

УДК 539.3

© 2000 г. В.Я. Терещенко

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Устанавливается условие, при котором приближения "по Ритцу" и приближения "по Трефту" приводятся к единственному энергетическому приближению решения первой задачи теории упругости.

Геометрической формулировкой вариационного принципа Дирихле является метод ортогональных проекций, который для решения задачи Дирихле реализуется построением встречных приближений "по Ритцу" и "по Трефту" [1, 2]. Это означает, что норма точного (энергетического) решения оценивается сверху нормой приближенного решения "по Ритцу" и оценивается снизу нормой приближенного решения "по Трефту". Указанные оценки известны также как двусторонние и для решения u задачи Дирихле для оператора $\Delta^c = -\Delta + c$, $c(x) \geq \gamma > 0$ (Δ – оператор Лапласа) имеют вид [2].

$$\|u_n\|_{n=1,2,\dots} \leq \|u_{n+1}\| \leq \|u\| \leq \|r_{n+1}\| \leq \|r_n\|$$

где $\{u_n\}$ – приближения "по Трефту", $\{r_n\}$ – приближения "по Ритцу" и имеется в виду норма оператора Δ^c . Из этой цепочки неравенств следует, что для любого номера приближений n в некотором частном случае норма приближений "по Ритцу" равна норме приближений "по Трефту"; следовательно, приближения тождественны.

Ниже устанавливается условие тождественности приближений решения первой задачи теории упругости на основании обобщения вариационного принципа Дирихле в линейной теории упругости.

1. Вариационный принцип Дирихле, из которого следует метод решения гармонической задачи Дирихле, обобщается в следующей формулировке (доказательство аналогично): из всех достаточно гладких вектор-функций перемещений $u(x)$, $x \in \bar{G} = G + S$ с конечным интегралом энергии (допустимых), принимающих на границе области заданное значение, функция, на которой интеграл энергии принимает минимальное значение, является однородным решением уравнения линейной теории упругости. Соответственно из сказанного следует энергетический метод решения первой задачи теории упругости в ограниченной области G с достаточно гладкой границей S

$$Au_0(x) = 0, \quad x \in G; \quad u_0(x) = u^*, \quad x \in S \quad (1.1)$$

который описывается соотношениями

$$I(u_0) \leq I(u) = 2 \int_G W(u) dG \quad (1.2)$$

для всех допустимых вектор-функций u ($u|_S = u^*$) и

$$I(u_0, v) = 2 \int_G W(u_0, v) dG = 0 \quad (1.3)$$

для всех допустимых вектор-функций v ($v|_S = 0$).

Здесь $2W(u)$ – общепринятое обозначение [I] квадратичной формы компонент тензора упругих деформаций $\varepsilon_{ik}(u)$ ($i, k = 1, 2, 3$), $2W(u, v)$ – соответствующая билинейная форма.

Из равенства (1.3) в силу формулы Бетти и плотности множества вектор-функций v в пространстве вектор-функций с интегрируемым квадратом $L_2(G)$ [I] следует $Au_0(x) = 0$, $x \in G$; одновременно из (1.3) следует ортогональность в смысле "скалярного произведения", определяемого интегралом $I(u, v)$, множества однородных решений дифференциального уравнения теории упругости и множества вектор-функций, равных нулю в точках границы области.

2. При доказательстве соотношений (1.2) допустимые вектор-функции $u(x)$ представляются в точках $x \in \bar{G}$ как $u = u_0 + tv$, где t – произвольное действительное число. Тогда однородное решение u_0 может рассматриваться как разность функции u , принимающей на границе одинаковое значение с функцией u_0 , и функции v , равной нулю на границе S области G . Согласно сказанному образуем разность (суммирование по i ведется от $i = 1$ до $i = n$)

$$u_n = u - v_n, \quad v_n = \sum c_i \varphi_i(u|_S = u^*) \quad (2.1)$$

где $\varphi_i(x)$, $x \in \bar{G}$ – координатные вектор-функции, равные нулю в точках S .

Установим, при каких значениях коэффициентов c_i выполняется равенство (1.3) в виде

$$I(u_n, v_n) = 2 \int_G W(u_n, v_n) dG = 0 \quad (2.2)$$

Используя первое равенство (2.1), из (2.2) получим

$$I(u, v_n) - I(v_n) = 0$$

Отсюда, используя второе равенство (2.1), имеем

$$\sum c_i I(u, \varphi_i) - \sum c_i^2 I(\varphi_i) = 0 \quad (2.3)$$

и, учитывая, что $c_i \neq 0$, получаем

$$c_i = I(u, \varphi_i) [I(\varphi_i)]^{-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Если функции φ_i таковы, что

$$I(\varphi_i) = 1 \quad (2.5)$$

то из (2.4) следует, что значения коэффициентов c_i соответствуют проекции в смысле "скалярного произведения", определяемого интегралом $I(u, v)$, допустимой вектор-функции u на множество вектор-функций $\{\varphi_i\}$, равных нулю на границе S . Условие (2.5) выполняется для вектор-функций

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i (|\varphi_i|_H)^{-1}, \quad |\varphi_i|_H = \{I(\varphi_i)\}^{1/2}$$

где $|\cdot|_H$ – энергетическая норма первой задачи теории упругости, эквивалентная норме в соболевском пространстве $\dot{W}_2^1(G)$ непрерывных в G вектор-функций, обобщенные производные которых принадлежат $L_2(G)$.

Напомним, что функции из $\dot{W}_2^1(G)$ обращаются в нуль в обобщенном смысле на границе S , если же граница области достаточно гладкая, то функции из $\dot{W}_2^1(G)$ обра-

щаются в нуль на границе в обычном смысле [1]. Пространство $\dot{W}_2^1(G)$ – сепарабельное [1], следовательно, существует базисная система вектор-функций $\{\bar{\varphi}_n\}$.

Таким образом, из (2.4) получаем значения коэффициентов

$$c_i = I(\mathbf{u}, \bar{\varphi}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

и имеем соотношения, отличающиеся от (2.1) заменой $\mathbf{v}_n, \varphi_i$ на $\bar{\mathbf{v}}_n, \bar{\varphi}_i$, и в итоге находим последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$ решений уравнения

$$A\mathbf{u}_n(x) = 0, \quad x \in G.$$

Согласно схеме метода ортогональных проекций решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка [1–3] (или первой задачи теории упругости [4]) указанная выше последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$ соответствует приближениям "по Ритцу" для решения задачи (1.1). Тогда приближения "по Трефту" соответствуют [2] проекции в смысле "скалярного произведения", определяемого интегралом $I(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, допустимой вектор-функции $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}|_S = \mathbf{u}^*$) на множество $\{\mathbf{u}_n\}$ однородных решений дифференциального уравнения задачи (1.1). Соответственно сказанному образуем полунормированную последовательность однородных решений

$$\bar{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_n (I(\mathbf{u}_n))^{-1/2}, \quad \forall n \quad (2.7)$$

(при этом $I(\mathbf{u}_n) < \infty$ (см. ниже)); принятая терминология связана с тем, что интеграл $I(\mathbf{u})$ (см. (1.2)) определяет не норму, а полунорму, так как из $2W(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ik}(\mathbf{u}) = 0$ следует $\mathbf{u} = \text{const}$. Тогда приближенное решение "по Трефту" есть (суммирование по n ведется от $n = 1$ до $n = N$)

$$\mathbf{u}_N^T = \sum d_n \bar{\mathbf{u}}_n, \quad d_n = I(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}_n) \quad (2.8)$$

Покажем, что это решение тождественно приближенному решению "по Ритцу"

$$\mathbf{u}_N^R = \sum \mathbf{u}_n$$

Для этого понадобятся следующие преобразования интегралов:

$$I(\mathbf{u}_n) = I(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{v}}_n) = I(\mathbf{u}) - 2 \sum c_i I(\mathbf{u}, \bar{\varphi}_i) + \sum c_i^2 I(\bar{\varphi}_i) = I(\mathbf{u}) - \sum c_i^2$$

(отсюда $I(\mathbf{u}_n) < \infty$, так как $I(\mathbf{u}) < \infty$ (см. (1.2)));

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}, \mathbf{u}_n) &= I(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{v}}_n) = I(\mathbf{u}) - I(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}_n) = \\ &= I(\mathbf{u}) - \sum c_i I(\mathbf{u}, \bar{\varphi}_i) = I(\mathbf{u}) - \sum c_i^2 \end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения (2.5), (2.6). Отметим, что из значения первого интеграла следует обобщение неравенства Бесселя, известного в теории рядов Фурье [1].

В результате для приближенного решения (2.8) при учете равенства (2.7) и в силу равенства значений приведенных выше интегралов имеем требуемый результат

$$\mathbf{u}_N^T = \sum I(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}_n) \bar{\mathbf{u}}_n = \sum I(\mathbf{u}, \mathbf{u}_n) [I(\mathbf{u}_n)]^{-1} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_N^R$$

Таким образом, если при построении приближений "по Трефту" использовать систему однородных решений, полунормированную по метрике интеграла энергии, то такие приближения тождественны приближениям "по Ритцу".

При численной реализации вариационных методов решения краевых задач математической физики используются апостериорные оценки погрешности приближений "по Ритцу" и "по Трефту", которые следуют из двусторонних оценок нормы энергетического решения [1].

В связи с проведенными исследованиями для двусторонних оценок решения первой задачи теории упругости, отметим, что полученный результат тождественности приближений "по Ритцу" и "по Трефтцу" является частным и не противоречит апостериорной оценке приближений "по Ритцу", если в качестве функционала Трефтца рассматривать интеграл энергии (что будет соответствовать интегралу Дирихле в классическом методе Трефтца [1]), тогда в апостериорной оценке имеет место знак равенства (так же, как и в двусторонних оценках). В остальных случаях использования обобщенных функционалов Трефтца, которые могут быть построены неединственным образом для каждой краевой задачи [1, 5], оценка будет иметь знак неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. Maurin K. Metody przestrzeni Hilberta. Warszawa: Panstw. wyd-wo naukowe, 1959. 364 p. = Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
3. Терещенко В.Я. Ортогональные разложения на границе области в эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 3. С. 476–486.
4. Терещенко В.Я. Метод ортогональных разложений на границе области в трехмерных задачах линейной теории упругости // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 688–697.
5. Терещенко В.Я. Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16. № 4. С. 996–1005.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
31.VIII.1999