

УДК 539.3

© 2000 г. И.И. Аргатов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДАВЛЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА МЕМБРАНУ

Задача о давлении на мембрану штампа в форме эллиптического параболоида изучается в предположении малости площадки контакта. При помощи метода сращиваемых асимптотических разложений выводит задача одностороннего контакта для внутреннего асимптотического представления, решение которой строится на основании результатов для случая бесконечной мембраны [1]. Влияние границы мембраны моделируется при постановке асимптотических условий на бесконечности. Определяется зависимость между силой, вдавливающей штамп, и его перемещением. Исследуется чувствительность параметров эллиптической области контакта к размерам мембраны и положению центра штампа. Выписывается уточненная асимптотическая модель контактного взаимодействия.

1. Постановка задачи и ее обсуждение. Пусть на мембрану Ω , закрепленную по контуру $\partial\Omega$ и находящуюся под равномерным натяжением T , давит штамп в форме эллиптического параболоида

$$\Phi(\mathbf{x}^0; \mathbf{x}) = (2R_1)^{-1}(x_1 - x_1^0)^2 + (2R_2)^{-1}(x_2 - x_2^0)^2 \quad (1.1)$$

Здесь R_1 и R_2 – радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности штампа в его вершине $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Через δ_0 обозначим поступательное перемещение штампа.

Функция прогиба мембраны удовлетворяет задаче (см., например, [2, 3])

$$-T\Delta_x u(\mathbf{x}) \geq 0, \quad u(\mathbf{x}) \geq \delta_0 - \Phi(\mathbf{x}^0; \mathbf{x}) \quad (1.2)$$

$$\Delta_x u(\mathbf{x})[u(\mathbf{x}) - \delta_0 + \Phi(\mathbf{x}^0; \mathbf{x})] = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.3)$$

Исследуем задачу (1.2), (1.3) в предположении малости пятна контакта Σ . Обозначим ε малый положительный параметр и положим

$$R_1 = \varepsilon R_1^*, \quad R_2 = \varepsilon R_2^*; \quad \delta_0 = \varepsilon \delta_0^* \quad (1.4)$$

где величины δ_0^* и R_1^* , R_2^* сравнимы с расстоянием d_0 от точки $\mathbf{x}^0$ до границы $\partial\Omega$.

Область контакта Σ (там, где во втором неравенстве (1.2) реализуется знак равенства) заранее неизвестна. При некоторых ограничениях (см. [2], гл. 5, §§ 3, 6) можно априори утверждать, что Σ – односвязная область с гладкой границей $\partial\Sigma$. В соответствии с принятой формой штампа (1.1) давление $p(x_1, x_2) = T\Delta_x \Phi(\mathbf{x}^0; \mathbf{x})$, передаваемое штампом на мембрану, оказывается равномерным

$$p = T(R_1 + R_2)(R_1 R_2)^{-1} \quad (1.5)$$

Замечание 1. В силу принципа максимума (см. [4], § 2.2) из первого неравенства (1.2) при учете условия (1.3) вытекает $u(\mathbf{x}) \geq 0$. Это неравенство позволяет получить оценку для области

контакта (коинцидентного множества [2]). Так, принимая во внимание второе неравенство (1.2), находим, что область Σ , наверняка, охватывается эллипсом с центром в точке x^0 и полуосями $\sqrt{2\delta_0 R_1}$ и $\sqrt{2\delta_0 R_2}$. Следовательно, при условии (1.4) размеры пятна контакта будут порядка εd_0 .

Ранее [1] было получено точное решение контактной задачи для бесконечной мембраны. Полуоси $c_0(1+m)$ и $c_0(1-m)$ эллиптической области контакта выражены через величину P силы, действующей на штамп,

$$c_0^2 = \frac{P(R_1 + R_2)}{4\pi T}, \quad m = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}; \quad P = \iint_{\Sigma} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (1.6)$$

При попытке воспользоваться формулами (1.6) в случае конечной мембраны возникает вопрос о зависимости силы P от перемещения δ_0 . Заметим также, что, вообще говоря, центр пятна контакта смещается относительно вершины штампа и, следовательно, для обеспечения вертикального положения штампа к нему необходимо прикладывать моменты

$$M_1 = \iint_{\Sigma} (y_2 - x_2^0) p(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad M_2 = -\iint_{\Sigma} (y_1 - x_1^0) p(y) dy \quad (1.7)$$

Подставляя выражение (1.5) в последнее равенство (1.6) и соотношения (1.7), находим

$$P = p|\Sigma|; \quad M_1 = p|\Sigma|(x_2^c - x_2^0), \quad M_2 = -p|\Sigma|(x_1^c - x_1^0) \quad (1.8)$$

Здесь $|\Sigma|$ – площадь искомой области контакта, x_1^c и x_2^c – координаты ее центра тяжести. Ясно, что упомянутые величины должны зависеть от формы, размеров мембраны и местоположения штампа.

Задача (1.2), (1.3) изучалась в рамках теории вариационных неравенств [2, 5, 6]. Предлагались ([7, 8] и др.) алгоритмы численного решения. Развивались ([9] и др.) качественные методы. Было получено [1] асимптотическое решение задачи о равновесии нагруженной мембраны, подпертой несколькими малыми плоскими неустойчивыми опорами. Ниже используется метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [11–13] др.), апробированный [14] применительно к задаче одностороннего контакта для трехмерного упругого тела. Решение задачи для пограничного слоя строится с использованием результатов, полученных ранее [1].

2. Внешнее и внутреннее асимптотические представления. Обозначим через $G(x^0; x)$ функцию Грина с полюсом в точке x^0 . При $x \rightarrow x^0$ верна асимптотическая формула

$$G(x^0; x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{|x - x^0|} + o(1) \quad (2.1)$$

где r_0 – постоянная, имеющая размерность длины.

Замечание 2. В случае односвязной области Ω известно (см., например, [15, п. 43]) представление $G(x^0; x) = -(2\pi)^{-1} \ln |f(z^0; z)|$. Здесь $z = x_1 + ix_2$ – комплексная переменная, $\zeta = f(z^0; z)$ – конформное отображение области Ω на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$, причем $f(z^0; z^0) = 0$. Так как функция $(z - z^0)^{-1} f(z^0; z)$ имеет в точке z^0 устранимую особенность и

$$\lim_{z \rightarrow z^0} \frac{f(z^0; z)}{z - z^0} = \frac{df(z^0; z)}{dz} \Big|_{z=z^0} \equiv f'(z^0; z^0) \neq 0$$

формула (2.1) принимает вид

$$G(x^0; x) = -(2\pi)^{-1} \ln(|z - z^0| |f'(z^0; z^0)|) + o(1)$$

Величина $r_0 = |f'(z^0; z^0)|^{-1}$ совпадает с (внутренним) конформным радиусом области Ω относительно точки $z^0 = x_1^0 + ix_2^0$ (см. [16], § 1.3 [17], отд. IV).

Вдали от пятна контакта асимптотическое представление решения задачи (1.2), (1.3) назовем в виде

$$v(x) = \frac{P}{T} G(x^0; x) \quad (2.2)$$

На основании анализа осесимметричной задачи ввиду (1.4) можно написать

$$P = \varepsilon P^* \quad (2.3)$$

В окрестности зоны контакта $\Sigma(\varepsilon)$ введем "растянутые" координаты

$$\xi = \varepsilon^{-1}(x - x^0) \quad (2.4)$$

Тогда, если учесть новый масштаб, расстояние от вершины штампа до края мембраны становится равным $\varepsilon^{-1}d_0$. Поэтому задача для внутреннего асимптотического представления формулируется на всей плоскости.

Соотношения (1.2) дают

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi w(\varepsilon; \xi) &\geq 0, \quad w(\varepsilon; \xi) \geq \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\xi)) \\ \Delta_\xi w(\varepsilon; \xi)[w(\varepsilon; \xi) - \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\xi))] &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \\ \Phi^*(\xi) &= (2R_1^*)^{-1}\xi_1^2 + (2R_2^*)^{-1}\xi_2^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Краевое условие (1.2) заменяется асимптотическим условием поведения $w(\varepsilon; \xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, которое получим в результате сращивания с (2.2).

В зоне сращивания, где $\sqrt{\varepsilon}d_0/2 \leq |x - x^0| \leq \sqrt{\varepsilon}d_0$ или что то же самое $d_0/(2\sqrt{\varepsilon}) \leq |\xi| \leq d_0/\sqrt{\varepsilon}$, после подстановки (2.1), (2.3) в (2.2) и обратной к (2.4) замены координат имеем

$$v(\varepsilon; x^0 + \varepsilon\xi) = \frac{\varepsilon P^*}{T} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{\varepsilon |\xi|} + O(\sqrt{\varepsilon}) \right) \quad (2.6)$$

Поэтому формулу (2.5) замыкаем следующей:

$$w(\varepsilon; \xi) = \frac{\varepsilon P^*}{2\pi T} \ln \frac{r_0}{\varepsilon |\xi|} + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Таким образом, построение асимптотики исходной задачи в первом приближении свелось к решению задачи одностороннего контакта для пограничного слоя (2.5), (2.7) и вместе с этим выражению величины P^* через δ_0^* .

3. Уравнение, связывающее перемещение штампа с действующей на него силой. Решение контактной задачи (2.5), (2.7) для бесконечной мембраны будем искать в виде

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon W(\xi) \quad (3.1)$$

Обозначив через Σ^* соответствующую область контакта с границей $\partial\Sigma^*$, условие одностороннего контакта (2.5) заменяем (см. [2]) соотношениями

$$\Delta_\xi W(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 / \bar{\Sigma}^* \quad (3.2)$$

$$W(\xi) = \delta_0^* - \Phi^*(\xi), \quad \xi \in \partial\Sigma^* \quad (3.3)$$

$$\partial_i W(\xi) = -(R_i^*)^{-1}\xi_i \quad (i=1,2), \quad \xi \in \partial\Sigma^* \quad (3.4)$$

Условие на бесконечности переписывается так:

$$W(\xi) = \frac{P^*}{2\pi T} \ln \frac{r_0}{\varepsilon |\xi|} + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Решение задачи (3.2)–(3.5) было выражено [1] через комплексный потенциал

$$W(\xi) = \operatorname{Re} \varphi(\xi_1 + i\xi_2) \quad (3.6)$$

Установлено, что область Σ^* ограничена эллипсом, причем ее дополнение до расширенной комплексной плоскости представляет собой образ внешности единичного круга при конформном отображении

$$\xi_1 + i\xi_2 = \omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = c_0^* \zeta + c_1^* \zeta^{-1} \quad (3.7)$$

$$(c_0^*)^2 = (4\pi T)^{-1} P^* (R_1^* + R_2^*), \quad c_1^* = c_0^* (R_1^* - R_2^*) (R_1^* + R_2^*)^{-1} \quad (3.8)$$

Для производной комплексного потенциала получено выражение

$$\varphi'[\omega(\zeta)] = c_2 \zeta^{-1}; \quad c_2 = -2c_0^* (R_1^* + R_2^*)^{-1} \quad (3.9)$$

По формуле

$$\varphi[\omega(\zeta)] = \int \varphi'[\omega(\zeta)] \frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} d\zeta$$

используя соотношения (3.7) и (3.9), получаем

$$\varphi[\omega(\zeta)] = c_2 \left(c_0^* \ln \zeta + \frac{c_1^*}{2} \frac{1}{\zeta^2} + c_3^* \right) \quad (3.10)$$

Постоянную интегрирования c_3^* определяем, удовлетворяя краевому условию (3.3) при $|\zeta| = 1$. В итоге находим

$$c_3^* = \delta_0^* - (c_0^*)^2 (R_1^* + R_2^*)^{-1} \quad (3.11)$$

Таким образом, согласно (3.10), (3.7), функция (3.8) имеет следующее поведение на бесконечности:

$$W(\xi) = -c_2 c_0^* \ln(c_0^* |\xi|^{-1}) + c_3^* + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

Сопоставляя (3.12) с (2.7) при учете (3.8), (3.11) и (3.1), выводим

$$\delta_0^* - \frac{(c_0^*)^2}{R_1^* + R_2^*} = \frac{P^*}{2\pi T} \ln \frac{r_0}{\varepsilon c_0^*} \quad (3.13)$$

Вспоминая соглашения (1.4) и (2.3), уравнения (3.13) и (3.8) объединяем в одно

$$\frac{P}{4\pi T} \left(1 + \ln \frac{4\pi T r_0^2}{P(R_1 + R_2)} \right) = \delta_0 \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) служит для определения силы P через перемещение δ_0 .

Введем безразмерные величины

$$\tilde{P} = \frac{P}{4\pi T r_0}, \quad \tilde{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{R_1 + R_2}{r_0}$$

Тогда уравнение (3.14) примет вид

$$\tilde{P} + \Lambda^{-1} \tilde{P} \ln \tilde{P} = \Lambda^{-1} \tilde{\delta}_0, \quad \Lambda = 1 + \ln(1/\varepsilon) \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) содержит большой параметр λ и в свою очередь допускает

асимптотическое решение (см. [18], гл. 1, § 5).

Наконец, область контакта Σ близка к эллиптической. Ее получим в первом

приближении вычисляются по формулам (1.6), причем их среднее арифметическое

равно $c_0 = \varepsilon c_0^*$.

Примечательно, что в осесимметричной задаче формула (3.14), выражающая зависимость перемещения штампа от действующей на него силы, совпадает с точной.

4. Моменты системы нагрузок, удерживающей штамп в вертикальном положении.

В задаче для пораничного слоя (2.5), (2.7) влияние формы и размеров мембраны учтено при постановке асимптотического условия (2.7). Последнее получено на

основе формулы (2.1), которую нетрудно уточнить. Имеем

$$G(x^0; x) = \frac{1}{2} \ln \frac{|x - x^0|}{r_0} + \sum_{i=1}^2 B_i(x_i - x_i^0) + \sum_{i,j=1}^2 C_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) +$$

$$+ O(|x - x^0|^3), \quad x \rightarrow x^0$$

Зависащие от расположения точки x^0 величины B_i , B_2 и $C_{21} = C_{12}$, $C_{22} = -C_{11}$ соответственно имеют размерности L^{-1} и L^{-2} (L — размерность длины).

Принимая во внимание два первых члена суммы (4.1), вместо (2.7) можем написать

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^2 V^*(\xi) + \frac{\varepsilon P^*}{2\pi T} \ln \frac{\varepsilon |\xi|}{r_0} + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

$$V^*(\xi) = \frac{P^*}{2} \sum_{i=1}^T B_i \xi_i$$

Решение задачи (2.5), (4.2) представим в виде

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^2 V^*(\xi) + \varepsilon W(\xi)$$

Функция W удовлетворяет соотношению (3.5) и следующим соотношениям:

$$-\Delta_\xi W(\xi) \geq 0, \quad W(\xi) \geq \delta_0^* - \Phi^*(\xi) - \varepsilon V^*(\xi)$$

$$\Delta_\xi W(\xi) [W(\xi) - \delta_0^* + \Phi^*(\xi) + \varepsilon V^*(\xi)] = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

Так как правая часть во втором неравенстве (4.5) — многочлен второй степени, решение задачи (4.5), (3.5) строится при помощи известных результатов [1]. Выделяя полные квадраты, находим

$$\Phi^*(\xi) + \varepsilon V^*(\xi) = \sum_{i=1}^2 (2R_i^*)^{-1} (\xi_i - \xi_{ci}^*)^2 + O(\varepsilon^2)$$

$$\xi_{ci}^* = -\varepsilon P^* T^{-1} R_i^* B_i \quad (i = 1, 2)$$

Поскольку при формулировке (4.2) в разложении (4.1) после замены (2.4) сохранены только члены $O(\varepsilon |\xi|)$ (см. (4.3)), в формуле (4.6) постоянная более высокого порядка малости не учитывается.

Таким образом, в рамках принятой точности центр пятна контакта смещается в точку с координатами (4.7) или (возвращаемся к реальному масштабу, вспоминая формулы (1.5), (2.3), (2.4))

$$x_i^i = x_i^0 - P T^{-1} R_i^* B_i \quad (i = 1, 2)$$

Размеры площади контакта Σ по-прежнему определяются формулами (1.6), причем в главном $|\Sigma| = \pi c_0^2 (1 - m^2)$. Зависимость (3.14) перемещения от силы не изменяется.

Моменты (1.7) находятся по формулам (1.8), (4.8) в виде

$$M_1^* = P^* \xi_2^c, \quad M_2^* = -P^* \xi_1^c \quad (4.9)$$

$$M_i = \varepsilon^2 M_i^* \quad (i = 1, 2) \quad (4.10)$$

Наконец, вместо (3.12) получаем следующее разложение:

$$W(\xi) = \frac{P^*}{2\pi T} \ln \frac{c_0^*}{|\xi|} + \frac{P^*}{2\pi T} \frac{\xi_1^c \xi_1 + \xi_2^c \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

5. Уточнение конструкции асимптотики. Формула (4.11) диктует обновление внешнего асимптотического представления (2.2). Положим

$$v(x) = \frac{P}{T} G(x^0; x) + \sum_{i=1}^2 \frac{M_i}{T} G^{(i)}(x^0; x). \quad (5.1)$$

Здесь введены решения задач о действии на мембрану сосредоточенных моментов

$$G^{(1)}(x^0; x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x_2 - x_2^0}{|x - x^0|^2} + g^{(1)}(x^0; x), \quad (5.2)$$

$$G^{(2)}(x^0; x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_1 - x_1^0}{|x - x^0|^2} + g^{(2)}(x^0; x),$$

$$g^{(i)}(x^0; x) = A_0^{(i)} + O(|x - x^0|), \quad x \rightarrow x^0 \quad (i = 1, 2) \quad (5.3)$$

Привлекая (4.1) и (5.3), при учете (2.3), (4.10) формируем следующее асимптотическое условие для пограничного слоя (сравните с (4.2), (4.3)):

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^2 V^*(\varepsilon; \xi) + \frac{\varepsilon P^*}{2\pi T} \ln \frac{c_0^*}{|\xi|} + \frac{\varepsilon}{2\pi T} \frac{-M_2^* \xi_1 + M_1^* \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

$$V^*(\varepsilon; \xi) = \frac{P^*}{T} \left(\sum_{i=1}^2 B_i \xi_i + \varepsilon \sum_{i,j=1}^2 C_{ij} \xi_i \xi_j \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{M_i^*}{T} A_0^{(i)} \quad (5.5)$$

Поясним, что формулы (5.4), (5.5) выводятся путем удержания невостробованных прежде членов (более высокого порядка малости) в разложениях (4.1) и (5.3). При этом используется информация, что величины M_i^* , согласно соотношениям (4.9), (4.7), оказываются порядка ε .

Итак, для внутреннего асимптотического представления (4.4) получена задача (2.5), (5.4). Выпишем ее асимптотическое решение. Так как, вообще говоря, коэффициент C_{12} отличен от нуля, эллиптическая область контакта оказывается повернутой относительно координатных осей на некоторый угол φ . Если $R_1^* = R_2^*$, то φ определяется квадратичной формой

$$\sum_{i,j=1}^2 C_{ij} \xi_i \xi_j$$

Если, например, $R_1^* > R_2^*$, то с точностью до членов порядка ε^3 (такова точность формул (5.4), (5.5))

$$\varphi = -\varepsilon^2 \frac{2R_1^* R_2^*}{R_1^* - R_2^*} \frac{P^*}{T} C_{12} \quad (5.6)$$

Координаты (4.8) центра площадки контакта на данном этапе не уточняются. Ее

полуоси $\varepsilon c_0^*(1+m)$ и $\varepsilon c_0^*(1-m)$ вычисляются по формулам (уточняющим (1.6))

$$(c_0^*)^2 = \frac{P^*}{4\pi T} (R_1^* + R_2^*) - \varepsilon^2 \frac{(P^*)^2}{2\pi T} [(R_1^*)^2 - (R_2^*)^2] C_{11} \quad (5.7)$$

$$m = \frac{R_1^* - R_2^*}{R_1^* + R_2^*} - \varepsilon^2 \frac{4R_1^* R_2^*}{R_1^* - R_2^*} \frac{P^*}{T} C_{11} \quad (5.8)$$

В рамках принятой точности величины M_i^* отождествляются с (4.9). Для определения P^* , пренебрегая несущественными членами, выводим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{P^*}{4\pi T} \left(1 + \ln \frac{4\pi T r_0^2}{\varepsilon^2 P^* (R_1^* + R_2^*)} \right) + \\ & + \varepsilon^2 (P^*) T^{-2} [R_1^* B_1 A_0^{(2)} - R_2^* B_2 A_0^{(1)} - (2\pi)^{-1} (R_1^* - R_2^*) C_{11}] = \delta_0^* \end{aligned} \quad (5.9)$$

Таким образом, уточненная зависимость между силой, действующей на штамп, и его перемещением, согласно (5.9), (1.4), (2.3), оказывается такой:

$$\frac{P}{4\pi T} \left(1 + \ln \frac{4\pi T r_0^2}{P(R_1 + R_2)} \right) + \frac{P^2}{T^2} \left[R_1 B_1 A_0^{(2)} - R_2 B_2 A_0^{(1)} - \frac{1}{2\pi} (R_1 - R_2) C_{11} \right] = \delta_0 \quad (5.10)$$

Пример. Вычислим коэффициенты, входящие в соотношения (5.6)–(5.10) для круговой мембраны радиусом a . Используя конформное преобразование круга на единичный круг, переводящее точку x^0 в центр последнего (см., например, [15], п. 32)), находим (обозначения см. в замечании 2)

$$G(x^0; x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{|z - z^0|} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|a^2 - \bar{z}^0 z|}{ar_0}; \quad r_0 = a \left(1 - \frac{|z^0|^2}{a^2} \right)$$

Отсюда извлекаются фигурирующие в (4.1) коэффициенты

$$B_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_i^0}{ar_0}; \quad C_{11} = -C_{22} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2}{2a^2 r_0^2}, \quad C_{12} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_1^0 x_2^0}{a^2 r_0^2}$$

Постоянная $A_0^{(i)} = g^{(i)}(x^0; x^0)$ отыскивается как среднее арифметическое конформно преобразованных на единичную окружность граничных значений функции $g^{(i)}(x^0; x)$ (см. (5.2)). В результате несложных вычислений имеем

$$A_0^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_2^0}{ar_0}, \quad A_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{x_1^0}{ar_0}$$

6. Замечания. Попытка дальнейшего усложнения конструкции асимптотики приводит к появлению в решении задачи для пограничного слоя отклонения формы площадки контакта от эллиптической. Предпринималось [19, 20] изучение вариации области контакта.

Формулы (5.6)–(5.8) показывают чувствительность параметров пятна контакта к размерам мембраны и положению центра штампа. Напомним, что радиус r_0 , величины B_i , $A_0^{(i)}$ и C_{ij} имеют размерности L , L^{-1} и L^{-2} соответственно.

Заметим, что в рамках построенной асимптотической модели (см., в частности, формулы (4.1), (4.7), (4.9) и (3.14), (5.10)) положением равновесия маленького шарика на горизонтальной невесомой мембране оказывается точка локального максимума внутреннего конформного радиуса (см. также [16], § 1.3).

Если область Ω не односвязна, то для функции Грина не существует простой связи с конформным отображением (см. [21], § 223; [22], § 3 гл. VI). Тем не менее величина r_0 (гармонический радиус области Ω относительно точки x^0) наследует [23] основные свойства конформного радиуса (см. [17], отд. IV).

Автор благодарит С.А. Назарова за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0876).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Давление твердого тела на пластины и мембраны // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 282–290.
2. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. N.Y. etc.: Acad. Press, 1980. = Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
3. Лионс Ж. Некоторые математические проблемы, связанные с механикой деформируемых тел // Механика деформируемых тел: Направления развития. М.: Мир, 1983. С. 8–21.
4. Bers L., John F., Schechter M. Partial Differential Equations. N.Y.: Wiley, 1964. = Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. С. 351 с.
5. Duvaut G., Lions J.-L. Les Inéquations en Mécanique et en Physique. Paris: Dunod, 1972. = Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
6. Baiocchi C., Capelo A. Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems. Chichester etc.: Wiley, 1984. = Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988. 448 с.
7. Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R. Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles. Paris: Dunod, 1976. = Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
8. Ковтуненко В.А. Итерационный метод штрафа для задачи с ограничениями на внутренней границе // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 3. С. 587–591.
9. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
10. Назаров С.А. Асимптотическое решение задачи с малыми препятствиями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1031–1041.
11. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964. = Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. Mazja W.G., Nazarov S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin. Akademie – Verlag, 1991. 432 S.
14. Аргатов И.И. Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 671–679.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
16. Pólya G., Szegő G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton: Univ. Press, 1951. = Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
17. Pólya G., Szegő G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. 2. B. etc.: Springer, 1964. = Полюа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.
18. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
19. Назаров С.А. О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 115–126.
20. Аргатов И.И., Назаров С.А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 3–32.
21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 804 с.
22. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
23. Дубинин В.Н. Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. № 1. С. 3–76.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
14.X.1999