

УДК 539.3

© 2000 г. В.М. Александров, А.А. Шматкова

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД МУЛЬТОППА–КАЛАНДИЯ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ

В условиях плоской деформации в перемещениях рассмотрены задачи о равновесии упругого круглого диска и упругой плоскости с круговым отверстием. Затем на основании решения этих задач поставлена контактная задача для подшипника скольжения. Относительно контактного давления получено интегральное уравнение первого рода с разностным ядром, имеющим особенность логарифмического вида. Для решения этого уравнения развит специальный вариант метода Мультотпа – Каландия. Даны численные результаты.

Ранее контактная задача для подшипника скольжения другими методами исследовалась неоднократно; отметим, например, монографию [1] и недавнюю работу [2]. Ниже в отличие от работ других авторов впервые получена важная для практики характеристика: связь между вдавливающей силой и внедрением.

1. Общее решение уравнений теории упругости в полярной системе координат. В условиях плоской деформации будем искать решение уравнений Ламе при отсутствии массовых сил в полярной системе координат r, θ в виде

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} u_r^{(n)}(r) \cos n\theta, \quad u_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} u_\theta^{(n)}(r) \sin n\theta \quad (1.1)$$

После несложных, но громоздких выкладок найдем [3]

$$\begin{aligned} u_r^{(0)}(r) &= (1 - \kappa)C_1^{(0)}y - (1 + \kappa)C_2^{(0)}y^{-1} \\ u_r^{(1)}(r) &= 2[(2 - \kappa)C_1^{(1)}y^2 - (2 + \kappa)C_2^{(1)}y^{-2} + D_1^{(1)}(1 - \kappa \ln y) - \kappa D_2^{(1)}] \\ u_\theta^{(1)}(r) &= -2[(2 + \kappa)C_1^{(1)}y^2 + (2 - \kappa)C_2^{(1)}y^{-2} - \kappa(D_1^{(1)} \ln y + D_2^{(1)})] \\ \begin{Bmatrix} u_r^{(n)}(r) \\ u_\theta^{(n)}(r) \end{Bmatrix} &= \pm 2[(n + 1 \mp \kappa)C_1^{(n)}y^{n+1} \mp (n + 1 + \kappa)C_2^{(n)}y^{-n-1} + \\ &+ (n - 1 - \kappa)D_1^{(n)}y^{n-1} \mp (n - 1 \pm \kappa)D_2^{(n)}y^{-n+1}] \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $y = r/a$, a – характерный радиус тела, $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, D_1^{(n)}$ и $D_2^{(n)}$ – произвольные постоянные, $\kappa = 3 - 4\nu$, ν – коэффициент Пуассона.

По формулам закона Гука определим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_r^{(n)}(r) \cos n\theta, \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_\theta^{(n)}(r) \cos n\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2G}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\theta}^{(n)}(r) \sin n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_r^{(0)}(r) \\ \sigma_\theta^{(0)}(r) \end{Bmatrix} &= -2C_1^{(0)}y \pm (1+\kappa)C_2^{(0)}y^{-1} \\
\sigma_r^{(1)}(r) &= 2[-2C_1^{(1)}y^2 + 2(2+\kappa)C_2^{(1)}y^{-2} - (3+\kappa)D_1^{(1)}/2] \\
\sigma_\theta^{(1)}(r) &= -2[6C_1^{(1)}y^2 + 2(2+\kappa)C_2^{(1)}y^{-2} + (1-\kappa)D_1^{(1)}/2] \\
\tau_{r\theta}^{(1)}(r) &= -2[2C_1^{(1)}y^2 - 2(2+\kappa)C_2^{(1)}y^{-2} + (1-\kappa)D_1^{(1)}/2] \\
\begin{Bmatrix} \sigma_r^{(n)}(r) \\ \sigma_\theta^{(n)}(r) \end{Bmatrix} &= \pm 2[(n+1)(n \mp 2)C_1^{(n)}y^{n+1} + (n+1)(n+1+\kappa)C_2^{(n)}y^{-n-1} + \\
&+ (n-1)(n-1-\kappa)D_1^{(n)}y^{n-1} + (n-1)(n \pm 2)D_2^{(n)}y^{-n+1}] \quad (n \geq 2) \\
\tau_{r\theta}^{(n)}(r) &= -2[n(n+1)C_1^{(n)}y^{n+1} - (n+1)(n+1+\kappa)C_2^{(n)}y^{-n-1} + \\
&+ (n-1)(n-1-\kappa)D_1^{(n)}y^{n-1} - n(n-1)D_2^{(n)}y^{-n+1}] \quad (n \geq 2)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь G – модуль сдвига.

2. Равновесие круглого диска и плоскости с круговым отверстием под действием произвольной нормальной нагрузки. Рассмотрим задачу о равновесии упругого диска радиуса a , нагруженного в центре сосредоточенной силой P , которая уравнивается распределенной при $r = a$ нормальной нагрузкой $q(\theta)$ (фиг. 1). Пусть $q(\theta)$ – достаточно гладкая, четная функция. Тогда

$$q(\theta) = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos n\theta, \quad q_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(\psi) \cos n\psi d\psi \tag{2.1}$$

Граничные условия задачи при $r = a$ имеют вид

$$\sigma_r = -q(\theta), \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.2}$$

Кроме того, учтем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) d\theta = -P \tag{2.3}$$

и отсутствует жесткое смещение диска в направлении оси y , определяемое формулой

$$v = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \tag{2.4}$$

Из условий (2.2) и (2.3) на основании формул (1.3) найдем

$$\begin{aligned}
C_2^{(n)} &= 0 \quad (n \geq 0), \quad D_2^{(n)} = 0 \quad (n \geq 2) \\
C_1^{(0)} &= \frac{q_0 a}{8G}, \quad C_1^{(1)} = -\frac{q_1 a(1-\kappa)}{16G(1+\kappa)} \\
C_1^{(n)} &= \frac{q_n a}{8G(n+1)} \quad (n \geq 2), \quad D_1^{(n)} = -\frac{q_n a n}{8G(n-1)(n-1-\kappa)} \quad (n \geq 2) \\
D_1^{(1)} &= \frac{q_1 a}{4G(1+\kappa)}, \quad D_1^{(1)} = \frac{P}{4G\pi(1+\kappa)}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Последние два равенства (2.5) непротиворечивы, если принять во внимание, что из условия равновесия диска

$$P = a \int_{-\pi}^{\pi} q(\theta) \cos \theta d\theta \tag{2.6}$$

следует $q_1 = P(\pi a)^{-1}$. Условие отсутствия жесткого смещения диска в направлении оси y на основании формул (1.2) дает

$$D_2^{(1)} = 0 \quad (2.7)$$

Подводя итог, по формулам (1.1), (1.2) с учетом (2.1) и результатов (2.5), (2.7) получим для u_r при $r = a$ выражение

$$u_r = -\frac{a}{8\pi G} \left[-(1-\kappa) \int_{-\pi}^{\pi} q(\psi) d\psi + \frac{(2-\kappa)(1-\kappa)-4}{1+\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} q(\psi) \cos t d\psi + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) \int_{-\pi}^{\pi} q(\psi) \cos nt d\psi \right] \quad (t = \theta - \psi) \quad (2.8)$$

Суммируя здесь ряды с помощью соотношений [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{1}{2} (\pi \operatorname{sgn} t - t) \quad (2.9)$$

окончательно при $r = a$ будем иметь

$$u_r = -\frac{a}{\pi \vartheta} \int_{-\pi}^{\pi} q(\psi) K_1(t) d\psi \quad \left(\vartheta = \frac{G}{1-\nu} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \right) \quad (2.10)$$

$$K_1(t) = -\cos t \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{1}{2} - \frac{1-\kappa}{2(1+\kappa)} \sin t (\pi \operatorname{sgn} t - t) - \frac{1+2\kappa}{(1+\kappa)^2} \cos t$$

Теперь рассмотрим задачу о равновесии упругой плоскости с отверстием радиуса a под действием распределенной при $r = a$ нормальной нагрузки $q(\theta)$ вида (2.1) (фиг. 2).

Граничные условия задачи при $r = a$ имеют вид (2.2). Кроме того, учтем, что при $r \rightarrow \infty$ справедливо соотношение (2.3) и отсутствует жесткое смещение плоскости с отверстием в направлении оси y . Далее по схеме, изложенной выше для предыдущей задачи, с помощью формул (1.1) – (1.3) получим такое выражение для u_r при $r = a$:

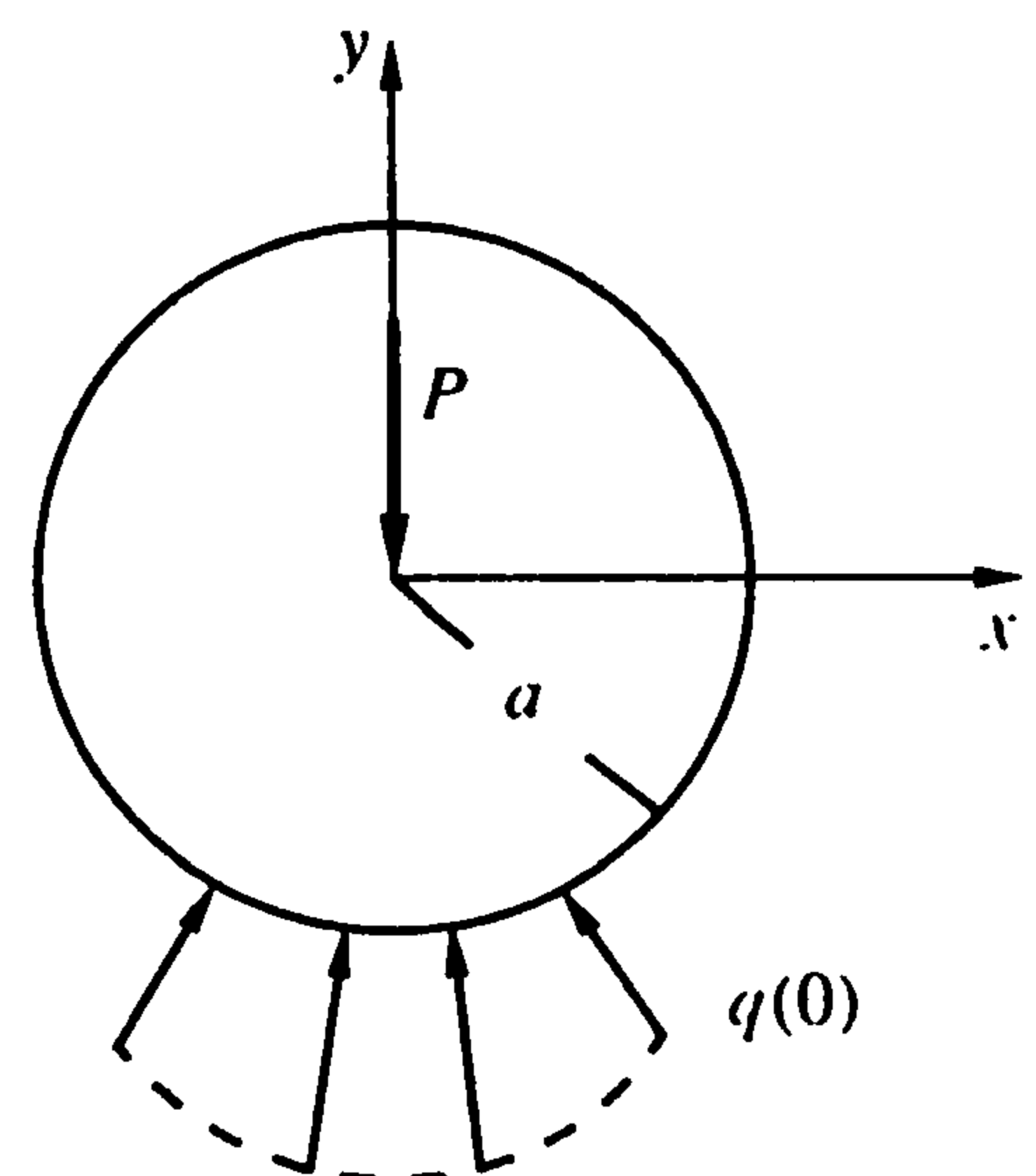
$$u_r = \frac{a}{\pi \vartheta} \int_{-\pi}^{\pi} q(\psi) K_2(t) d\psi \quad (2.11)$$

$$K_2(t) = -\cos t \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| + \frac{1-\kappa}{2(1+\kappa)} \sin t (\pi \operatorname{sgn} t - t) + \frac{1}{(1+\kappa)^2} \cos t$$

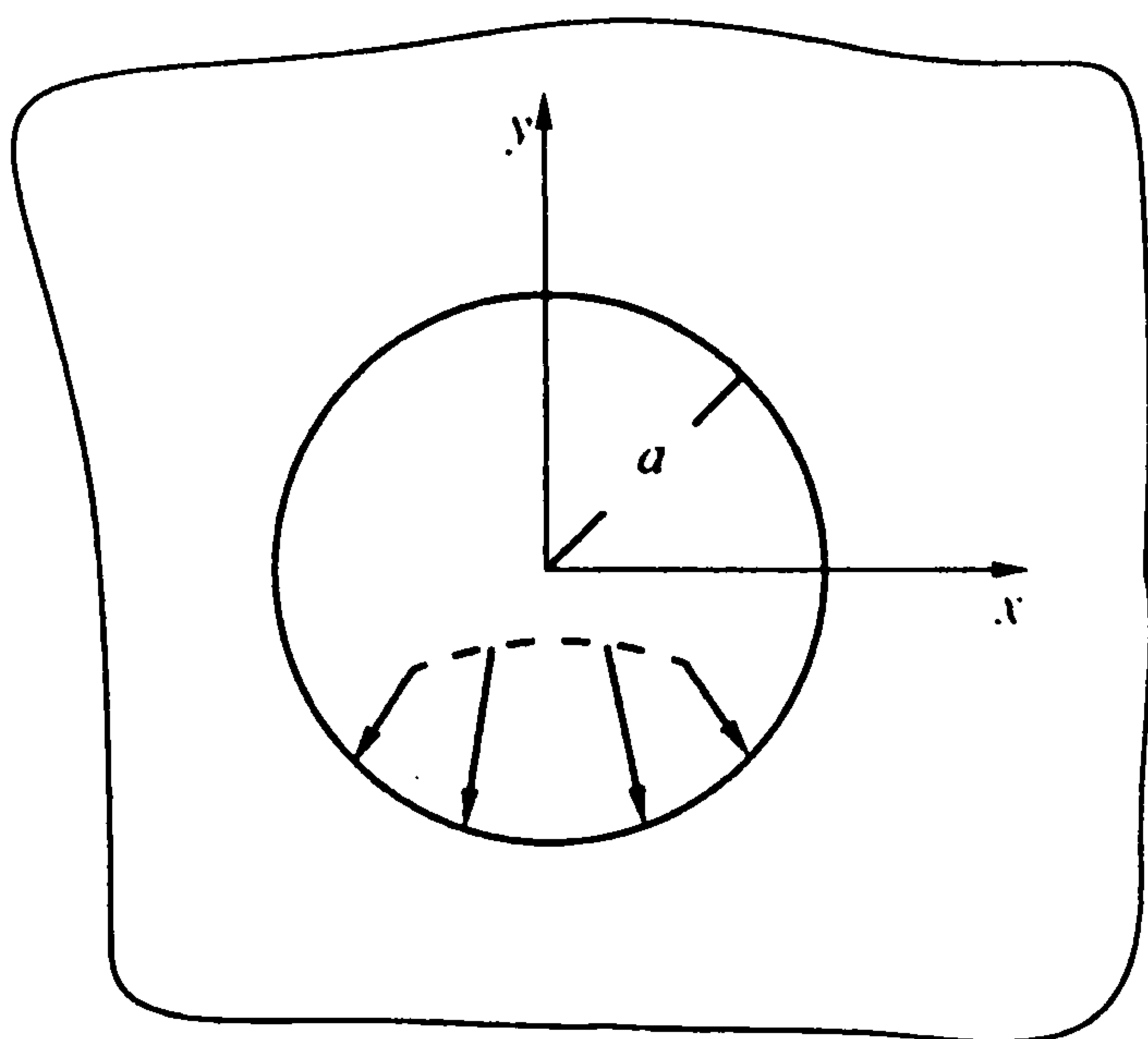
3. Постановка контактной задачи для подшипника скольжения. С помощью соотношений (2.10) и (2.11) изучим контактную задачу для подшипника скольжения.

Пусть упругий диск радиуса $b = a - \Delta$ вдавливаются приложенной в его центре силой P в поверхность отверстия радиуса a в упругой плоскости. Для простоты будем далее полагать, что диск и плоскость с отверстием изготовлены из одного материала, а величина $\Delta/a \ll 1$.

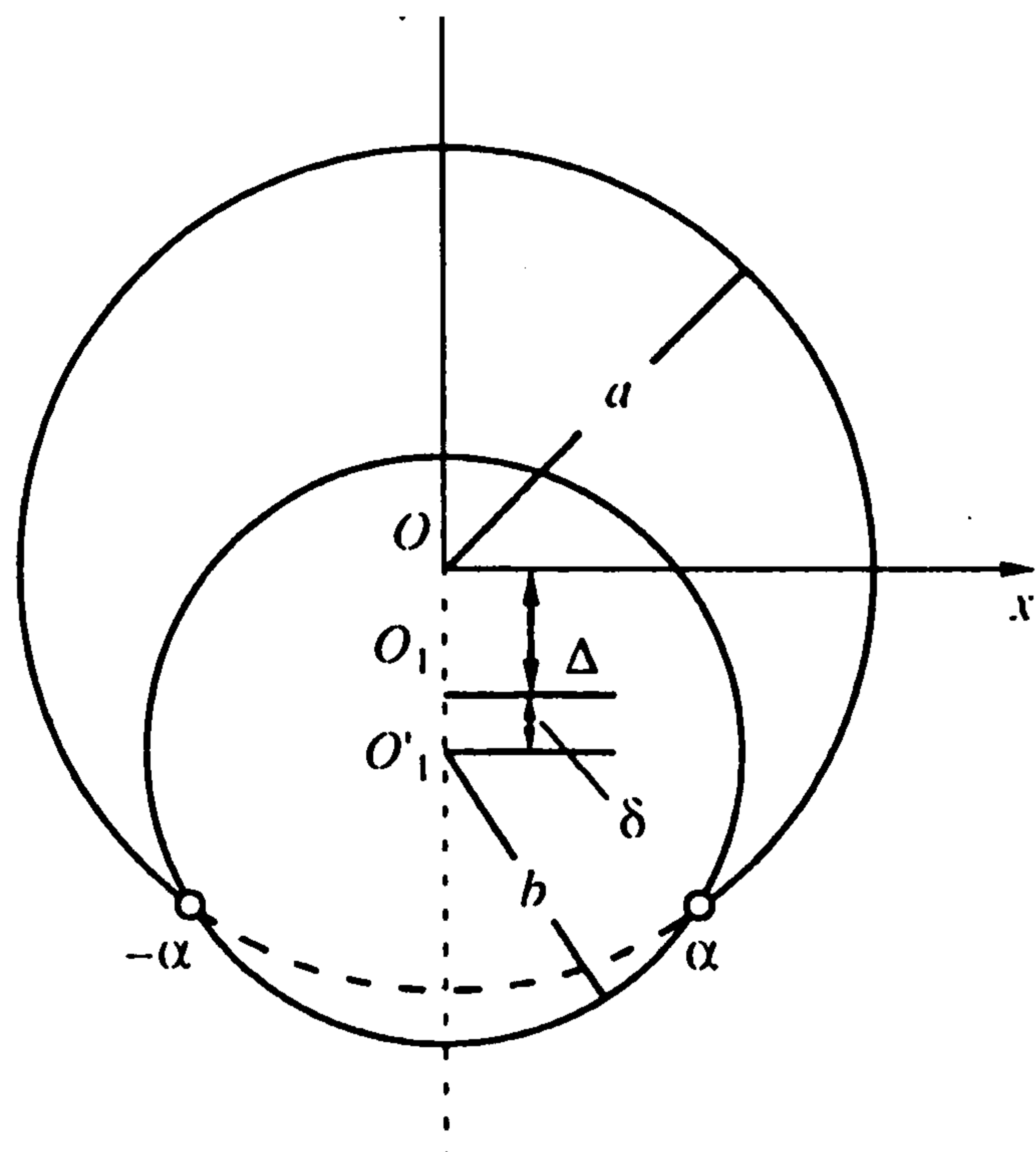
Под действием силы P диск переместится поступательно в направлении силы на величину δ и между поверхностями диска и плоскости с отверстием образуется область контакта $|\theta| \leq \alpha$ (фиг. 3, величины Δ и δ для ясности на фигуре утрированы). В области контакта возникает контактное давление $p(\theta)$, уравновешивающее силу P . Условие контакта диска и плоскости с отверстием, учитывающее разность радиусов



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

диска и отверстия на величину Δ и жесткое смещение диска в направлении силы на величину δ , можно записать в виде [5]

$$-u_1(\theta) + u_2(\theta) = (\Delta + \delta) \cos \theta - \Delta \quad (3.1)$$

где $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ – соответственно радиальные перемещения в области контакта точек диска и плоскости с отверстием.

Принимая для $u_1(0)$ выражение (2.10) (здесь ввиду малости Δ/a считаем, что $b = a$), а для $u_2(\theta)$ – выражение (2.11) и полагая в (2.10) и (2.11), что

$$q(\theta) = p(\theta) \quad (|\theta| \leq \alpha), \quad q(\theta) = 0 \quad (\alpha < |\theta| \leq \pi) \quad (3.2)$$

на основании (3.1) получим интегральное уравнение

$$-\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| d\psi = \frac{\pi \delta}{2a} \delta(\theta) - \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) F(t) d\psi \quad (|\theta| \leq \alpha) \quad (3.3)$$

$$\delta(\theta) = (\Delta + \delta) \cos \theta - \Delta$$

$$F(t) = (1 - \cos t) \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \cos t - \frac{1}{4}$$

служащее для определения контактного давления. Для завершения постановки задачи к уравнению (3.3) нужно добавить условие равновесия диска

$$P = a \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\theta) \cos \theta d\theta \quad (3.4)$$

и условие ограниченности контактного давления в точках $\theta = \pm\alpha$, которое обычно приводится к виду [6]

$$p(\pm\alpha) = 0 \quad (3.5)$$

4. Метод решения. Модифицируя метод Мультиппа – Каландия [7–9], применим его для решения интегрального уравнения (3.3).

В соответствии с известными результатами [6] о структуре решения интегральных

уравнений контактных задач будем искать решение уравнения (3.3) в форме

$$p(\theta) = \frac{\cos(\theta/2)\omega(\theta)}{\sqrt{2[\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)]}} \quad (4.1)$$

Подставляя выражение (4.1) в (3.3) и производя замены переменных по формулам

$$x = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)}, \quad \xi = \frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (4.2)$$

после ряда преобразований перепишем интегральное уравнение (3.3) следующим образом:

$$-\int_{-1}^1 \frac{\omega_*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} [\ln|x-\xi| + L_\alpha] d\xi = \frac{\pi\vartheta}{2\sqrt{2a}} \delta_*(x) - \int_{-1}^1 \frac{\omega_*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \Psi(x, \xi) d\xi \quad (4.3)$$

$$\omega_*(x) = \omega(g(x)), \quad L_\alpha = \ln[2\sin(\alpha/2)], \quad \delta_*(x) = \delta(g(x))$$

$$\Psi(x, \xi) = [F(g(x) - g(\xi)) + F(g(x) + g(\xi))]/2, \quad g(x) = 2\arcsin(x\sin(\alpha/2))$$

Вновь произведем замены переменных теперь уже в интегральном уравнении (4.3) по формулам

$$x = \cos \theta', \quad \xi = \cos \psi'$$

и перепишем его следующим образом (штрихи далее опускаем):

$$-\int_0^\pi \tilde{\omega}(\psi) [\ln|\cos \theta - \cos \psi| + L_\alpha] d\psi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tilde{\delta}(\theta) - \int_0^\pi \tilde{\omega}(\psi) \Psi(\cos \theta, \cos \psi) d\psi \quad (4.4)$$

$$\tilde{\omega}(\theta) = (\vartheta\delta)^{-1} a\omega_*(\cos \theta), \quad \tilde{\delta}(\theta) = \delta^{-1}\delta_*(\cos \theta)$$

Заметим также, что в силу второй формулы (3.3)

$$\tilde{\delta}(\theta) = (1 + \varepsilon)[1 - 2\cos^2 \theta \sin^2(\alpha/2)] - \varepsilon, \quad \varepsilon = \Delta/\delta$$

Далее понадобятся следующие результаты.

А. Полином Лагранжа по чебышевским узлам

$$\theta_n = \pi(2n-1)[4(i+1)]^{-1}, \quad n=1, 2, \dots, i+1; \quad i \geq 1$$

для четной функции $f(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) дается формулой [7–9]

$$f(\theta) \approx \frac{1}{i+1} \sum_{n=1}^{i+1} f(\theta_n) [1 + 2 \sum_{m=1}^i \cos(2m\theta_n) \cos(2m\theta)] \quad (4.5)$$

Б. На основании (4.5) имеет место квадратурная формула типа Гаусса [7–9]

$$\int_0^\pi f(\psi) d\psi = \frac{\pi}{i+1} \sum_{n=1}^{i+1} f(\theta_n) \quad (4.6)$$

В. Для интегрального оператора, стоящего в левой части уравнения, (4.4) справедливо спектральное соотношение вида [10]

$$-\int_0^\pi \cos(2m\psi) [\ln|\cos \theta - \cos \psi| + L_\alpha] d\psi = \begin{cases} -\pi \ln[\sin(\alpha/2)] & (m=0) \\ \pi(2m)^{-1} \cos(2m\theta) & (m \geq 1) \end{cases} \quad (4.7)$$

Подставим в левую часть интегрального уравнения (4.4) функцию $\tilde{\omega}(\theta)$ в форме (4.5) и вычислим интеграл с помощью соотношения (4.7). В правой части уравнения (4.4) вычислим интеграл по формуле (4.6). После вычисления интегралов положим в

полученном из (4.4) соотношении $\theta = \theta_k$ ($k = 1, 2, \dots, i + 1$). В результате придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{\omega}(\theta_n)$:

$$\sum_{n=1}^{i+1} \tilde{\omega}(\theta_n) \{-\ln[\sin(\alpha/2)] + \Phi_i(\theta_k, \theta_n) + \Psi(\cos \theta_k, \cos \theta_n)\} = \frac{i+1}{2\sqrt{2}} \tilde{\delta}(\theta_k) \quad (4.8)$$

$$\Phi_i(\theta, \psi) = \sum_{m=1}^i \frac{1}{m} \cos(2m\theta) \cos(2m\psi)$$

5. Результаты решения. После решения системы уравнений (4.8) искомую функцию контактного давления $p(\theta)$ при учете соотношений (4.1), (4.3) – (4.5) представим в виде

$$p(\theta) \approx \frac{\vartheta \delta \cos(\theta/2)}{a\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^i a_m T_{2m}(x) \quad (5.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{i+1} \sum_{n=1}^{i+1} \tilde{\omega}(\theta_n), \quad a_m = \frac{2}{i+1} \sum_{n=1}^{i+1} \tilde{\omega}(\theta_n) \cos(2m\theta_n) \quad (m \geq 1)$$

где x дается формулой (4.2), а $T_{2m}(x)$ – полиномы Чебышева первого рода. По формуле (3.4) теперь нетрудно получить соотношение, связывающее действующую на диск силу P с перемещением диска δ в направлении силы

$$P = -\vartheta \delta \pi \sqrt{2} f_1(\alpha) \quad (5.2)$$

$$f_1(\alpha) = a_0 [\sin^2(\alpha/2) - 1] + a_1 \sin^2(\alpha/2)/2$$

На основании формулы

$$T_{2m}(x) - 1 = -2(1-x^2) \sum_{s=0}^{m-1} U_{2s}(x) \quad (m \geq 1) \quad (5.3)$$

где $U_{2s}(x)$ – полиномы Чебышева второго рода, и условия ограниченности (3.5) перепишем при учете равенства (5.2) выражение для контактного давления (5.1) в форме

$$p(\theta) = P \frac{\sqrt{(1-x^2)[1-x^2 \sin^2(\alpha/2)]}}{\pi a f_1(\alpha) \sin(\alpha/2)} \sum_{m=1}^i a_m \sum_{s=0}^{m-1} U_{2s}(x) \quad (5.4)$$

Само же условие ограниченности контактного давления (3.5) при этом примет вид

$$\sum_{m=0}^i a_m = 0 \quad (5.5)$$

откуда численно может быть найдена связь между ε и α . Пусть эта связь дается формулой $\varepsilon = f_2(\alpha)$, тогда в силу (5.2) также имеем

$$P = -\vartheta \Delta \pi \sqrt{2} f_1(\alpha) / f_2(\alpha) \quad (5.6)$$

Найдем еще коэффициент концентрации максимальных контактных давлений, введенный в [1] формулами

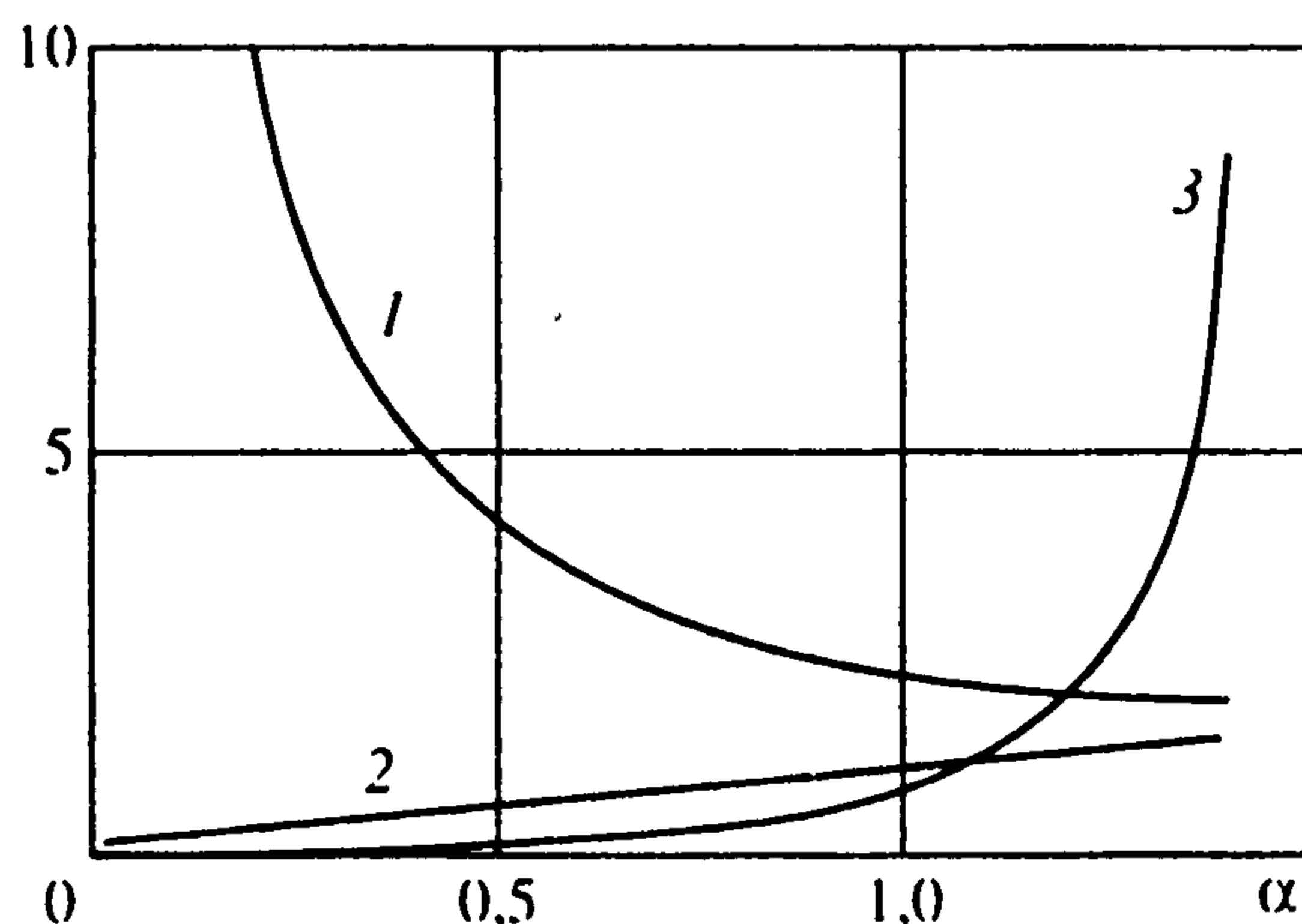
$$K = p(0) / p, \quad p = P / (\pi a) \quad (5.7)$$

На основании (5.4) получим

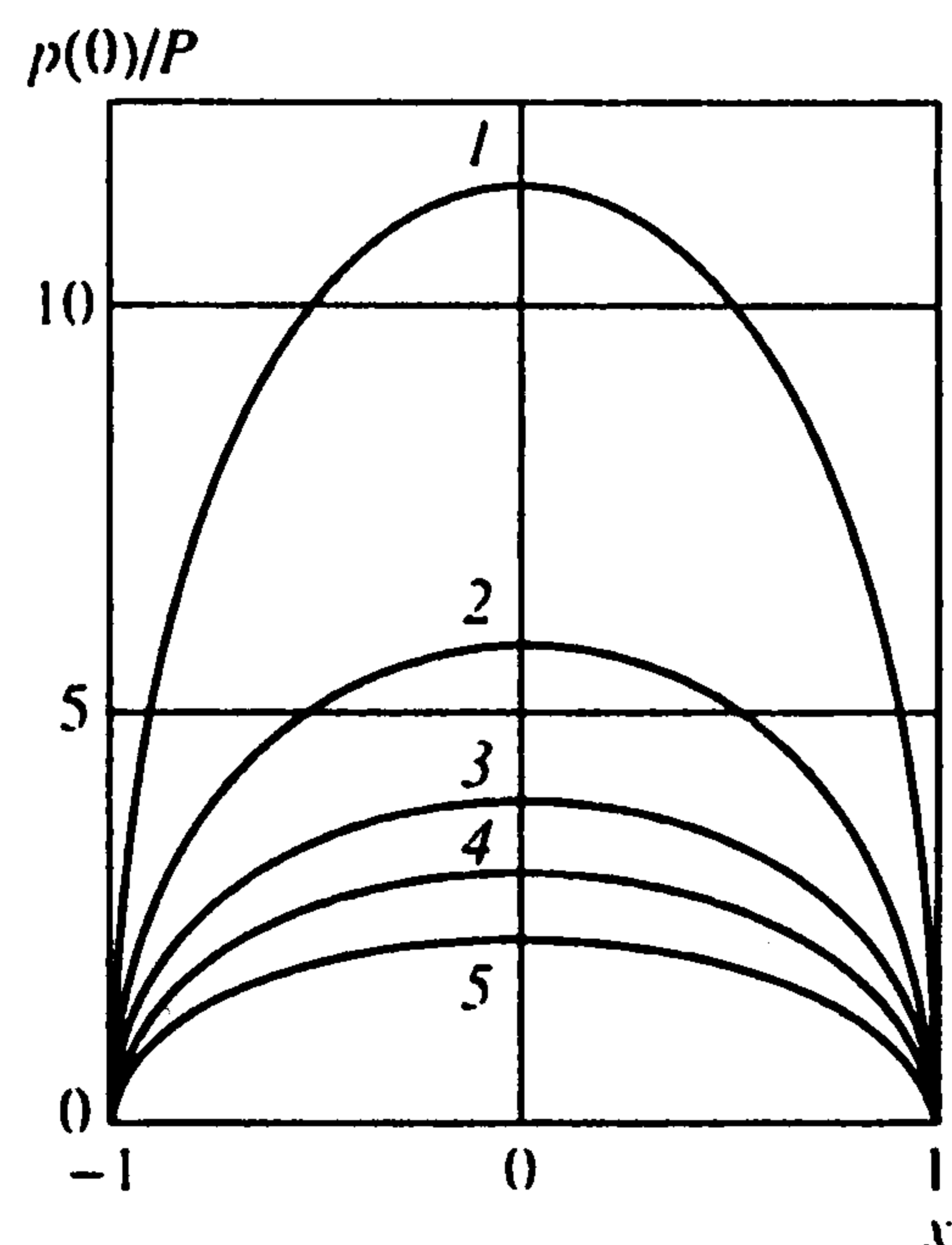
$$K = \frac{f_3(\alpha)}{f_1(\alpha) \sin(\alpha/2)}, \quad f_3(\alpha) = \sum_{m=1}^k a_{2m-1} \quad (5.8)$$

причем $i = 2k$ (четно) или $i = 2k - 1$ (нечетно).

Конкретные вычисления проведем при $\nu = 0,3$. На фиг. 4 даны зависимости от α : K (кривая 1), $P/(E\delta)$ (кривая 2), $P/(E\Delta)$ (кривая 3). Кривые 1 и 3 прекрасно совпадают с



Фиг. 4



Фиг. 5

результатами, полученными другим методом ([1, с. 22]). Важная для практики кривая 2 получена впервые. Кривая 3 при заданных P и Δ служит для определения угла контакта α , а по кривой 2 может быть далее при заданном значении P и уже известном α найдено внедрение δ .

На фиг. 5 даны графики отношения $p(\theta)/p$ как функции от x , кривые 1–5 соответствуют $\alpha = \pi/18, \pi/9, \pi/6, 2\pi/9, \pi/3$. Все вычисления проводились при $i = 14$ с шестнадцатью значащими цифрами. В случае удержания меньшего числа цифр быстро накапливается погрешность при достаточно больших углах $\alpha < \pi$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теплый М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Виш. шк., 1983. 176 с.
2. Коваленко Е.В. Математическое моделирование контактного взаимодействия упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 667–678.
3. Детинко Ф.М. Смешанная плоская задача для упругого диска // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 77–82.
4. Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. Александров В.М., Бабешко В.А., Белоконов А.В., Ворович И.И., Устинов Ю.А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины // Инж. журн. МТТ. 1966. № 1. С. 135–139.
6. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
8. Александров В.М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 91–94.
9. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
10. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1999