

УДК 531.36:629.7

© 2000 г. А.И. Нейштадт, М.Л. Пивоваров

ПЕРЕХОД ЧЕРЕЗ СЕПАРАТРИСУ В ДИНАМИКЕ СПУТНИКА С ДВОЙНЫМ ВРАЩЕНИЕМ

В адиабатическом приближении описана эволюция вращения спутника-гиростата при медленном раскручивании его ротора. Получены формулы для вероятностей различных исходов эволюции. Вероятностные явления возникают из-за переходов через сепаратрису.

Спутник с двойным вращением является одним из основных типов беспилотных космических аппаратов. В главном приближении это два твердых тела, связанные жестким валом. Одно из тел – платформа – имеет нулевую (малую) угловую скорость вращения, другое – ротор – быстро вращается относительно платформы. На борту аппарата установлен электродвигатель, который регулирует угловую скорость ротора относительно платформы. Большой кинетический момент системы обеспечивает стабилизацию спутника в инерциальной системе координат, а невращающаяся платформа позволяет провести исследования в заданном направлении пространства.

Если направление вала совпадает с главной центральной осью инерции одного из тел, которое динамически симметрично относительно этой оси, то система двух твердых тел является гиростатом. В простейшем случае направление вала совпадает с общим направлением главных центральных осей инерции обоих тел. Такую систему называют осесимметричным гиростатом. Возможные осложнения задачи связаны с тем, что оба тела могут иметь трехосный эллипсоид инерции, а также одно или оба тела могут быть динамически несбалансированы относительно направления вала.

После выведения на орбиту платформа и ротор жестко связаны и, как единое твердое тело, закручиваются относительно направления вала. Затем электродвигатель раскручивает ротор относительно платформы в направлении, совпадающем с направлением первоначальной закрутки. Таким образом, угловая скорость платформы стремится к нулю, а кинетический момент ротора становится равным начальному кинетическому моменту системы.

Известно [1], что уже в случае осесимметричного гиростата в ходе такого процесса возможно опрокидывание спутника: финальное вращение аппарата происходит вокруг главной оси инерции, ортогональной направлению первоначальной закрутки. Причина состоит в том, что в ходе раскрутки ротора фазовые траектории системы, находясь на двумерной поверхности постоянного кинетического момента, могут пересекать мгновенную сепаратрису невозмущенной задачи (гиростат с постоянной относительной угловой скоростью вращения ротора) и попадать в качественно разные области финального движения. При медленном изменении скорости вращения ротора малые изменения начальных условий задачи приводят к попаданию в различные области, на которые сепаратрисы делят поверхность постоянного кинетического момента, поэтому возможен вероятностный подход для исследования эволюции вращения. Были представлены [1] результаты численного определения вероятностей различных исходов эволюции вращения в этой задаче.

В данной работе с использованием предыдущих результатов [2] получены аналитические выражения для вероятностей различных исходов эволюции вращения осесимметричного гиростата в случае медленно меняющейся угловой скорости ротора и представлено сравнение расчетов по конечным формулам с результатами численного интегрирования исходных уравнений задачи.

1. Уравнения движения. Следуя изложенному ранее подходу [1], рассмотрим осесимметричный гиростат, в котором платформа обладает динамической симметрией относительно вала, а ротор имеет трехосный эллипсоид инерции (при этом ось вала совпадает с главной центральной осью инерции ротора). Обозначим x_1, x_2, x_3 главные центральные оси инерции гиростата, причем ось x_1 совпадает с осью ротора, а система координат жестко связана с ротором.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} h_2 h_3, & \frac{dh_2}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_R}{I_3 I_R} h_1 - \frac{h_a}{I_R} \right) h_3 \\ \frac{dh_3}{dt} &= \left(\frac{I_R - I_2}{I_2 I_R} h_1 + \frac{h_a}{I_R} \right) h_2, & \frac{dh_a}{dt} &= g_a \end{aligned} \quad (1.1)$$

где g_a – момент сил, приложенный к платформе со стороны ротора, h_a – кинетический момент платформы относительно оси x_1 , h_i – кинетический момент гиростата относительно оси x_i , I_R – момент инерции ротора относительно оси x_1 , I_i – главные центральные моменты инерции гиростата ($i = 1, 2, 3$).

Поскольку внешние силы отсутствуют, момент количества движения системы сохраняется, поэтому

$$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = \text{const} \quad (1.2)$$

Сделаем следующие замены переменных [1]:

$$x_i = h_i/h, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mu = h_a/h, \quad \tau = ht/I_R, \quad \varepsilon = -g_a I_R/h^2$$

Обозначим точкой дифференцирование по безразмерному времени τ и введем безразмерные параметры инерции

$$i_j = 1 - I_R/I_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Тогда безразмерные уравнения движения системы примут вид [1]

$$\dot{x}_1 = (i_2 - i_3)x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = (i_3 x_1 - \mu)x_3, \quad \dot{x}_3 = (\mu - i_2 x_1)x_2, \quad \dot{\mu} = -\varepsilon \quad (1.3)$$

а безразмерный интеграл квадрата модуля кинетического момента примет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (1.4)$$

Далее будем предполагать, что угловое ускорение ротора мало $\varepsilon \ll 1$, и для определенности считать, что $i_1 > i_2 > i_3$, что соответствует гиростату с $I_1 > I_2 > I_3$.

Первоначально гиростат вращается как твердое тело; поэтому начальные условия задачи (x_1, x_2, x_3, μ) таковы, что $\mu = \mu_0 = x_1 i_1$. Если первоначальная закрутка гиростата происходит вокруг оси, близкой к оси вала, то начальные данные задачи близки к $(1, 0, 0, i_1)$. В процессе раскрутки ротора параметр μ , характеризующий угловую скорость вращения платформы, убывает от μ_0 до нуля.

Выражение для безразмерной кинетической энергии вращения гиростата имеет вид

$$2T = (x_1 - \mu)^2 + (1 - i_2)x_2^2 + (1 - i_3)x_3^2 + (1 - i_1)\mu^2 / i_1$$

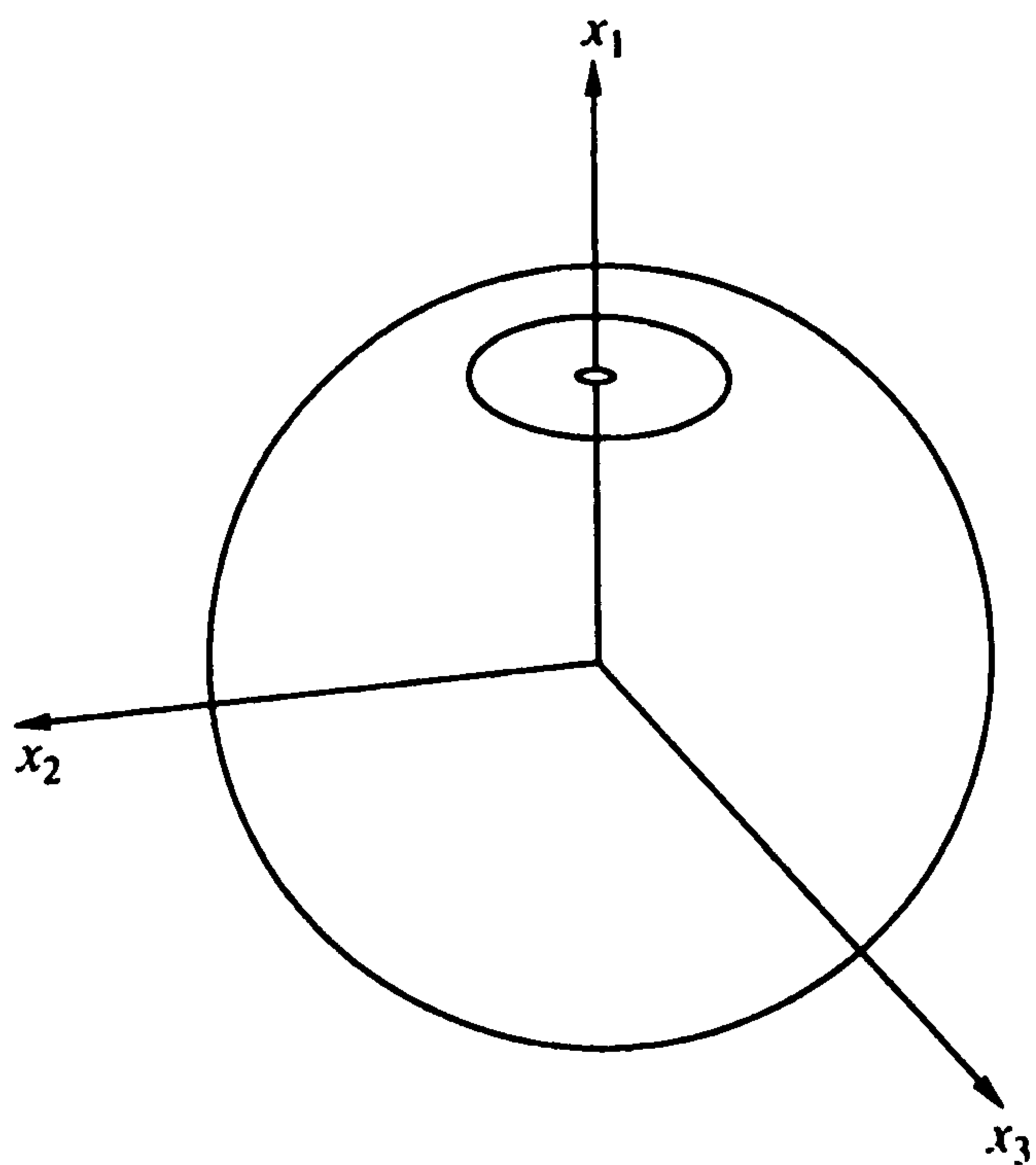
Удобно [1] ввести наряду с T функцию

$$y = 2T - \mu^2 / i_1 - 1 = -2\mu x_1 - i_2 x_2^2 - i_3 x_3^2 \quad (1.5)$$

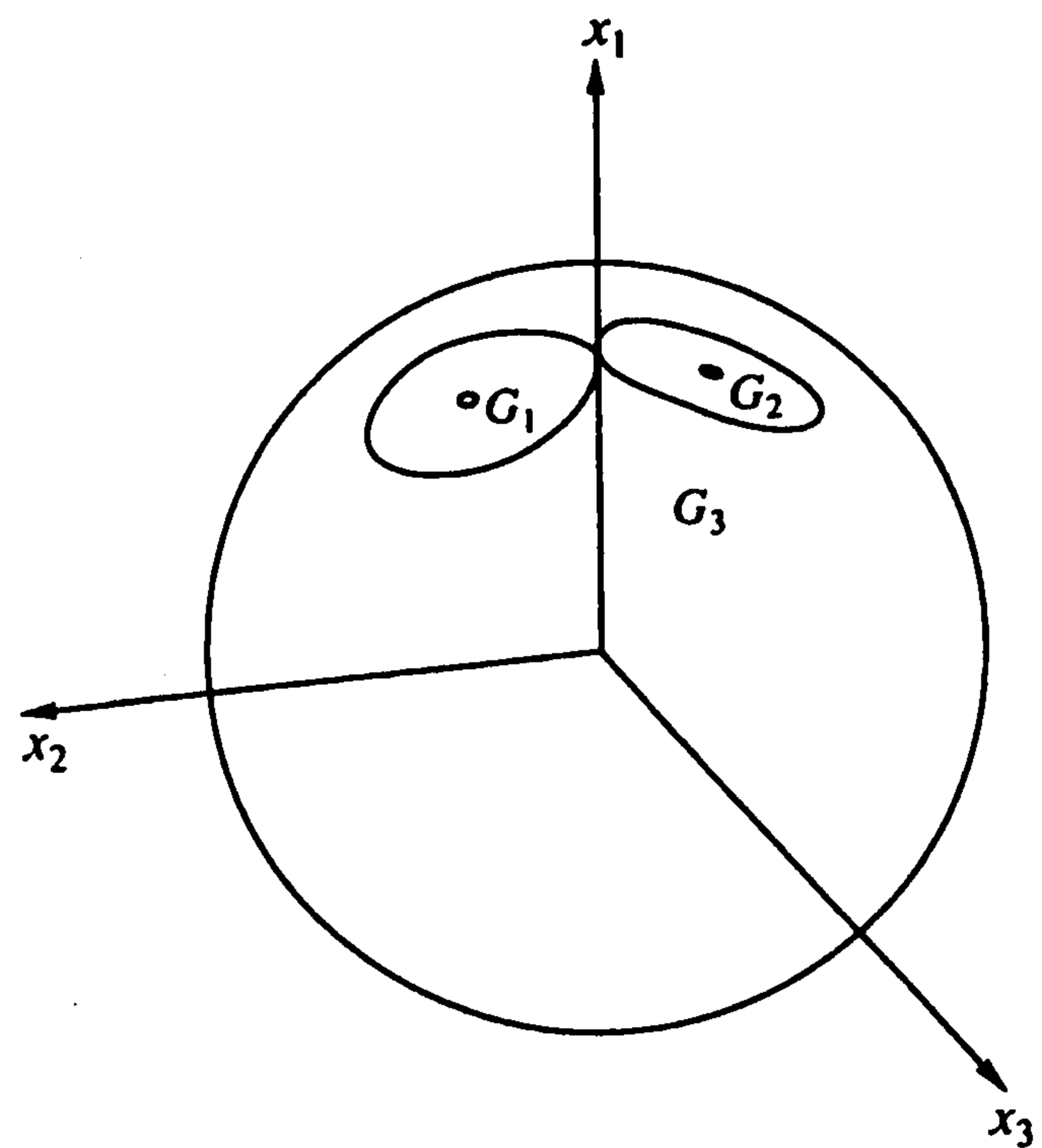
Имеем

$$\dot{y} = 2\varepsilon x_1 \quad (1.6)$$

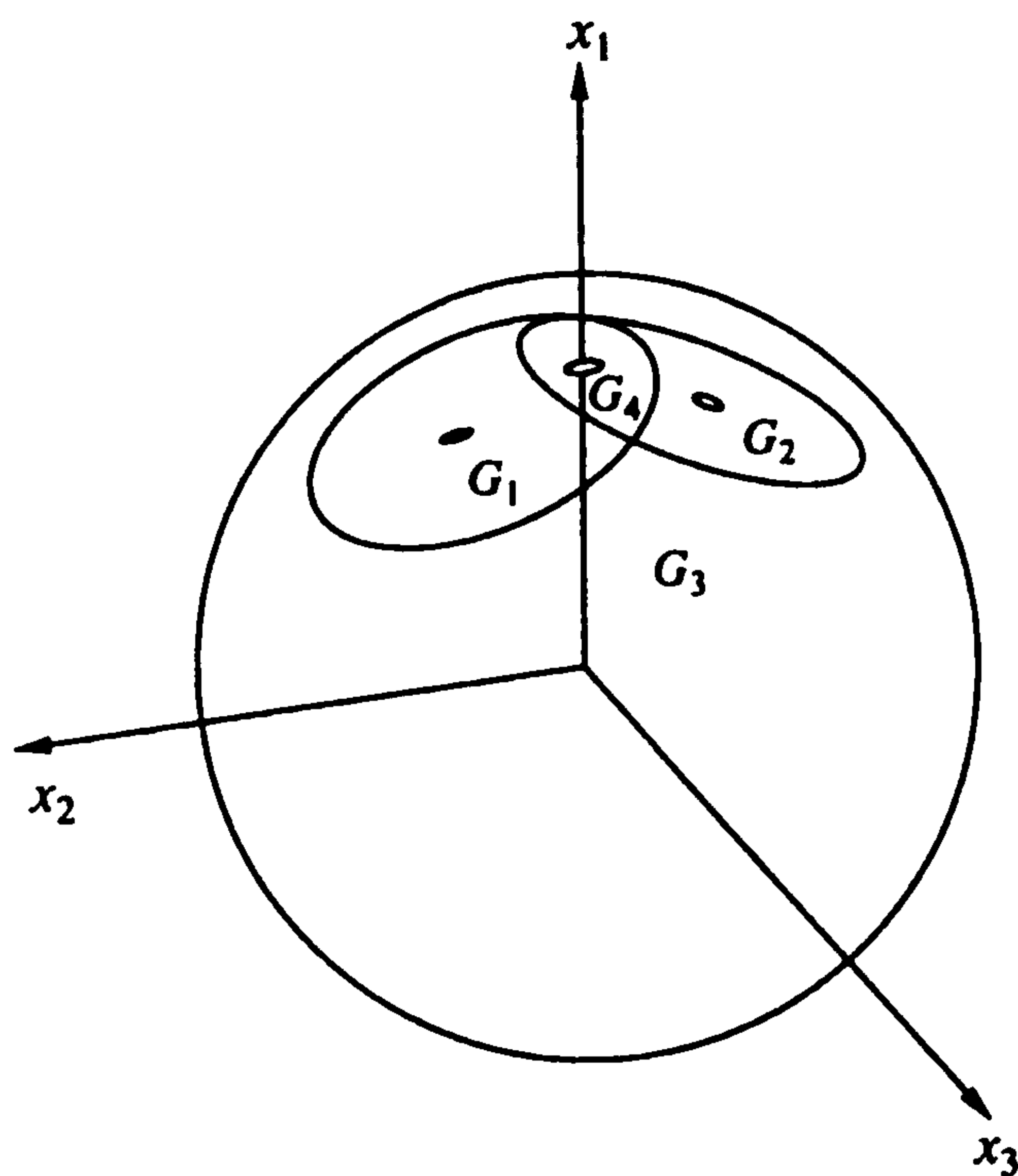
и в невозмущенном движении ($\varepsilon = 0$) величина y постоянна.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Бифуркации положений равновесия системы и медленный переход через сепаратрису. Фазовые траектории системы (1.3), рассматриваемой на сфере (1.4) при $\mu = \text{const}$, являются линиями уровня функции y (1.5). Перестройки фазового портрета этой системы определяются бифуркациями особой точки $(1, 0, 0)$.

Анализ правых частей уравнений показывает, что эта точка является центром при $i_2 < \mu$ (фиг. 1). При $\mu = i_2$ происходит бифуркация: особая точка становится неустойчивой и от нее ответвляются две устойчивые особые точки с координатами

$$x_1 = \mu / i_2, \quad x_2 = \pm \sqrt{1 - \mu^2 / i_2^2}, \quad x_3 = 0 \quad (2.1)$$

При $i_3 < \mu < i_2$ на сфере (1.4) существуют две сепаратрисы, проходящие через неустойчивую особую точку $(1, 0, 0)$ и охватывающие устойчивые особые точки (2.1). Эти сепаратрисы делят сферу на три области G_1, G_2, G_3 (фиг. 2). Площадь области G_1 здесь и ниже обозначается $S_1 = S_1(\mu)$, $S_1 = S_2$.

При $\mu = i_3$ происходит новая бифуркация: точка $(1, 0, 0)$ снова становится устойчивой и возникают две неустойчивые особые точки с координатами

$$x_1 = \mu / i_3, \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \pm \sqrt{1 - \mu^2 / i_3^2} \quad (2.2)$$

Таким образом, при $0 < \mu < i_3$ на сфере постоянного кинетического момента имеются четыре пересекающиеся сепаратрисы. Эти сепаратрисы делят сферу на четыре области $G_1, \dots, G_4$ (фиг. 3). При $\mu \rightarrow 0$ центры областей G_1 и G_2 (устойчивые особые точки (2.1)) стремятся к точкам $(0, \pm 1, 0)$, а неустойчивые особые точки (2.2) стремятся к точкам $(0, 0, \pm 1)$.

Рассмотрим теперь полную систему (1.3) при малых $\varepsilon > 0$. Дивергенция вектора скорости движения в этой системе равна нулю. Следовательно, фазовый объем при движении в этой системе сохраняется, а значит, сохраняется фазовый объем (площадь) на сфере (1.4). Поэтому при малых ε система (1.3) имеет адиабатический инвариант [3]: площадь S области, ограниченной проходящей через фазовую точку мгновенной невозмущенной ($\mu = \text{const}$, $y = \text{const}$) траекторией на сфере (1.4), в главном приближении не меняется при движении фазовой точки вдали от сепаратрис (можно выбрать любую из двух областей, на которые невозмущенная фазовая траектория (ФТ) делит сферу (1.4)). Адиабатическую инвариантность S можно использовать [2] для описания движения вплоть до выхода на сепаратрису.

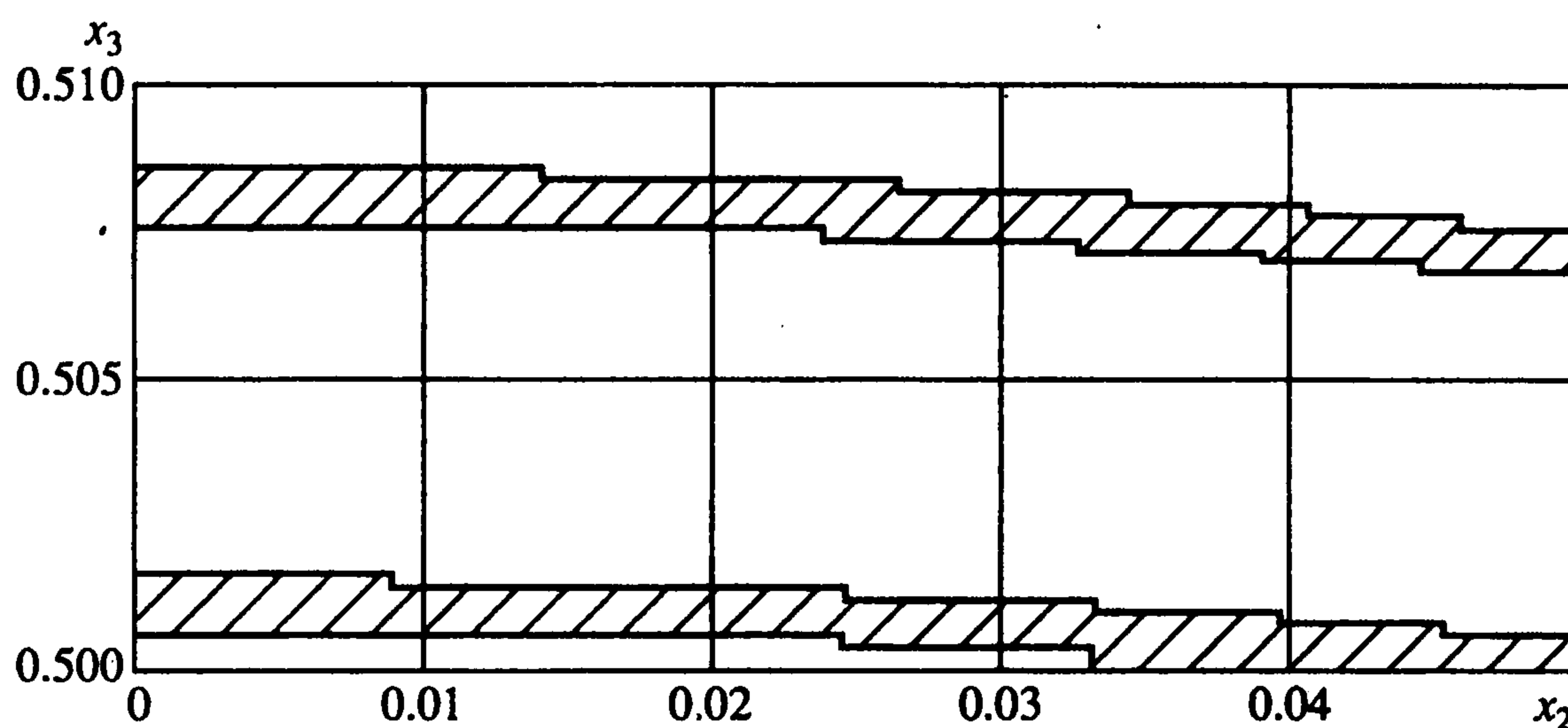
Пусть движение в системе (1.3) начинается при $\mu = \mu_0 \in (i_2, i_1)$ и начальная невозмущенная ($\mu = \mu_0$) ФТ ограничивает на сфере область площади S_0 ; для определенности берется область, содержащая точку $(1, 0, 0)$.

Если $S_0 < 2S_1(i_3) = \pi(1 - \sqrt{i_3 / i_2})$, то, как показывает рассмотрение адиабатического приближения, возмущенная ФТ пересекает сепаратрису при некотором $\mu \approx \mu_*$, где μ_* – корень уравнения $S_0 = 2S_1(\mu_*)$, $\mu_* \in (i_3, i_2)$. После перехода через сепаратрису ФТ захватывается в одну из областей G_1 и G_2 ; дальнейшее движение происходит так, что площадь, ограниченная невозмущенной ($\mu = \text{const}$) ФТ в областях G_1 и G_2 , сохраняется приблизительно постоянной и равной $S_1(\mu_*)$. При $\mu \rightarrow 0$ траектория охватывает ось x_2 , что означает опрокидывание гиростата. Начальные (при $\mu = \mu_0$) условия, отвечающие захватам в S_1 или S_2 , при малых ε перемешаны, так что имеет смысл говорить о вероятностях захвата в область G_1 или G_2 . Из симметрии задачи следует, что эти вероятности равны $1/2$ (определение вероятности обсуждается ниже).

Пусть теперь $S_0 > 2S_1(i_3)$. Тогда возмущенная ФТ пересекает сепаратрису при некотором $\mu \approx \mu_*$, где μ_* – корень уравнения $S_0 = S_4(\mu_*) + 2S_1(\mu_*)$, $\mu_* \in (i_2, 0)$. После перехода сепаратрисы ФТ захватывается в одну из областей G_1, G_2, G_4 ; дальнейшее движение происходит так, что площадь, ограниченная невозмущенной ФТ, сохраняется приблизительно постоянной и равной площади при $\mu = \mu_*$ области, в которую произошел захват ($S_1(\mu_*)$ при захвате в области G_1 или G_2 и $S_4(\mu_*)$ при захвате в G_4). Захват в G_1 и G_2 означает опрокидывание гиростата, а захват в G_4 – вращение, аналогичное первоначальному. Начальные условия, отвечающие захватам в G_1, G_2 и в G_4 при малых ε перемешаны, так что имеет смысл говорить о вероятностях захвата в ту или иную область.

Вероятностный подход к задачам рассматриваемого типа был введен ранее [4, 5]. Вероятность $P_l(M_0)$ захвата траектории с начальным условием $M_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ определяется следующим образом [5]. Пусть $U^{(\delta)}$ – круг радиуса δ с центром M_0 на сфере (1.4) и $U_l^{(\delta, \varepsilon)}$ – множество начальных (при $\mu = \mu_0$) условий из $U^{(\delta)}$, которым соответствуют траектории с захватом в G_l . Тогда по определению

$$P_l(M_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{mes } U_l^{(\delta, \varepsilon)}}{\text{mes } U^{(\delta)}} \quad (2.3)$$



Фиг. 4

где $\text{mes}(\cdot)$ – площадь на сфере. Предел (2.3) существует и вычисляется по формуле [2]

$$P_4(M_0) = \frac{dS_4/d\mu}{2dS_1/d\mu + dS_4/d\mu}, \quad P_{1,2}(M_0) = \frac{1}{2}(1 - P_4(M_0)) \quad (2.4)$$

В этой формуле надо брать значения производных $dS/d\mu$ при $\mu = \mu_*$, где μ_* – рассчитанное в адиабатическом приближении значение параметра μ при пересечении сепаратрисы фазовой траекторией с начальным условием M_0 .

Уравнения сепаратрис выражаются через элементарные функции с использованием интеграла (1.5) невозмущенной задачи. Непосредственное вычисление площадей и их производных приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} S_{4,1} &= \pi \left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{i_2 i_3}} \right) \pm 2I \\ I &= \arcsin \frac{1}{\lambda} - \frac{\sqrt{p^2 - \lambda^2}}{2p} \sum_{\pm} \arcsin \frac{p \pm \lambda^2}{\lambda(p \pm 1)} \\ \lambda^2 &= \frac{i_2 i_3 - \mu^2}{i_3(i_2 - i_3)}, \quad p^2 = \frac{i_2}{i_2 - i_3} \\ \frac{\partial S_{4,1}}{\partial \mu} &= -\frac{\pi}{\sqrt{i_2 i_3}} \pm 2 \frac{\partial I}{\partial \mu} \\ \frac{\partial I}{\partial \mu} &= \frac{\mu}{i_3(i_2 - i_3)} \left[\frac{1}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} - \frac{1}{2p \sqrt{p^2 - \lambda^2}} \sum_{\pm} \arcsin \frac{p \pm \lambda^2}{\lambda(p \pm 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{p^2 - \lambda^2}}{2p \lambda^2} \sum_{\pm} \frac{p \mp \lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 (p \pm 1)^2 - (p \pm \lambda^2)^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Была проведена серия расчетов для сравнения вероятностей различных исходов эволюции вращения, полученных по конечным формулам и в результате численного интегрирования исходных уравнений (1.3). На единичной сфере (1.4) была выбрана область начальных данных для уравнений (1.3), для которой значения x_2 , x_3 лежат внутри квадрата $0 \leq x_2 \leq 0,05$; $0,5 \leq x_3 \leq 0,55$. На фиг. 4 представлен один из резуль-

татов эволюции вращения гиростата в ходе раскрутки ротора для различных начальных данных для уравнений (1.3), лежащих на единичной сфере (1.4) и имеющих значения x_2, x_3 внутри фрагмента указанного квадрата (полная картина мало отличается от представленной). Финальное движение с начальными данными внутри заштрихованных полос происходит в области G_4 , остальное поле квадрата – это начальные данные, приводящие к движению в областях G_1 и G_2 , т.е. к опрокидыванию спутника. Были выбраны следующие значения параметров системы: $i_1 = 0,7$, $i_2 = 0,6$, $i_3 = 0,5$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Как показали результаты численного интегрирования, для выбранных параметров вероятности попадания траектории в область G_4 и в объединение областей G_1 и G_2 равны соответственно 0,18 и 0,82. Вычисления по конечным формулам (2.4), (2.5) дают 0,17 и 0,83. При этом значение параметра μ , отвечающее моменту пересечения сепаратрисы, выбиралось как среднее значение для всех траекторий из представленного квадрата: $\mu = 0,4902$.

3. Быстрый переход через сепаратрису. Рассмотрим теперь случай, когда ротор раскручивается быстро: $\varepsilon \gg 1$. Обозначим $\nu = 1/\varepsilon \ll 1$. Раскрутка начинается при $\mu = \mu_0$ и заканчивается при $\mu = 0$. В главном приближении по ν можно считать, что за время раскрутки величины x_i не успевают измениться. Опрокидывания гиростата не происходит, если в начальный момент, при $\mu = \mu_0$, фазовая траектория находится в области G_3 , построенной для $\mu = 0$, т.е. если в начальный момент $i_2^2 x_2^2 + i_3^2 x_3^2 < i_2^2$. В следующем приближении по ν получаем, что за время раскрутки координаты x_i изменяются на величины Δx_i , причем

$$\Delta x_2 = \nu(\mu_0 i_3 x_1 x_3 - \mu_0^2 x_3 / 2), \quad \Delta x_3 = \nu(\mu_0^2 x_2 / 2 - \mu_0 i_2 x_1 x_2) \quad (3.1)$$

Опрокидывания гиростата не происходит, если начальная (при $\mu = \mu_0$) точка (x_1, x_2, x_3) такова, что точка $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ лежит в области G_3 , построенной для $\mu = 0$. Использование соотношений (3.1) дает условие неопрокидывания

$$i_2^2 x_2^2 + i_3^2 x_3^2 - \nu(i_2^2 - i_3^2)\mu_0^2 x_2 x_3 < i_2^2$$

В заключение отметим, что переход через сепаратрису является принципиально важным во многих актуальных задачах динамики твердого тела. Обзор подобного рода задач содержится в [6].

Авторы благодарят В.В. Белецкого за обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00538) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 97-10771).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall C.D. Resonance capture in axial gyrostatt // J. Astronaut. Sc. 1995. V. 43. № 2. P. 127–138.
2. Нейштадт А.И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 621–632.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
4. Лифшиц И.М., Слуцкий А.А., Набутковский В.М. О явлении "рассеяния" заряженных квазичастиц на особых точках в p -пространстве // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 3. С. 553–556.
5. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
6. Neishtadt A.I. Probability phenomena due to separatrix crossing // Chaos. 1991. V. 1. № 1. P. 42–48.

Москва
e-mail: aneishta@mx.iki.rssi.ru
mp@mx.iki.rssi.ru

Поступила в редакцию
2.III.2000