

УДК 531.36

© 2000 г. А.А. Буров, Х. Трогер

**ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ ОРБИТАЛЬНОГО МАЯТНИКА,
ПОДВЕШЕННОГО НА ТРОСЕ**

Рассматривается задача о движении подвешенного на тросе орбитального маятника. Исследуется вопрос о существовании относительных равновесий и достаточных условиях их устойчивости. Особое внимание уделено изучению реакций связи, в частности, вопросу о нереализуемости тех или иных относительных равновесий из-за того, что трос не допускает сжатие.

Задача о движении орбитального маятника, т.е. маятника, точка подвеса которого фиксирована в твердом теле, совершающем движение в центральном ньютоновском поле сил, впервые была поставлена, по-видимому, Синджем [1], причем предполагалось, что маятник – это материальная точка, подвешенная с помощью невесомого недеформируемого стержня в центре масс тела. Были найдены радиальные, касательные и нормальные относительные равновесия такого маятника, исследованы необходимые условия их устойчивости. Эта же задача была рассмотрена [2] в предположении о произвольном положении в теле точки подвеса маятника. Для такой постановки задачи также были найдены все положения относительного равновесия маятника и изучены необходимые условия их устойчивости. Исследована [3] задача об относительных равновесиях *физического маятника*, в частности обнаружены все относительные равновесия, исследованы как необходимые, так и достаточные условия устойчивости.

Рассмотренные задачи допускают естественное обобщение – анализ орбитальной динамики связок одного или нескольких твердых тел. Для таких систем аналитически найден [4–6] ряд относительных равновесий двузвенных орбитальных систем и изучены их условия устойчивости. Возможны и другие обобщения рассматриваемой задачи [7].

Ниже в отличие от задач, рассмотренных ранее [1, 2], предполагается, что материальная точка подвешена на невесомом нерастяжимом тросе. Изучается вопрос, какие из найденных ранее [2] относительных равновесий сохраняются в рамках сделанных предположений, исследуются достаточные условия их устойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движения механической системы, состоящей из твердого тела массы m_1 с центром масс в точке G и материальной точки Q массы m_2 , связанной с телом нерастяжимой нитью длины l . Другой конец нити закреплен в точке P твердого тела. Движение осуществляется под действием сил центрального ньютоновского притяжения с центром притяжения в точке N , фиксированной в абсолютном пространстве.

Пусть размеры системы малы по сравнению с ее удаленностью от притягивающего центра. Тогда можно считать с достаточной степенью точности, что движение центра масс всей системы – точки O , такой что

$$(m_1 + m_2)NO = m_1NG + m_2NP$$

и движение системы вокруг центра масс разделяются. Предположим в дальнейшем, что точка O движется по круговой кеплеровской орбите. Введем, как обычно, орбитальную систему координат $Oxuz$, ось x которой направлена по орбитальной касательной, ось u перпендикулярна плоскости орбиты, ось z направлена по радиусу NO . Наконец, как и ранее [2] будем считать, что твердое тело не меняет своей ориентации относительно орбитальной системы координат, в то время как положение точки G относительно этой системы может меняться.

Пусть в проекциях на оси орбитальной системы координат $\mathbf{GP} = (a, b, c)$, $\mathbf{PQ} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{GQ} = (x, y, z)$. Воспользуемся возникающим малым параметром и разложим по нему потенциал сил ньютоновского тяготения до членов второго порядка малости. Тогда, если ω – орбитальная угловая скорость всей системы, $M = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса, то измененный потенциал системы запишется в виде (ср. [2, 3])

$$W = M\omega^2((b + \eta)^2 - 3(c + \zeta)^2)/2 \quad (1.1)$$

На систему наложена односторонняя связь

$$f = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2 \leq 0 \quad (1.2)$$

Для отыскания относительных равновесий воспользуемся методом Рауса, исследуя критические точки функции

$$W_\lambda = W + \lambda f/2 \quad (1.3)$$

При этом связь напряжена, если на данном равновесии $\lambda \geq 0$. Критические точки функции (1.3) определяются уравнениями

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial \xi} = \lambda \xi = 0, \quad \frac{\partial W_\lambda}{\partial \eta} = M\omega^2(b + \eta) + \lambda \eta = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial \zeta} = -3M\omega^2(c + \zeta) + \lambda \zeta = 0$$

совместно с (1.2). Натянтому тросу соответствуют решения с $\lambda > 0$. Это условие выделяет из решений, найденных ранее [2], те, которые отвечают условиям задачи.

Из первого уравнения (1.4) находим, что либо $\lambda = 0$, либо $\xi = 0$. Первое условие означает, что трос не натянут. Тогда в силу второго и третьего уравнений (1.4) можно установить, что $\eta = -b$, $\zeta = -c$. Таким образом, точка Q лежит на оси x и удалена от точки P на расстояние, не превосходящее l . Другими словами, с определенной степенью точности для данных решений можно сказать, что точки G и Q совершают движение по одной и той же круговой кеплеровской орбите.

Замечание. В рамках точной постановки, без упрощающих предположений о приближениях для ньютоновского потенциала, указанное утверждение оказывается не совсем точным, так как конечные размеры тел оказывают влияние на величину радиуса орбиты для установившихся круговых движений и эти радиусы различны для различных относительных ориентаций тел. Более того, для одной и той же постоянной первого интеграла (величины момента количества движения), в ряде случаев для одних и тех же орбитальных ориентаций можно указать не один, а несколько допустимых радиусов орбит, одни из которых оказываются устойчивыми, другие – неустойчивыми. В этом смысле рассмотрение задачи о движении небесных тел в так называемом спутниковом приближении требует некоторых обоснований.

2. Относительные равновесия иных типов. Рассмотрим решения, отвечающие значению $\xi = 0$. В этом случае, вне зависимости от значения параметра a , трос располагается в плоскости, параллельной плоскости yz . Для простоты геометрической интерпретации будем считать, что $a = 0$. Свойства этих решений существенно зависят от значений параметров b и c . Обозначим $\Lambda = \lambda/(M\omega^2)$.

Пусть $b = 0$. Тогда решения имеют вид

$$\eta = 0, \quad \zeta = \varepsilon l, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \Lambda = 3(\zeta + c)/\zeta \quad (2.1)$$

При этом

$$y = 0, \quad z = c + \varepsilon l$$

и трос располагается параллельно оси z . Для одного из этих решений трос располагается "над" точкой подвеса, для другого – "под" точкой подвеса. Величина Λ оказывается положительной, если точка Q расположена вне отрезка GP . Другими словами, трос не может быть натянут, если точка Q располагается между точкой подвеса и центром масс тела.

Пусть $c = 0$. Тогда в силу твердого уравнения (1.4) имеются два класса решений. Для одного из них

$$\eta = -\frac{b}{1+\Lambda}, \quad \zeta = 0; \quad y = \frac{b\Lambda}{1+\Lambda}, \quad z = 0 \quad (2.2)$$

и Λ может принимать любые значения кроме -1 . В этом случае трос параллелен оси y , или, иными словами, перпендикулярен плоскости орбиты. При этом множитель Λ положителен, если точка Q располагается между точкой подвеса и плоскостью орбиты. Во втором случае

$$\eta = -b/4, \quad \zeta = \varepsilon(l^2 - (b/4)^2)^{1/2}, \quad \Lambda = 3; \quad y = 3b/4, \quad z = \varepsilon(l^2 - (b/4)^2)^{1/2} \quad (2.3)$$

При этом точка Q оказывается удаленной от плоскости орбиты на одно и то же расстояние, зависящее от того, насколько точка подвеса удалена от плоскости орбиты, и не зависящее от длины троса. Впрочем, такие решения существуют, если длина троса составляет не менее четверти расстояния от точки подвеса до плоскости орбиты. На данных решениях величина $\Lambda = 3$, т.е. всегда положительна.

Пусть, наконец, $bc \neq 0$. В этом случае

$$\eta = -\frac{b}{\Lambda+1}, \quad \zeta = \frac{3c}{\Lambda-3}; \quad y = \frac{b\Lambda}{\Lambda+1}, \quad z = \frac{c\Lambda}{\Lambda-3} \quad (2.4)$$

Таким образом, точка Q располагается на гиперболе, проходящей через начало координат и точку подвеса. Проведем через точку подвеса две прямые l_y и l_z , параллельные осям y и z соответственно. Тогда положительным Λ отвечают точки гиперболы, расположенные внутри полосы между прямой l_z и осью z , но вне полосы между прямой l_y и осью y . При этом нулевой реакции отвечает совпадение точек Q и G .

3. Достаточные условия устойчивости. Если на установившемся движении связь напряжена, иными словами, $\Lambda > 0$, то можно воспользоваться методом Рауса для исследования достаточных условий устойчивости. Для этого достаточно исследовать знакоопределенность ограничения второй вариации

$$2\delta^2 W_\lambda = M\omega^2(\Lambda\delta\xi^2 + (\Lambda+1)\delta\eta^2 + (\Lambda-3)\delta\zeta^2) \quad (3.1)$$

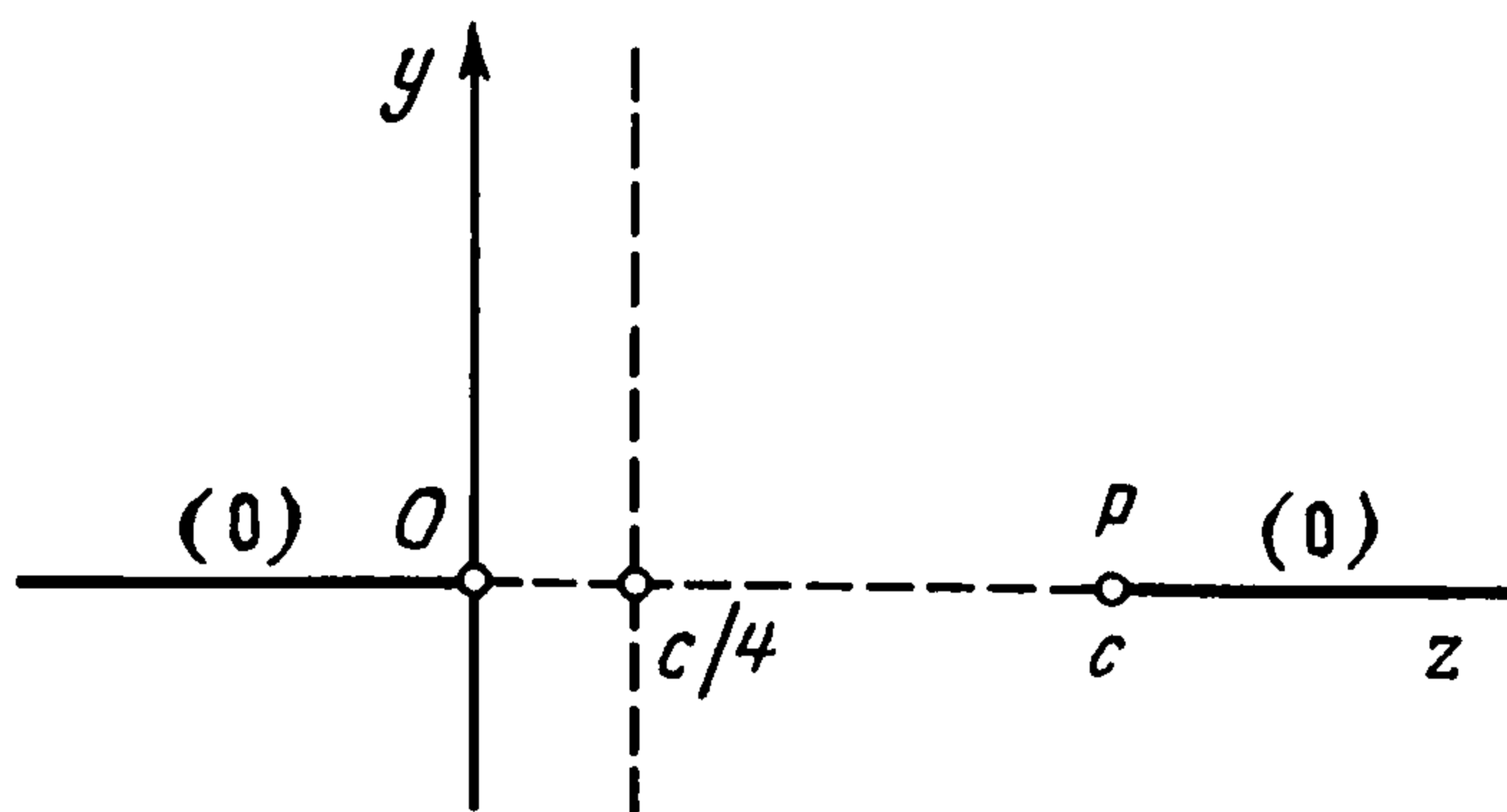
функции Рауса W_λ на линейное многообразие

$$\delta f = \{\delta(\xi, \eta, \zeta): \xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = 0\} \quad (3.2)$$

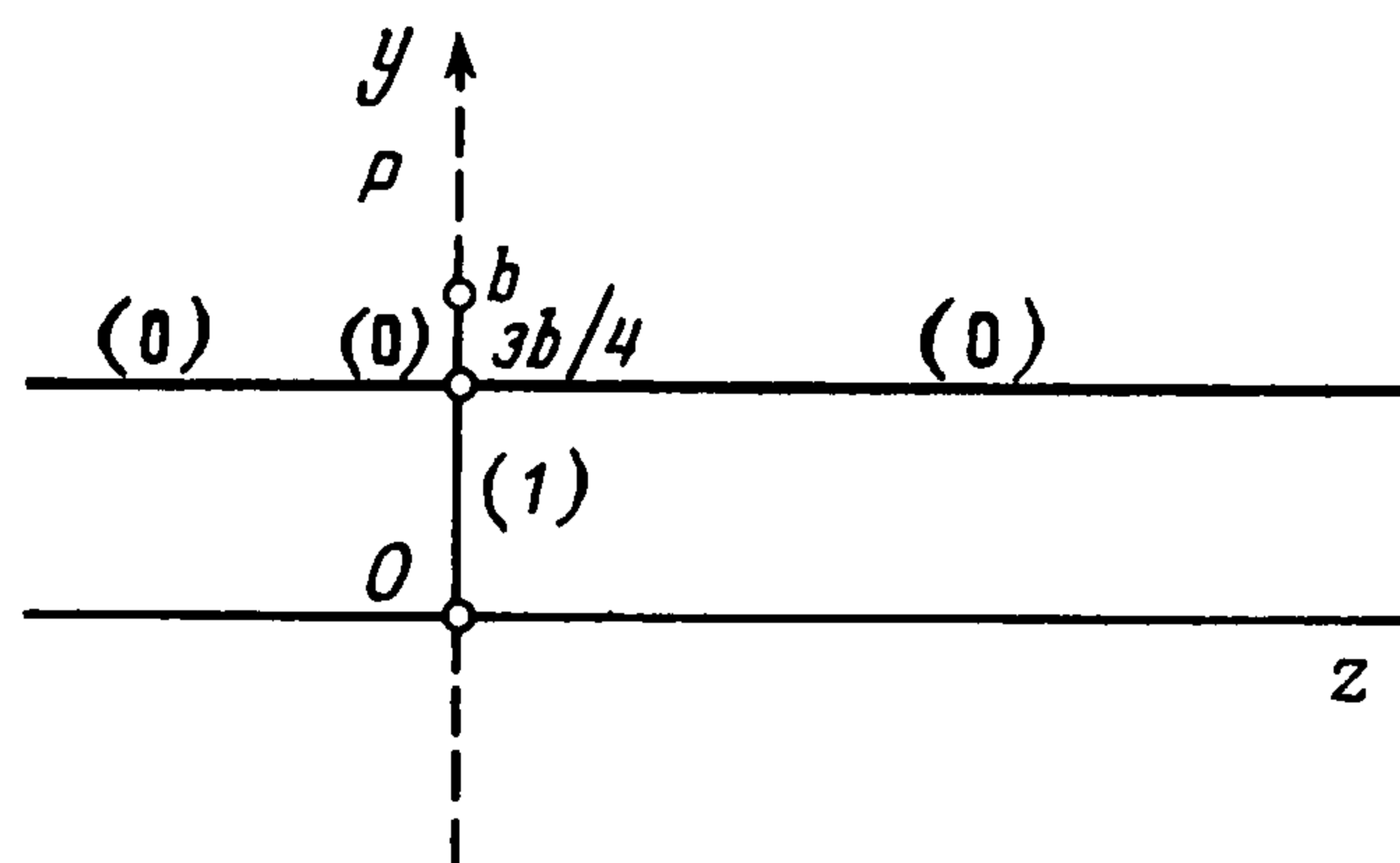
На решениях (2.1) линейное многообразие и ограничение квадратичной формы (3.1) на это многообразие имеют вид

$$\delta f = \{\delta\zeta = 0\}, \quad 2\delta^2 W_\lambda = M\omega^2(\Lambda\delta\xi^2 + (\Lambda+1)\delta\eta^2)$$

На решениях с $\Lambda > 0$ это ограничение всегда положительно определено, степень неустойчивости равна нулю и решение устойчиво в вековом смысле (фиг. 1). Здесь и далее на фигурах множества точек, отвечающие решениям с натянутым тросом, изображены сплошной линией, рядом с которой в скобках указывается степень их неустойчивости. Решения, для которых трос не натянут, изображаются штриховой линией.



Фиг. 1



Фиг. 2

На решениях (2.2) линейное многообразие и ограничение квадратичной формы (3.1) на это многообразие имеют вид

$$\delta f = \{\delta\eta = 0\}, \quad 2\delta^2 W_\lambda = M\omega^2(\Lambda\delta\xi^2 + (\Lambda - 3)\delta\zeta^2)$$

Тогда степень неустойчивости равна нулю, если $\Lambda > 3$. Это имеет место, если длина троса меньше $b/4$. Если длина троса больше $b/4$, но меньше b , то степень неустойчивости равна единице, и имеет место неустойчивость. Если длина троса равна $b/4$, то квадратичное приближение не дает возможности установить, выполнены ли достаточные условия устойчивости или нет. При этом имеет место бифуркация данного класса решений, сопровождающаяся рождением решений (2.3). Для решений (2.3) линейное многообразие и ограничение второй вариации на это многообразие имеют вид

$$\delta f = \{-b/4\delta\eta + \varepsilon(l^2 - (b/4)^2)^{1/2}\delta\zeta = 0\}, \quad 2\delta^2 W_\lambda = M\omega^2(3\delta\xi^2 + 4\delta\eta^2)$$

Тогда степень неустойчивости этих решений равна нулю и они устойчивы в вековом смысле. Так как эти решения ответвляются от решений (2.2), то в силу общих теорем теории бифуркаций решение, отвечающее точке ветвления, также устойчиво (фиг. 2).

Наконец, на решениях (2.4) линейное многообразие имеют вид и ограничение второй вариации на это линейное многообразие имеет вид

$$\delta f = \left\{ -\frac{b}{\Lambda + 1}\delta\eta + \frac{3c}{\lambda - 3}\delta\zeta = 0 \right\} \quad (3.3)$$

$$2\delta^2 W_\lambda = M\omega^2 \left(\Lambda\delta\xi^2 + \left(\frac{b^2}{(3c)^2} \frac{(\Lambda - 3)^3}{(\Lambda + 1)^2} + \Lambda + 1 \right) \delta\eta^2 \right)$$

Существует единственное вещественное значение

$$\Lambda^* = \frac{3b^{2/3} - (3c)^{2/3}}{b^{2/3} + (3c)^{2/3}}$$

при котором второй коэффициент квадратичной формы (3.3) обращается в нуль, меняя знак с положительного при $\Lambda > \Lambda^*$ на отрицательной при $\Lambda < \Lambda^*$. Таким образом, степень неустойчивости равна нулю, если выполнены условия

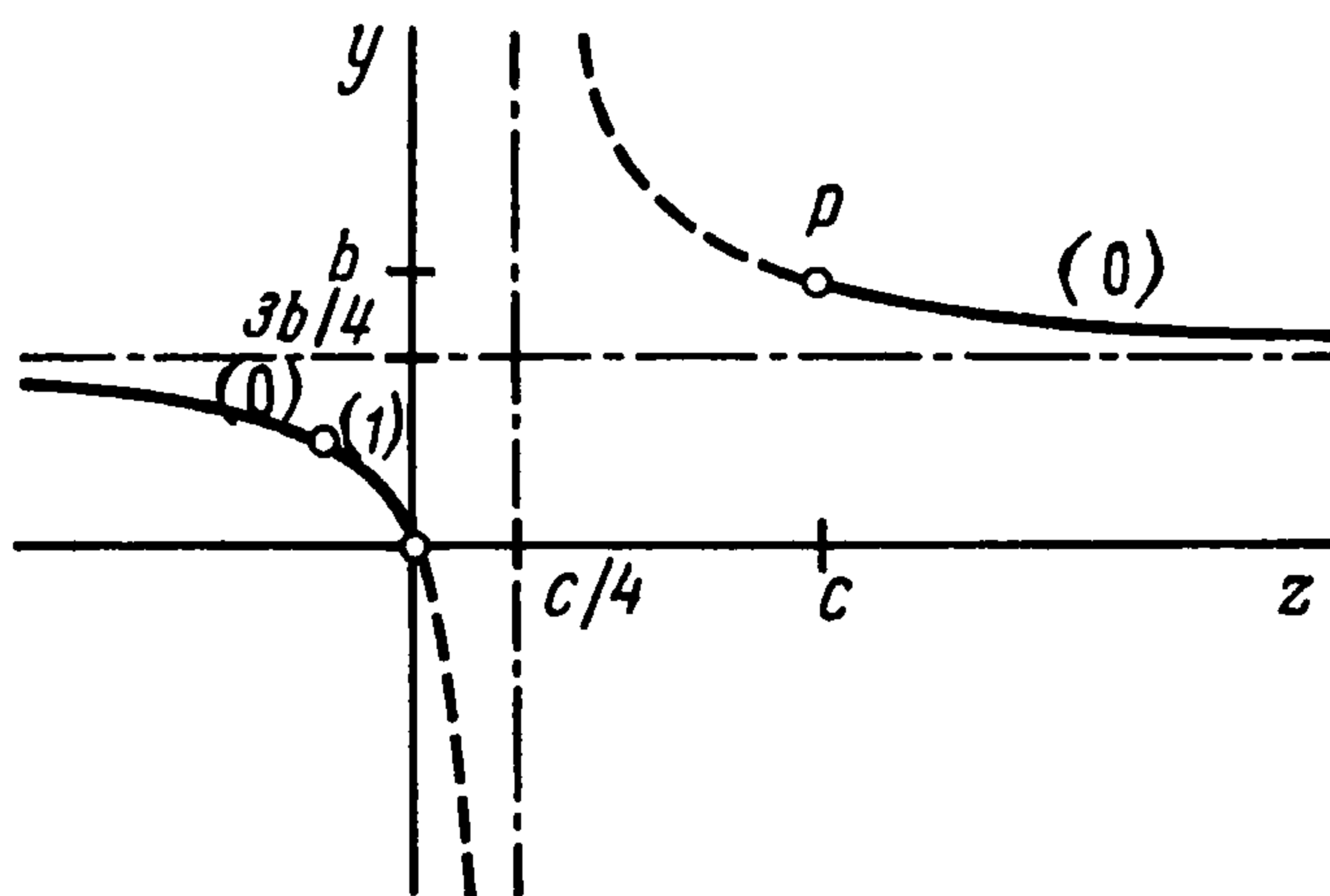
$$\Lambda > 0, \quad \Lambda > \Lambda^*$$

В этом случае имеет место вековая устойчивость. Степень неустойчивости равна единице, если

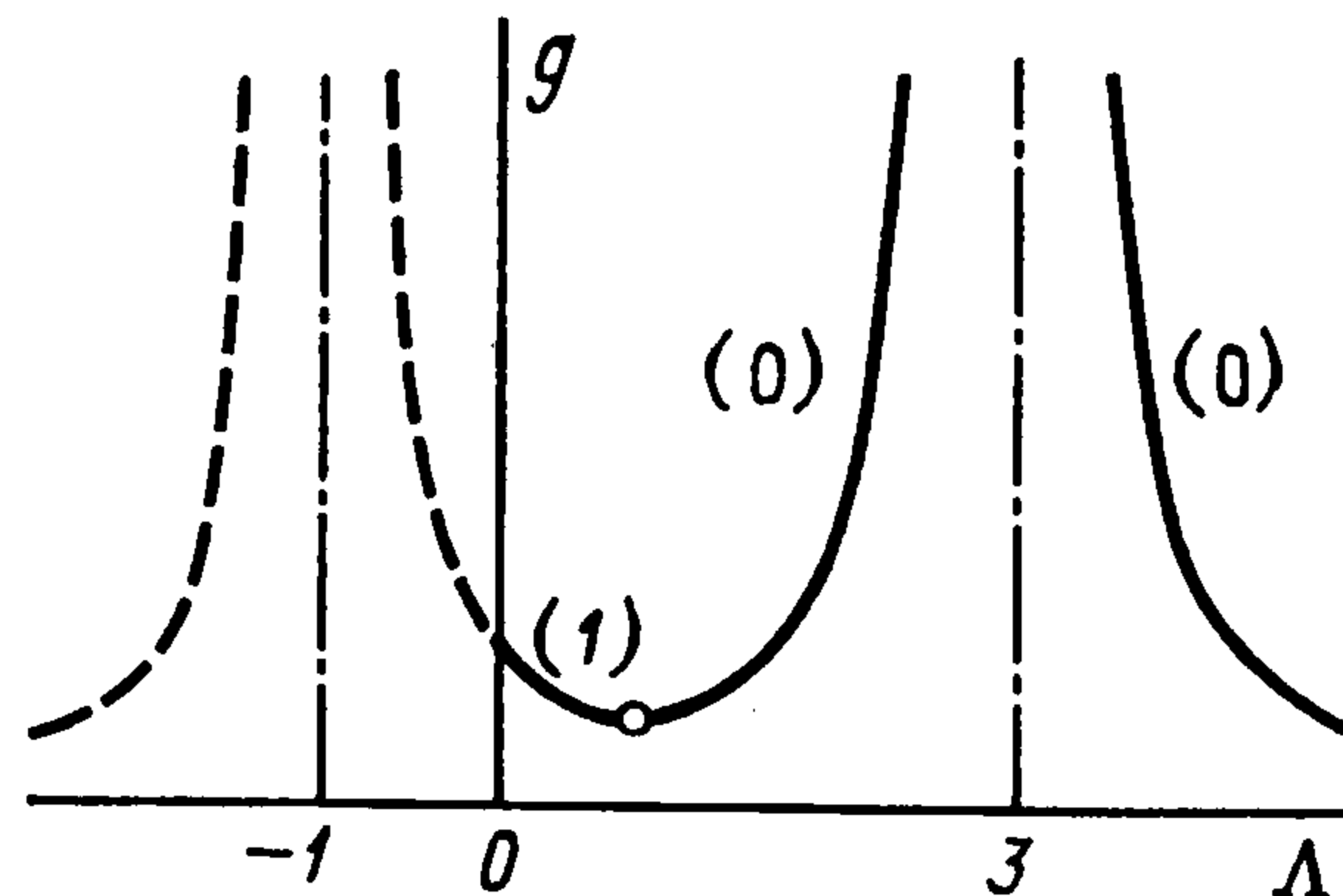
$$\Lambda^* > \Lambda > 0$$

В этом случае имеет место неустойчивость (фиг. 3).

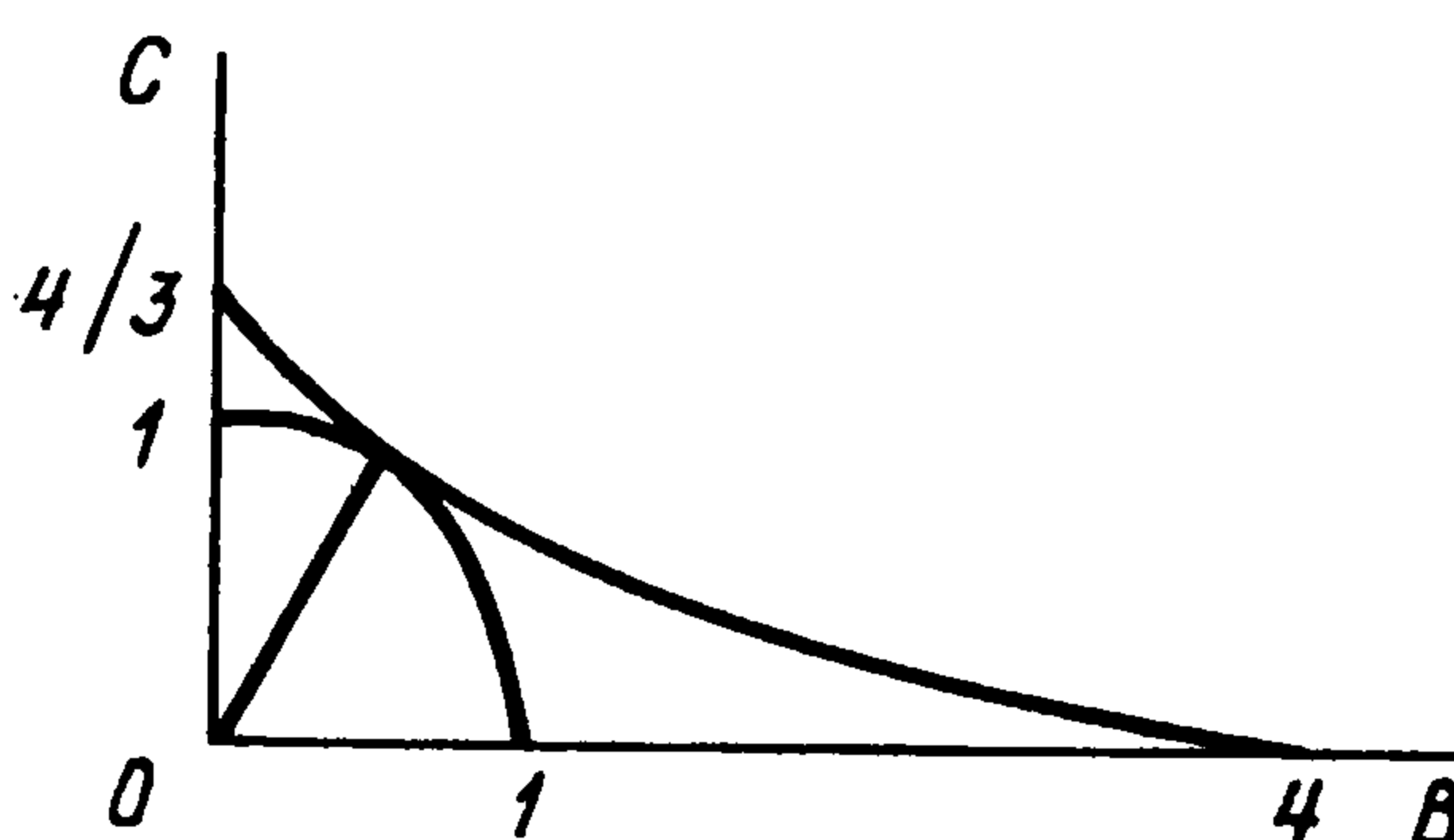
Изменение типа устойчивости в данном случае связано с рождением пары установившихся движений. Это можно показать, например, следующим образом. Подставим



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

решения третьего типа, параметризованные с помощью Λ , в уравнения связи. Имеем

$$g(\Lambda) = \frac{b^2}{(\Lambda + 1)^2} + \frac{(3c)^2}{(\Lambda - 3)^2} = l^2 \quad (3.4)$$

График функции $g(\Lambda)$ изображен на фиг. 4. Локальный минимум функции $g(\Lambda)$ приходится на точку Λ^* , причем

$$g(\Lambda^*) = (b/4)^{2/3} + (3c/4)^{2/3} = g^*$$

Если $l^{2/3} < g^*$, то решений рассматриваемых типов только два, причем одно из них всегда отвечает отрицательным значениям параметра Λ и выпадает из рассмотрения по физическому смыслу.

Если $l^{2/3} = g^*$, то рождается еще одно решение, которое может отвечать как отрицательным, так и неотрицательным значениям параметра $\Lambda = \Lambda^*$, величина которого зависит от значений параметров b и c . В зависимости от этого же обстоятельства система будет иметь два или три физически осмысленных в данной постановке задачи решения. Впрочем, как показало исследование, изложенное выше, устойчивыми будут всегда лишь только два решения.

Таким образом, через точки касания, найденных в ранее [3], астроида и окружности

$$g(\Lambda)/l^{2/3} = 1, \quad B^2 + C^2 = 1, \quad B = b/l, \quad C = c/l$$

будут проходить две прямые, разделяющие области существования двух и трех физически осмысленных в рамках рассматриваемой постановки решений. Получающаяся картина симметрична относительно осей B и C , поэтому на фиг. 5 изображена лишь ее четвертая часть, расположенная в первом квадранте.

4. Возможные обобщения. Задача о движении подвешенного на спутнике *физического маятника* [3] также может быть видоизменена и в измененном виде рассмотрена как задача динамики системы, стесненной неудерживающей связью. Для этого достаточно предположить, что в теле с помощью сферического шарнира закреплен невесомый стержень, вдоль которого может свободно скользить другое осесимметричное тело, ось симметрии которого совпадает с указанным стержнем. Если предположить, что точка подвеса стержня и точка тела, принадлежащая его оси симметрии, соединены нерастяжимым тросом, то получается задача, аналогичная рассмотренной выше. Однако вопрос о практическом значении такой системы требует изучения. Другая задача, в рамках которой предполагается, что нерастяжимый трос соединяет некоторую точку тела-носителя и другого, не обязательно осесимметричного тела, оказывается намного сложнее. Другие обобщения рассматриваемой задачи могут быть связаны с рассмотрением аэродинамических, электромагнитных и других сил, действующих на систему [7].

Авторы благодарят Й. Виттенбурга и В.А. Сарычева за предоставленные копии опубликованных и неопубликованных работ, а также В.В. Белецкого за полезные обсуждения.

Исследование выполнено при поддержке Юбилейного фонда Вены (Jubilaümstiftung der Stadt Wien), а для первого соавтора также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–15–96051 и 99–01–00785) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Synge J.L.* On the behaviour, according to Newtonian theory, of a plumb line or pendulum attached to an artificial satellite // *Proc. Roy. Irish Acad. Ser. A.* 1959. V. 20. № 1. P. 1-6.
2. *Blitzer L.* Equilibrium and stability of a pendulum in an orbiting spaceship // *Amer. J. Phys.* 1979. V. 47. № 3. P. 241–246.
3. *Сарычев В.А.* Положения равновесия маятника в спутнике // *Космич. исслед.* 2000. Т. 38. Вып. 4.
4. *Сарычев В.А.* Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // *Космич. исслед.* 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 360–364.
5. *Wittenburg J.* Gleichgewichtslagen von Vielkörper – Satellitensystemen // *Abhandl. Braunsch. Wissensch. Ges.* 1968. Bd 20. P. 198–278.
6. *Сарычев В.А.* Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите // *Космич. исслед.* 1999. Т. 37. Вып. 2. С. 176–181.
7. *Beletskii V.V., Levin E.M.* Dynamics of space tether systems // *Advances of the Astronautical Sciences.* 1993. V. 83. 499 с.