \dot{\alpha}$$

Удвоенная кинетическая энергия системы, потенциальная энергия взаимодействия точек m_1, m_2 и потенциальная энергия взаимодействия точки m_0 с m_1 и m_2 имеют вид

$$2T = m_0(u_1^2 + u_2^2) + m_1[(v_1 + u_1c_1 + u_2s_1)^2 + (u_3r_1 - u_1s_1 + u_2c_1)^2] + \\ + m_2[(v_2 + u_1c_2 + u_2s_2)^2 + ((u_3 + v_3)r_2 - u_1s_2 + u_2c_2)^2] \quad (1.1)$$

$$E = E(l), \quad \Pi = -\gamma m_0(m_1/r_1 + m_2/r_2); \quad l = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2c}$$

Здесь γ – постоянная ньютоновского тяготения, l – расстояние между точками m_1 и m_2 .

В дальнейшем функцию $E(l)$ не конкретизируем. Достаточно знать значения ее первой и второй производных (E' и E'') по l . Поэтому все результаты могут интерпретироваться в терминах произвольного силового взаимодействия между телами m_1 и m_2 . В частности, если $E = -\gamma m_1 m_2 / l$, то будем иметь классическую задачу трех взаимно гравитирующих тел. В этом случае величина E'' отрицательна. Таким образом, имеет смысл рассматривать как положительные, так и отрицательные значения E'' . Однако в данном исследовании ограничиваемся случаем $E'' \geq 0$.

Кинетическая и потенциальные энергии не зависят явно от x, y , поэтому уравнения движения системы допускают циклические интегралы, выражающие сохранение количества движения системы,

$$\partial T / \partial u_1 = m u_1 - (m_1 r_1 s_1 + m_2 r_2 s_2) u_3 + m_1 c v_1 + m_2 c v_2 - m_2 r_2 s_2 v_3 = 0 \\ \partial T / \partial u_2 = m u_2 + (m_1 r_1 c_1 + m_2 r_2 c_2) u_3 + m_1 s_1 v_1 + m_2 s_2 v_2 + m_2 r_2 c_2 v_3 = 0 \quad (1.2)$$

где $m = m_0 + m_1 + m_2$ – масса всей системы. Без ограничения общности мы положили постоянные интегралов равными нулю, предполагая, что система координат Oxy поступательно движется вместе с центром масс системы.

Следуя методу Рауса, исключим циклические скорости u_1 и u_2 . Для этого разрешим линейную систему (1.2) относительно u_1 и u_2 и подставим это решение в T . Получим

$$2T^* = Ju_3^2 + 2g_4u_3(r_2v_1 - r_1v_2) + 2(g_2r_2 - g_3r_1)r_2u_3v_3 + g_1v_1^2 + g_2(v_2^2 + r_2^2v_3^2) - 2g_3v_1v_2 + 2g_4r_2v_1v_3 \quad (1.3)$$

$$J = g_1r_1^2 + g_2r_2^2 - 2g_3r_1r_2$$

$$g_1 = \frac{m_1(m_0 + m_2)}{m} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad g_3 = \frac{m_1m_2}{m}c, \quad g_4 = \frac{m_1m_2}{m}s$$

Здесь и далее символ $(1 \leftrightarrow 2)$ означает наличие еще одного соотношения, отличающегося круговой перестановкой индексов 1 и 2.

Величина T^* соответствует кинетической энергии приведенной системы, равной кинетической энергии относительного движения материальных точек m_0, m_1, m_2 в кёниговой системе координат Gx с началом в центре масс G системы, а J – момент инерции системы относительно центра масс G .

В приведенной системе u_3 становится циклической скоростью. Ей отвечает циклический интеграл, выражающий сохранение момента количеств движений точек системы относительно центра масс G

$$\partial T^* / \partial u_3 = Ju_3 + g_4(r_2v_1 - r_1v_2) + (g_2r_2 - g_3r_1)r_2v_3 = p \quad (1.4)$$

откуда

$$Ju_3 = p - g_4(r_2v_1 - r_1v_2) - (g_2r_2 - g_3r_1)r_2v_3 \quad (1.5)$$

Проигноруем по методу Рауса циклическую скорость u_3 . Для этого введем функцию

$$T^{**} = T^* - \frac{\partial T^*}{\partial u_3}u_3 = T^* \Big|_{u_3=0} - T^* \Big|_{v_1=v_2=v_3=0} = \frac{g_1}{2}v_1^2 + \frac{g_2}{2}(v_2^2 + r_2^2v_3^2) - g_3v_1v_2 + g_4r_2v_1v_3 - \frac{J}{2}u_3^2 \quad (1.6)$$

В последний член формулы (1.6) вместо циклической скорости u_3 должно быть подставлено ее значение из формулы (1.5).

Составляя функцию Рауса

$$R = T^{**} - \Pi - E \quad (1.7)$$

уравнения движения запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial v_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad q = (r_1, r_2, \alpha) \quad (1.8)$$

Функцию R можно представить в виде суммы $R = R_2 + R_1 + R_0$, где R_i – однородные относительно позиционных скоростей v_1, v_2, v_3 формы степени однородности i . В терминах приведенной системы можно сказать, что член R_2 представляет кинетическую энергию, $(-R_0)$ – измененную потенциальную энергию W , т.е.

$$W = -R_0 = \frac{p^2}{2J} + \Pi + E(l) \quad (1.9)$$

а линейный член R_1 определяет гироскопические силы.

Уравнения движения (1.8) допускают интеграл Пенлеве – Якоби $R_2 + W = h$.

2. Стационарные движения. На основании теоремы Рауса стационарные движения определяются как критические точки измененной потенциальной энергии W , т.е. как решения системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial r_1} &= -\frac{p^2}{J^2} \left[\frac{m_0 m_1}{m} r_1 + \frac{m_1 m_2}{m} (r_1 - r_2 c) \right] + \\ &+ \gamma \frac{m_0 m_1}{r_1^2} + \frac{r_1 - r_2 c}{l} E' = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= -\frac{p^2}{J^2} \frac{m_1 m_2}{m} r_1 r_2 s + \frac{r_1 r_2}{l} E' s = 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Эти уравнения допускают треугольные решения, для которых точки m_1 и m_2 одинаково удалены от точки m_0 и

$$E' = \frac{m_1 m_2}{m} \frac{p^2 l}{J^2}, \quad r_1 = r_2 = r = \frac{p^2}{m \gamma (g_1 + g_2 - 2g_3)^2} \quad (2.2)$$

Если $E' = -\gamma m_1 m_2 / l^3$, т.е. точки m_1 и m_2 притягиваются по закону всемирного тяготения, то $r = l$ и решение совпадает с классическим треугольным лагранжевым решением.

3. Необходимые условия устойчивости. Уравнения в вариациях запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_i} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi_i} = 0; \quad \tilde{R} = \frac{1}{2} v^T A v + v^T D \xi - \frac{1}{2} \xi^T C \xi \quad (3.1)$$

где $\tilde{R}$ – квадратичная часть функции Рауса R по отношению к относительным скоростям v_1, v_2, v_3 и отклонениям $\xi_i = q_i - q_i^0$ переменных q_i от их значений q_i^0 в невозмущенном стационарном движении, C – матрица квадратичной части $\tilde{W}$ измененной потенциальной энергии W относительно отклонений ξ_1, ξ_2, ξ_3 , т.е.

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \xi^T C \xi = \frac{1}{2} \delta^2 W = \frac{1}{2} \left(p^2 \delta^2 \frac{1}{2J} + \delta^2 \Pi + \delta^2 E \right) \quad (3.2)$$

Для вычисления элементов c_{ij} ($c_{ij} = c_{ji}$) матрицы C выпишем вспомогательные формулы для вариаций некоторых функций, входящих в соотношение (3.2). Введем обозначения

$$\begin{aligned}J_1 &= g_1 r_1 - g_3 r_2 \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad J_3 = g_4 r_1 r_2 \\ l_1 &= r_1 - r_2 c \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad l_3 = r_1 r_2 s\end{aligned}$$

Тогда (здесь и всюду далее ведется суммирование по повторяющемуся индексу от 1 до 3)

$$\begin{aligned}\delta J &= 2J_i \xi_i, \quad \delta^2 J = 2\xi_i \delta J_i; \quad l \delta l = l_i \xi_i, \quad l^3 \delta^2 l = l^2 \xi_i \delta l_i - (l \delta l)^2 \\ \delta J_1 &= g_1 \xi_1 - g_3 \xi_2 + g_4 r_2 \xi_3 \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \delta J_3 = g_4 r_2 \xi_1 + g_4 r_1 \xi_2 + g_3 r_1 r_2 \xi_3 \\ \delta l_1 &= \xi_1 - c \xi_2 + r_2 s \xi_3 \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \delta l_3 = r_2 s \xi_1 + r_1 s \xi_2 + r_1 r_2 c \xi_3 \\ J^3 \delta^2 \frac{1}{2J} &= (\delta J)^2 - \frac{J}{2} \delta^2 J, \quad \delta^2 E = \left(\frac{E''}{l^2} - \frac{E'}{l^3} \right) (l \delta l)^2 + \frac{E'}{l} \xi_i \delta l_i\end{aligned}\quad (3.3)$$

Подставляя полученные выражения для δJ , $\delta^2 J$, $l \delta l$ и δl_1 , δl_2 , δl_3 в последнюю

формулу (3.3) и затем в (3.2), находим

$$\begin{aligned}
c_{11} &= p'(4J_1^2 - Jg_1) + e' + e''l_1^2 - 2\gamma m_0 m_1 / r_1^3 \quad (1 \leftrightarrow 2) \\
c_{33} &= p'(4J_3^2 - Jg_3 r_1 r_2) + e' r_1 r_2 c + e''l_3^2 \\
c_{12} &= p'(4J_1 J_2 + Jg_3) - e'c + e''l_1 l_2 \\
c_{13} &= p'(4J_1 J_3 - Jg_4 r_2) + e' r_2 s + e''l_1 l_3 \quad (1 \leftrightarrow 2) \\
p' &= p^2 / J^3, \quad e' = E' / l, \quad e'' = (E'' - e') / l^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Матрицы A и D определяются из выражений R_2 и R_1 , получаемых из формул (1.7) и (1.6):

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} Jg_1 - g_4^2 r_2^2 & -Jg_3 + g_4^2 r_1 r_2 & J_1 J_3 \\ -Jg_3 + g_4^2 r_1 r_2 & Jg_2 - g_4^2 r_1^2 & J_2 J_3 \\ J_1 J_3 & J_2 J_3 & Jg_2 r_2^2 - J_2^2 r_2^2 \end{vmatrix} \\
D &= \frac{p}{J^2} \begin{vmatrix} -2J_1 g_4 r_2 & -2J_2 g_4 r_2 + Jg_4 & -2J_3 g_4 r_2 + Jg_3 r_2 \\ 2J_1 g_4 r_1 - Jg_4 & 2J_2 g_4 r_1 & 2J_3 g_4 r_1 - Jg_3 r_1 \\ -2J_1 J_2 r_2 - Jg_3 r_2 & -2J_2^2 r_2 + J(J_2 + g_2 r_2) & -2J_2 J_3 r_2 + Jg_4 r_1 r_2 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

В матричной форме уравнения (3.1) принимают вид

$$A\ddot{\xi} + B\dot{\xi} + C\xi = 0$$

$$B = D - D^T = 2 \frac{m_0 m_1 m_2 p}{mJ^2} r_1 r_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Характеристическое уравнение приводится к виду

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0; \quad z = \lambda^2 \tag{3.6}$$

$$a_0 = \det A, \quad a_3 = \det C, \quad a_1 = c_{ij} A_{ij} + a_{ij} B_{ij}, \quad a_2 = a_{ij} C_{ij} + c_{ij} B_{ij}$$

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} матриц A, B, C .

Для устойчивости необходимо, чтобы все корни уравнения (3.6) относительно переменной z были действительными и отрицательными. Проверка производилась с помощью рядов Штурма для интервала $(-\infty, 0)$. Если число действительных корней в этом интервале равно трем, стационарное движение устойчиво в линейном приближении. Это условие приводится к неравенствам

$$\begin{aligned}
a_2 &> 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 = a_1^2 - 3a_0 a_2 > 0 \\
a_5 &= a_1 a_2 - 9a_0 a_3 > 0, \quad a_6 = a_5(4a_1 a_4 - 3a_0 a_5) - 4a_2 a_4^2 > 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Если левая часть хотя бы одного из неравенств (3.7) отрицательна, стационарное движение неустойчиво. Нетрудно убедиться, что среди условий (3.7) неравенства $a_4 > 0, a_5 > 0$ не являются независимыми и могут быть отброшены.

4. Анализ необходимых условий устойчивости. Необходимые условия устойчивости (3.7) треугольных стационарных движений, определяемых формулами (2.2), зависят от девяти параметров $r, \alpha, m_0, m_1, m_2, \gamma, p, E', E''$. Число параметров можно сократить, перейдя к безразмерным величинам путем специального выбора единиц измерения, зависящих от части этих параметров. Для простоты за безразмерными величинами

сохраним старые обозначения размерных величин, а размерные величины будем обозначать с чертой сверху. Выберем в качестве единиц массы $\bar{M}$, времени $\bar{T}$ и длины $\bar{L}$ величины

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2, \quad \bar{T} = 1/\bar{\omega} = \bar{J}/\bar{p}, \quad \bar{L} = \bar{r} = \bar{T}^2/(\bar{m}\bar{\gamma})$$

где $\bar{\omega}$ – угловая скорость стационарного вращения всей системы как твердого целого в рассматриваемом стационарном движении. При таком выборе единиц измерения безразмерные параметры m_2, p, γ можно исключить с помощью соотношений

$$m_2 = 1 - m_1, \quad p = J, \quad \gamma = 1/m$$

Параметр E' исключается с помощью первого из уравнений стационарных движений (2.2), т.е. в новых переменных

$$E' = m_1 m_2 l / m$$

Кроме того, из формул (2.2) и последних трех формул (3.4) получим

$$p' = 1/J, \quad e' = m_1 m_2 / m, \quad e'' = (E'' - e')/l^2 = (k - 1)e' / l^2$$

где $k = E''/e'$ – величина E'' , масштабированная величиной e' .

После этого в условиях устойчивости (3.7) остается четыре безразмерных параметра α, m_0, m_1 и k . В результате все формулы упростятся. Например, элементы матрицы C (3.4) примут вид

$$c_{11} = 4J_1^2 / J + e''l_1^2 - 3m_0m_1 / m \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad c_{33} = 4J_3^2 / J + e''l_3^2$$

$$c_{12} = 4J_1J_2 / J + e''l_1l_2, \quad c_{13} = 4J_1J_3 / J + e''l_1l_3 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

Здесь

$$J = g_1 + g_2 - 2g_3, \quad J_1 = g_1 - g_3, \quad J_2 = g_2 - g_3, \quad J_3 = g_4$$

$$e'' = m_1 m_2 (k - 1) / (2ml_1), \quad m_2 = 1 - m_1, \quad m = m_0 + 1$$

$$l_1 = l_2 = 1 - \cos \alpha, \quad l_3 = \sin \alpha$$

g_1, g_2, g_3, g_4 – определяются последними тремя формулами (1.3).

Вводя обозначения $q = m_1 m_2$, после деления на общий множитель

$$[m_0 q (m_0 + 2ql_1)]^2$$

коэффициенты характеристического уравнения (3.6) приведем к виду

$$a_0 = (m_0 + 1)^2, \quad a_1 = (m_0 + 1)(2m_0 + k + 4)$$

$$a_2 = 2m_0^2 + m_0(3kl_1 - 4k - 3l_1 + 14) + 2(k - 9ql_1^2 + 18ql_1 + 3)$$

$$a_3 = 3(2 - l_1)[-m_0(k - 1) + 6ql_1(k + 3)]$$

Как показывают проведенные при $k \geq 0$ аналитические, численные и графические исследования, условия устойчивости (3.7) сводятся к двум неравенствам

$$a_3 > 0, \quad a_6 > 0 \tag{4.1}$$

где a_3 – дискриминант квадратичной части измененной потенциальной энергии $\tilde{W}$, а a_6 – дискриминант уравнения (3.6).

При графическом представлении результатов за основу берем параметры α, m_0, m_1 и k , причем

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq m_0 \leq \infty, \quad 0 \leq m_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq k \leq \infty \tag{4.2}$$

но для более компактной записи формул вместо α и m_1 используем параметры $l_1 = 1 - \cos \alpha$ и q , изменяющиеся в диапазонах

$$0 \leq l_1 \leq 2, \quad 0 \leq q \leq 1/4$$

Первое условие из (4.1) эквивалентно неравенству

$$(k-1)m_0 \leq 6(k+3)ql_1$$

В частности, при $k \leq 1$ это условие выполнено при всех значениях остальных параметров из области определения (4.2).

Левая часть второго условия имеет более сложный вид. Она представляет собой многочлен по l_1 степени 6, по m_0 степени 4, по q степени 3 и по k степени 4. Не выписывая здесь этот многочлен в развернутом виде, в дальнейшем укажем некоторые его свойства, определяющие вид области устойчивости.

5. Предельный случай. Рассмотрим предельный случай $k = \infty$, $m_1 = 1/2$ ($q = 1/4$), когда материальные точки m_1 , m_2 образуют жесткую гантель с равными массами на концах [1].

Для отображения бесконечной области возможных значений параметра m_0 ($0 < m_0 < \infty$) на конечный отрезок $[0, 2]$ вместо m_0 введем новый параметр [1]

$$\tilde{m}_0 = \begin{cases} m_0^{-1}, & m_0 > 1 \\ 2 - m_0, & m_0 \leq 1 \end{cases}$$

Таким образом, будем строить области устойчивости в прямоугольнике $\{(\alpha, \tilde{m}_0) \in [0, \pi] \times [0, 2]\}$.

В этом предельном случае условия устойчивости, получаемые из коэффициентов при старших степенях k в левых частях неравенств (4.1), принимают вид

$$m_0 < 3l_1/2, \quad m_0^2(9l_1^2 - 48l_1 + 64) + 4m_0(9l_1^2 - 21l_1 + 8) + 4(9l_1^2 - 18l_1 + 1) > 0 \quad (5.1)$$

Подставляя $m_0 = 3l_1/2$ в левую часть второго неравенства, получим

$$(81/4)(l_1 - 2/3)^4$$

Отсюда следует, что в этом предельном случае кривая $a_3 = 0$ касается кривой $a_6 = 0$ в точке

$$l_1 = 2/3 \quad (\cos \alpha = 1/3), \quad m_0 = 1$$

и за исключением этой точки целиком расположена в области $a_6 > 0$. Область устойчивости, ограниченная кривыми $a_3 = 0$ и $a_6 = 0$, на верхней части фиг. 2 заштрихована.

В принятых ранее обозначениях [1]

$$\beta^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \mu_0 = 1 + \frac{1}{m_0}$$

условия устойчивости (5.1) принимают вид

$$\mu_0 - 1 > \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \quad (5.2)$$

$$(\beta^4 - 34\beta^2 + 1)(\mu_0 - 1)^2 + 2(\beta^4 - 13\beta^2 + 4)(\mu_0 - 1) + (\beta^4 + 8\beta^2 + 16) > 0$$

Первое неравенство (5.2) совпадает с первым из условий в работе [1]. Во втором условии в работе [1] допущена неточность (в последней скобке стоит 15 вместо 16). Из-за этого в работе [1] кривые, определяющие область устойчивости, вместо того,

чтобы касаться, пересеклись в двух точках, что неверно. При этом следует отметить, что до выхода работы [1] была предварительная публикация¹ тех же авторов, в которой еще не было получено аналитического выражения второго из условий устойчивости, но на построенном численно графике явно заметно касание кривых. Второе неравенство можно переписать в разрешенном относительно $m_0 = 1/(\mu_0 - 1)$ в виде

$$m_0 > \frac{-(\beta^4 - 13\beta^2 + 4) + 12\sqrt{3}\beta\sqrt{\beta^2 + 1}}{\beta^4 + 8\beta^2 + 16}$$

6. Зависимость области устойчивости от параметров. Изучим изменение области устойчивости, построенной для случая $k = \infty$, $m_1 = 1/2$, при уменьшении параметров k и m_1 от их предельных значений ∞ и $1/2$. Области устойчивости будем изображать на той же плоскости $(\alpha, \tilde{m}_0)$ при разных фиксированных значениях параметров k и m_1 . Напомним, что k – отношение коэффициента упругости троса к величине e' , поэтому коэффициент упругости E'' при фиксированном k зависит от параметров m_1 , m_0 , α . Формула для вычисления параметра E'' приведена ниже, в разд. 7.

Подстановка значения m_0 из уравнения $a_3 = 0$, т.е.

$$m_0 = 6(k+3)(k-1)^{-1}ql_1$$

в a_6 , в общем случае, приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)^8}{9(m_0+1)^4} a_6 \Big|_{a_3=0} &= (k+2)(k-36ql_1^2+72ql_1+2) \times \\ &\times [k^3(9ql_1^2-12ql_1+1)+k^2(36q^2l_1^2+36ql_1+1)+ \\ &+k(216q^2l_1^2-27ql_1^2+84ql_1-5)+3(108q^2l_1^2+6ql_1^2-36ql_1+1)]^2 \end{aligned}$$

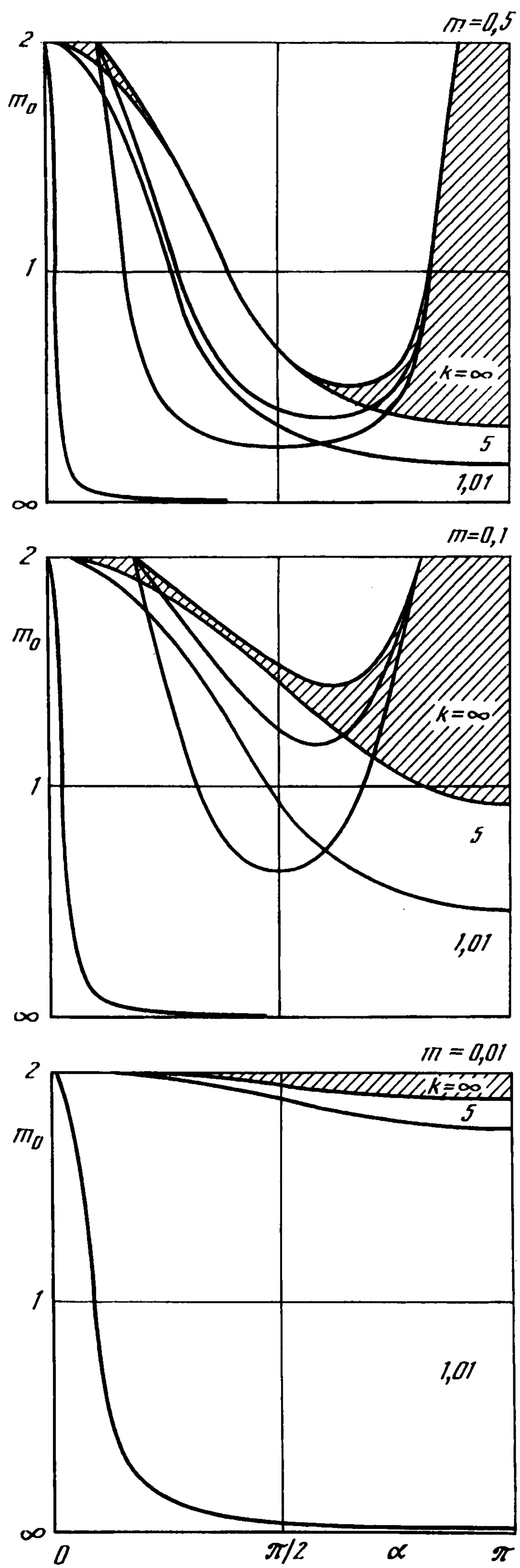
которое представляет собой произведение многочленов по k . Первые два многочлена – линейные с положительным коэффициентом при k . Третий сомножитель – квадрат многочлена третьей степени. Коэффициент при k^3 в этом многочлене представляет собой квадратный трехчлен по l_1 , в области определения параметров q и l_1 он неотрицателен и обращается в нуль только при значениях $q = 1/4$, $l_1 = 2/3$. Это следует из того, что дискриминант квадратного трехчлена, равный $9q(4q-1)$, неположителен и обращается в нуль только при $q = 1/4$ ($m_1 = 1/2$). Итак, в силу неотрицательности коэффициента при k^3 и строгой положительности коэффициента при k^2 , приходим к выводу, что за исключением случая, рассмотренного в разд. 5, при достаточно большом k кривые $a_3 = 0$ и $a_6 = 0$ не имеют общих точек.

В противоположность случаю вековой устойчивости область гироскопической устойчивости оказывается увеличивающейся с убыванием жесткости пружины. Более того, область устойчивости перемещается на диаграмме устойчивости влево и вниз, в сторону значений параметров, присущих реальным спутникам (см. фиг. 2 для $m_1 = 0,5$ и $m_1 = 0,1$; области устойчивости при $k = \infty$ заштрихованы).

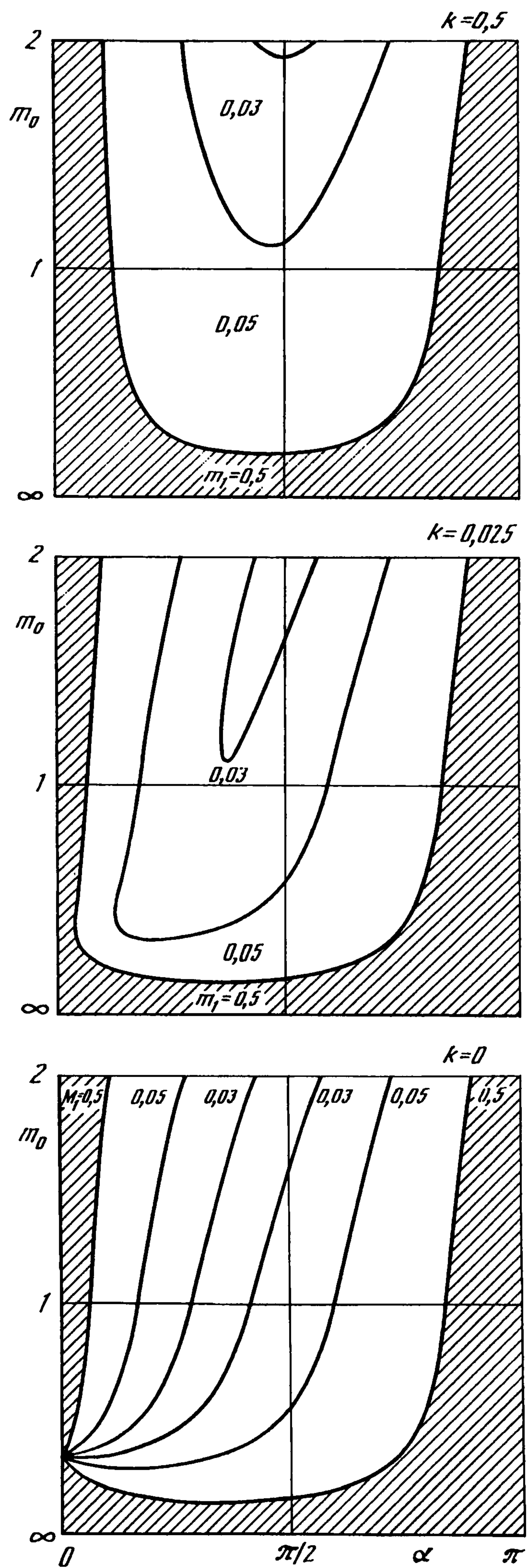
Оба конца верхней границы областей устойчивости располагаются на верхней стороне прямоугольной области изменения параметров ($m_0 = 0$) и не меняются с изменением k . Действительно, подстановка $m_0 = 0$ в a_6 приводит к выражению

$$a_6 / 9 \Big|_{m_0=0} = [k^2 + 5k + 9ql_1(2-l_1) + 6]^2 (36ql_1^2 - 72ql_1 + 1)$$

¹ Белецкий В.В., Пономарева О.Н. Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Препринт № 12. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР. 1988. 21 с.



Фиг. 2



Фиг. 3

в котором первый сомножитель строго положителен, а второй обращается в нуль в точках

$$l_1 = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{36q}} \quad \left(\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{36q} \right) \quad (6.1)$$

При $q \leq 1/36$ (или $m_1 \leq m_1^* = (3 - 2\sqrt{2})/6 \approx 0,0286$) эти точки сливаются и исчезают, а вместе с ними исчезает и граница $a_6 = 0$. Тогда область устойчивости определяется только одной левой нижней границей $a_3 = 0$. На фиг. 2 при $m = 0,01$ области устойчивости располагаются вправо вверх от кривой $a_3 = 0$, показанной при значениях $k = \infty; 5; 1,01$ (область устойчивости при $k = \infty$ заштрихована).

Левая нижняя граница $a_3 = 0$ области устойчивости независимо от k всегда начинается из левого верхнего угла $m_0 = 0, \alpha = 0$ и заканчивается на правой стороне диаграммы в точке $m_0 = 12(k + 3)(k - 1)^{-1}q$. При $k = 1$ левая нижняя граница области устойчивости примыкает к левой и нижней сторонам диаграммы и исчезает. Таким образом, при $k \leq 1$ область устойчивости ограничена только одной верхней границей. В этом случае область устойчивости содержит значения параметров, присущие спутникам (левый нижний угол диаграммы). Другими словами, если жесткость пружины достаточно мала, то треугольные стационарные решения могут иметь приложения в динамике спутников.

На фиг. 3 для фиксированных значений коэффициента упругости k показано, как области устойчивости, определяемые одной правой верхней границей $a_6 = 0$, изменяются с изменением m_1 (области устойчивости, соответствующие $m_1 = 0,5$, заштрихованы). Для критического значения $m_1 = m_1^*$ граница области устойчивости примыкает к верхней стороне диаграммы и исчезает. Таким образом, при $k \leq 1$ и $m_1 \leq m_1^*$ область устойчивости заполняет всю площадь рассматриваемой диаграммы устойчивости.

В рассмотренной модели натяжение пружины оказывается положительным и, теоретически, соединение масс m_1 и m_2 можно реализовать с помощью упругого троса. Но если примем во внимание силы ньютоновского притяжения между телами m_1 и m_2 , то обнаружим, что положительное натяжение имеет место только при $\alpha > \pi/3$. В противном случае для реализации соединения потребуются дополнительные натягивающие трос силы, например, две равные реактивные силы, действующие вдоль троса на его концах.

7. Пример: оценка величины параметров для спутника. Оценим порядок величины коэффициента упругости троса $\bar{E}''$, соответствующего значению $k = 1$ для спутника Земли. Рассмотрим спутник, состоящий из двух равных частей с общей массой $\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 = 10^5$ кг ($\bar{m}_2 = \bar{m}_1$). Период обращения по орбите примем равным 90 мин, откуда $\bar{T} = 1/\bar{\omega} \approx 900$ с. Радиус орбиты примем равным $\bar{L} = \bar{r} = 6,4 \times 10^6$ м. Массу Земли примем равной $\bar{m}_0 = 6 \times 10^{24}$ кг и расстояние между массами m_1 и m_2 в стационарном движении примем равным $\bar{l} = 10^5$ м.

Этим величинам соответствуют безразмерные значения $m_1 = 1/2, q = 1/4, m_0 = 6 \times 10^{19}, l \approx 1,6 \times 10^{-2}, l_1 = l/2 \approx 0,8 \times 10^{-2}, e' = q/(m_0 + 1) \approx 4,2 \times 10^{-21}, E'' = e'k \approx 4,2 \times 10^{-21}$.

Для вычисления размерного значения параметра в стандартной системе единиц необходимо его безразмерное значение, вычисленное в выбранной здесь специальной системе единиц измерения, умножить на соответствующую этому параметру производную единицу измерения (в выбранной специальной системе единиц), выраженную в стандартной системе единиц

$$\bar{E}'' = E''\bar{M}\bar{T}^{-2} \approx 0,5 \times 10^{-21} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \bar{E}' = E'\bar{M}\bar{L}\bar{T}^{-2} \approx 0,5 \times 10^{-14} \text{ Н}$$

Для сопоставления приведем величины $\bar{E}_g''$, $\bar{E}_g'$ производных гравитационного потенциала $\bar{E}_g$ тел m_1 , m_2 в том же стационарном движении $\bar{E}_g'' \approx -0,27 \times 10^{-15} \text{ Нм}^{-1}$, $\bar{E}_g' \approx 0,135 \times 10^{-10} \text{ Н}$. Ввиду значительного различия в порядках производных гравитационного и суммарного потенциалов, коэффициент упругости и "натяжение" (отрицательное) троса имеют тот же порядок что и $\bar{E}_g''$ и $\bar{E}_g'$, но противоположный знак. В частности, при удвоении длины троса создается натяжение $\bar{E}''\bar{l} \approx 0,17 \times 10^{-8} \text{ Н}$. При таких малых величинах коэффициента упругости и "натяжения" целесообразно говорить не о тросе, а об искусственном создании упругих сил [5].

Исследование проведено с помощью системы аналитических преобразований REDUCE. В качестве вводных данных использовались формулы для кинетической и потенциальной энергий (1.1) и формулы (3.3) для дифференцирования часто встречающихся выражений. Первые интегралы, уравнения Рауса, стационарные движения и характеристическое уравнение получены автоматически в аналитической форме.

Авторы благодарят В.В. Белецкого за ценное обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза, (93-1621-ext), Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00785, 96-15-96051) и в рамках проекта Федеральной целевой программы "ИНТЕГРАЦИЯ".

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В., Пономарева О.Н. Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космич. исследования. 1990. Т. 28. Вып. 5. С. 664–675.
2. Буров А.А., Степанов С.Я. О геометрии масс в динамике деформируемых тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 107–130.
3. Li-Sheng Wang, Shyh-Feng Cheng. Dynamics of two spring-connected masses in orbit // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1995. V. 63. № 3–4. С. 289–312.
4. Степанов С.Я. Условия вековой и гироскопической устойчивости стационарных решений в обобщенной плоской задаче трех тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 33–44.
5. McQuade F., McInnes C.R. Co-operative control for on-orbit assembly of large space structures using potential field methods // Departmental Report No. 9818. Department of Aerospace Engineering. University of Glasgow, 1998. 19 p.

Москва, Париж

Поступила в редакцию
8.VII.1999