

УДК 539.3

© 2000 г. Г.З. Шарафутдинов

**ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
К НЕКОТОРЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Методы теории функций комплексного переменного применяются к задачам деформирования тонких пластинок постоянной или переменной толщины, рассматриваемых в трехмерной постановке. В этой целью дополнительно к двум комплексным потенциалам Колосова – Мусхелишвили вводится третий комплексный потенциал. Получены представления компонент вектора перемещения и тензора напряжений при помощи трех введенных комплексных потенциалов. Проведены необходимые исследования постановок задач, характерные для случая применения комплексного переменного в задачах теории упругости.

Теория функций комплексного переменного имеет важное значение при решении плоских задач теории упругости [1]. Однако вне сферы ее применимости остались задачи деформирования тонких пластинок переменной толщины. Обратим также внимание на то, что система уравнений для задачи плоского напряженного состояния не обеспечивает удовлетворения всех условий совместности, в силу чего решения задач плоского напряженного состояния носят приближенный характер [2]. И, наконец, в некоторых задачах, например, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины, даже в пластинках постоянной толщины, предпочтительно, по-видимому, учитывать пространственный характер распределения напряжений и деформаций. Очевидно, решение указанных проблем возможно лишь при их рассмотрении как задач пространственной теории упругости. При этом будем исходить из общего представления решения для тонкой пластинки переменной толщины.

**1. Напряженно-деформированное состояние в тонкой пластинке переменной толщины.** Предположим, что тонкая упругая пластинка переменной толщины деформируется силами, однородно распределенными по ее толщине. Введем прямоугольную декартову систему координат  $OX_1X_2X_3$  так, что координатная плоскость  $X_1OX_2$  совпадает со срединной плоскостью пластинки, а координатная ось  $OX_3$  перпендикулярна к ней. Будем считать пластинку симметричной относительно срединной плоскости и ее граничные поверхности описывать уравнениями  $x_3 = \pm h(x_1, x_2)$ . Нормаль к граничной поверхности такой пластинки в общем случае не будет совпадать с нормалью к срединной плоскости, в силу чего условия плоского напряженного состояния нарушаются [3]. По этой причине будем исходить из общих уравнений теории упругости, учитывая, однако, малую толщину пластинки.

Предположим, что компоненты  $u_1, u_2$  вектора перемещения  $u = (u_1, u_2, u_3)$  не зависят от третьей координаты  $x_3$ , а  $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ . Поскольку при заданных условиях деформирования пластинка остается симметричной относительно срединной плоскости, заключаем, что  $u_3$  – нечетная функция  $x_3$  и, следовательно, при малой толщине пластинки, ограничиваясь первым членом разложения, можно записать

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)x_3$$

Отсюда имеем следующие выражения для компонент тензора деформации:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = g(x_1, x_2)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3$$

Компоненты тензора напряжений для упругого материала запишутся в виде

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu g(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \sigma_{13} = \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3 \quad (1.1)$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + g$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе.

Компоненты тензора напряжений (1.1), определяющие напряженное состояние деформированного тела, в общем случае должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

и условиям совместности, которые примем в форме уравнений Бельтрами – Мичелла [3].

При учете введенных предположений уравнения равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} + \mu g) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} + \mu g) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1.2)$$

Третье уравнение свидетельствует о том, что  $g(x_1, x_2)$  – гармоническая функция.

Видно, что сумма компонент тензора напряжения  $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1.3)$$

Действительно, подставим в условие совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.4)$$

соотношения закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], \quad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}$$

Учитывая вытекающее из первых двух уравнений равновесия (1.2) соотношение

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \mu \nabla^2 g = -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}$$

из условия совместности (1.4) получим

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \nu \nabla^2 \sigma_{33} = 0 \quad (1.5)$$

Из закона Гука следует

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = Eg + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Учитывая третье уравнение равновесия (1.2), получим

$$\nabla^2 \sigma_{33} = \nu \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Из этого равенства и соотношения (1.5) следует справедливость уравнения (1.3).

Введем функцию напряжений  $\Phi(x_1, x_2)$ :

$$\sigma_{11} + \mu g = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} + \mu g = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Очевидно, что она удовлетворяет первым двум уравнениям равновесия (1.2) и при этом

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \mu g, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \mu g$$

Подставим последние выражения в уравнение (1.3) и учтем гармоничность функции  $g(x_1, x_2)$ . В результате получим

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi - 2\mu g) = \nabla^4 \Phi - 2\mu \nabla^2 g = \nabla^4 \Phi = 0$$

т.е. функция напряжений – бигармоническая функция, и, следовательно, в данном случае могут быть применены методы теории функций комплексного переменного [1].

**2. Комплексное представление компонент вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций.** Как известно (см., например, [1]), всякая бигармоническая функция может быть представлена при помощи формулы Гурса в виде функций комплексных переменных  $z = x_1 + ix_2$ ;  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ :

$$2\Phi(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad (2.1)$$

В плоской теории упругости имеем следующие представления для комбинаций компонент тензора напряжений [1]:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2S_1, \quad S_1 = [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2S_2, \quad S_2 = [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (2.3)$$

где  $\psi(z) = \chi'(z)$ .

Однако рассматриваемая задача деформирования тонкой пластинки переменной толщины в общем случае не может быть отнесена к плоским задачам теории упругости, поэтому комплексные представления для компонент вектора перемещения, тензоров напряжений и деформаций претерпят определенные изменения.

Непосредственно из представления для функции напряжений получаем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = -4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2} \quad (2.5)$$

С использованием формулы Гурса (2.1), таким образом, из (2.4), (2.5) имеем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g = 2S_1 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2S_2 \quad (2.7)$$

Последние соотношения выражают комбинации компонент тензора напряжений через две функции комплексного переменного. Однако по сравнению с (2.2) и (2.3) в эти соотношения входит также и компонента тензора деформации  $\epsilon_{33} = g(x_1, x_2)$ . Представим эту величину, а также компоненты вектора перемещения  $u_1, u_2$  в комплексной форме

Введем комплексное перемещение

$$D = u_1 + iu_2$$

Можно показать, что

$$2 \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + i \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \epsilon_{11} - \epsilon_{22} + 2i\epsilon_{12} \quad (2.8)$$

Используя закон Гука, из соотношения (2.5) получим

$$4\mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2}$$

Очевидно, что это уравнение удовлетворяется, если положить

$$4\mu D(z, \bar{z}) = f(z) - 4 \frac{\partial \Phi(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}$$

или с учетом приведенной выше формулы Гурса (2.1)

$$4\mu D(z, \bar{z}) = 4\mu(u_1 + iu_2) = f(z) - 2[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})] \quad (2.9)$$

Это выражение есть аналог формулы Колосова для перемещений, в чем нетрудно убедиться, приведя его к указанной формуле Колосова

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa \varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})$$

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{в случае плоской деформации} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{в случае плоского напряженного состояния} \end{cases}$$

Действительно, продифференцируем равенство (2.9) по  $z$ , а затем выделим действительные части. Получим

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \frac{1}{\mu}(S_3 - S_1), \quad S_3 = \frac{1}{4}[f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] \quad (2.10)$$

В случае плоской деформации из закона Гука имеем

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2(\lambda + \mu)}$$

Учитывая равенство (2.2), подставим последнее соотношение в (2.10).

В результате получим

$$f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} S_1 = 8(1 - \nu) S_1$$

Таким образом, приняв зависимость между функциями  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  в виде

$$f(z) = 8(1 - \nu)\varphi(z)$$

приходим к формуле Колосова для случая плоской деформации.

Подобным образом устанавливается возможность приведения соотношения (2.9) к формуле Колосова для плоского напряженного состояния. В этом случае зависимость между функциями

$f(z)$  и  $\varphi(z)$  принимается в виде

$$f(z) = \frac{8}{1+\nu} \varphi(z)$$

Для представления деформации  $\varepsilon_{33}$  (т.е. функции  $g$ ) в комплексной форме обратимся к соотношениям закона Гука

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}$$

Сложив эти равенства и прибавив к левой и правой частям полученного соотношения  $2\mu g$ , получим

$$g = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g) - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

и при учете соотношений (2.6) и (2.10) окончательно имеем

$$g = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} S_1 - \frac{1}{\mu} S_3 \quad (2.11)$$

Полученное представление (2.11) позволяет теперь модернизировать соотношение (2.6), исключив из него функцию  $g$ :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} S_1 + 2S_3 \quad (2.12)$$

Таким образом, действительные и мнимые части соотношений (2.7), (2.9), а также соотношения (2.11) и (2.12) дают шесть соотношений для определения шести величин: трех компонент тензора напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , двух компонент вектора перемещений  $u_1$ ,  $u_2$  и значения третьей деформации  $\varepsilon_{33} = g$ .

Однако напряженно-деформированное состояние, помимо этих величин, определяется также компонентами тензора напряжений  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$  (и тензора деформаций  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$ ). Обратим внимание также на то, что эти величины могут быть использованы в граничных условиях. Так, например, при задании краевых условий на граничной поверхности пластинки в той или иной мере используются указанные выше компоненты тензора напряжений. По этой причине они должны быть выражены через вводимые функции комплексного переменного.

Опустив несложные выкладки, приведем выражения для компонент тензора напряжений через функции комплексного переменного

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 - \operatorname{Re} S_2, & \sigma_{22} &= S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 + \operatorname{Re} S_2, \\ \sigma_{33} &= \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + \mu} S_1 - 2S_3, & \sigma_{12} &= \operatorname{Im} S_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{13} = (T_1 - T_3)x_3, \quad T_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [\varphi''(z) + \bar{\varphi}''(\bar{z})], \quad T_3 = \frac{1}{4} [f''(z) + \bar{f}''(\bar{z})]$$

$$\sigma_{23} = i(T_2 - T_4)x_3, \quad T_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [\varphi''(z) - \bar{\varphi}''(\bar{z})], \quad T_4 = \frac{1}{4} [f''(z) - \bar{f}''(\bar{z})]$$

Можно показать, что полученные при помощи трех функций комплексного переменного выражения для компонент тензора напряжений удовлетворяют условиям совместности в форме Бельтрами – Мичелла, и поскольку они удовлетворяют уравне-

ниям равновесия (по построению), то могут быть использованы при решении рассматриваемого класса задач теории упругости.

**3. Граничные условия.** Как известно, граничные условия в задачах теории упругости определяются либо заданными внешними распределенными силами  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , либо заданными перемещениями точек поверхности тела, либо заданием на одной части поверхности внешних поверхностных сил, а на другой – перемещений. Первый тип граничных условий выражается равенствами

$$\sigma_{ij}n_j = f_i$$

где  $n_j$  – компоненты орта внешней нормали к поверхности (к контуру) в рассматриваемой точке. Второй тип граничных условий выражается равенствами

$$u_i = q_i$$

где  $q_i$  – заданные на поверхности (на контуре) функции.

Решение задач деформирования тонких пластинок переменной толщины сводится к отысканию трех функций комплексного переменного  $\phi(z)$ ,  $f(z)$  и  $\psi(z)$ . Эти функции должны удовлетворять определенным условиям на границах деформируемого тела. Таким образом, возникает необходимость сформулировать граничные условия относительно указанных функций комплексного переменного.

Как известно, граничные условия первого типа отражают равновесие некоторого элементарного объема деформированного тела. Применительно к случаю тонких пластинок переменной толщины этот объем представим в виде некоторого треугольника переменной толщины (в случае задания распределенных усилий на контуре, например, отверстия в такой пластинке). Другой вариант граничных условий подобного типа, несколько отличающийся от первого, реализуется на поверхности пластинки.

Рассмотрим вначале случай реализации граничных условий на контуре выреза в пластинке. Предположим, что  $ds$  – элемент дуги контура границы деформируемого тела. Компоненты орта внешней нормали  $n = (n_1, n_2, n_3)$  представляют собой косинусы углов между этим вектором и векторами базиса  $e_1, e_2, e_3$  и соответственно равны [1]

$$n_1 = \cos(n, e_1) = \frac{dx_2}{ds}, \quad n_2 = \cos(n, e_2) = -\frac{dx_1}{ds}, \quad n_3 = \cos(n, e_3) = 0$$

В силу переменной толщины пластинки выделим слой толщиной  $dx_3$ . Тогда для единицы длины контура имеем

$$\sigma_{ij}n_j dx_3 = f_i dx_3$$

Интегрируя эти выражения по  $x_3$ , получим

$$\int_{-h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} \sigma_{ij}n_j dx_3 = 2hf_i$$

При симметричной относительно срединной плоскости нагрузке результирующая  $f_3 = 0$  и поскольку  $\sigma_{31}, \sigma_{32}$  – линейные функции  $x_3$ , то третье соотношение обращается в тождество  $0 \equiv 0$ . Таким образом, для рассматриваемого класса задач имеет смысл формулировать граничные условия (на контурах отверстий в пластинке или ограничивающих тело), используя только первые два уравнения, которые, учитывая и здесь линейную зависимость  $\sigma_{31}, \sigma_{32}$  от  $x_3$ , принимаем в форме

$$\sigma_{kl}n_l = f_k(x_1, x_2), \quad k, l = 1, 2$$

Используя для представления компонент тензора напряжений функцию напряжений, а для компонент направляющего вектора – приведенные выше дифферен-

циальные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \mu g \right) \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{ds} &= f_1 \\ - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \mu g \right) \frac{dx_1}{ds} &= f_2 \end{aligned}$$

Последние соотношения приводятся к виду

$$d \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \mu g dx_2 = f_1 ds, \quad -d \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mu g dx_1 = f_2 ds \quad (3.1)$$

Составим комплексное выражение

$$(f_1 + if_2)ds = -id \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + i\mu g(dx_1 + idx_2)ds$$

Используя выражение для функции напряжений, получим

$$d[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\varphi}(\bar{z})] - \mu g dz = i(f_1 + if_2)ds$$

Поскольку дифференциал в данном случае имеет вид

$$d = \frac{\partial}{\partial z} dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

то из последнего соотношения имеем

$$[\varphi'(z)dz + \bar{\varphi}'(\bar{z})d\bar{z} + z\bar{\varphi}''(\bar{z})d\bar{z} + \bar{\varphi}'(\bar{z})dz] - \mu g dz = i(f_1 + if_2)ds$$

Используем теперь соотношение (2.11); в результате получим

$$S_3 dz - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 dz + \bar{S}_2 d\bar{z} = i(f_1 + if_2)ds \quad (3.2)$$

На контуре кругового отверстия радиуса  $a$  имеем

$$z = ae^{i\theta}, \quad dz = iae^{i\theta}d\theta, \quad d\bar{z} = -iae^{-i\theta}d\theta$$

В результате (3.2) примет вид

$$a \left[ \left( S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 \right) e^{i\theta} - \bar{S}_2 e^{-i\theta} \right] d\theta = i(f_1 + if_2)ds$$

Если же круговой контур свободен от внешних усилий, то выражение в квадратных скобках равно нулю. Наконец, переходя к сопряженным величинам, в этом случае получаем хорошо известное выражение [1]

$$S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 - S_2 e^{2i\theta} = 0$$

весьма удобное при задании граничных условий в напряжениях на контуре кругового отверстия.

Выразим теперь граничные условия в напряжениях на поверхности пластинки при помощи введенных функций комплексного переменного. Поскольку рассматриваются пластинки, симметричные и нагружаемые симметрично относительно срединной плоскости, то ограничимся рассмотрением лишь одной стороны пластинки.

Предположим, что форма поверхностей пластинки задается уравнениями

$$x_3 = \pm h(z, \bar{z})$$

Компоненты  $l_1, l_2, l_3$  вектора нормали  $N = (l_1, l_2, l_3)$  к поверхности пластинки имеют вид

$$l_1 = \frac{h_1 + h_2}{A}, \quad l_2 = i \frac{h_1 - h_2}{A}, \quad l_3 = -\frac{1}{A}$$

$$h_1 = \frac{\partial h}{\partial z}, \quad h_2 = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}, \quad A = \sqrt{1 + 4h_1 h_2}$$

Граничные условия первого типа на поверхности пластинки имеют вид

$$\sigma_{ij} l_j = p_i$$

Используя полученные выше представления для компонент тензора напряжений (2.13), получим при  $x_3 = h$

$$h_1 \left[ S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 - \bar{S}_2 \right] + h_2 \left[ S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 - S_2 \right] + h(T_3 - T_1) = A p_1$$

$$h_1 \left[ S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 + \bar{S}_2 \right] - h_2 \left[ S_3 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 + S_2 \right] + h(T_4 - T_2) = A p_2$$

$$2h \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [h_2 \varphi''(z) + h_1 \bar{\varphi}''(\bar{z})] + \frac{1}{2} h [h_2 f''(z) + h_1 \bar{f}''(\bar{z})] -$$

$$- \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + \mu} S_1 + \frac{1}{2} S_3 = A p_3$$

Граничные условия в перемещениях формулируются на основе представления (2.9) для вектора перемещения в комплексной форме

$$4\mu(u_1 + iu_2) = f(z) - 2[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})] = 4\mu q(z, \bar{z})$$

а для задания перемещений  $u_3$  поверхностей пластинки используется соотношение (2.11):

$$u_3 = g(z, \bar{z})h(z, \bar{z}) = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} S_1 - \frac{1}{\mu} S_3 \right) h(z, \bar{z}) = Q(z, \bar{z})$$

**4. Об определенности комплексных потенциалов.** Вопрос о степени определенности введенных комплексных потенциалов решается в основном так же, как и в [1], однако здесь речь идет о трех потенциалах. Компоненты тензора напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  определяются при помощи соотношений (2.7) и (2.12). В данном случае задание этих компонент тензора напряжений должно быть дополнено заданием каких-либо других компонент из набора  $\sigma_{33}, \sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$ . Допустим, что задано напряжение  $\sigma_{33}$ , определяемое третьим соотношением (2.13). При заданных компонентах тензора напряжений соотношение (2.12) и третье соотношение (2.13) образуют систему уравнений относительно действительных частей функций  $\varphi'(z)$  и  $f'(z)$ . Разрешим эти уравнения относительно комбинаций  $S_1$  и  $S_3$ :

$$S_1 = \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} [\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}]$$

$$S_3 = \frac{1}{2(3\lambda + 2\mu)} [(3\lambda + 4\mu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2\mu\sigma_{33}]$$

Отсюда следует, что при заданных напряжениях действительные части функций  $\varphi'(z)$  и  $f'(z)$  определяются однозначно, а их мнимые части – с точностью до чисто мнимых постоянных  $iA_0^*, iC_0^*$ , где  $A_0^*, C_0^*$  – действительные постоянные. Поскольку

$$\varphi(z) = \int \varphi'(z) dz, \quad f(z) = \int f'(z) dz$$

то, очевидно, добавление выражений вида  $iA_0^*z + \alpha_0$ ,  $iC_0^*z + \gamma_0$  к функциям  $\varphi(z)$  и  $f(z)$  не изменит напряженного состояния деформированного тела.

Исходя далее из соотношения (2.7)

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

можно установить [1], что  $\psi'(z)$  определяется однозначно, а функция  $\psi(z) =$  с точностью до комплексной постоянной  $\beta_0$ .

При заданных напряжениях можно [1] выбрать постоянные

$$A_0^*, C_0^*, \alpha_0, \gamma_0, \beta_0 \tag{4.1}$$

так, чтобы выполнялись равенства

$$\varphi(0) = 0, \operatorname{Im}(\varphi'(0)) = 0, f(0) = 0, \operatorname{Im}(f'(0)) = 0, \psi(0) = 0$$

чем, собственно говоря, и исчерпывается произвол в выборе указанных постоянных.

Задание компонент вектора перемещения однозначно определяет компоненты тензора напряжения, в силу чего заключаем, что и в этом случае функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  и  $f(z)$  должны определяться с указанной выше точностью. Непосредственно из соотношения (2.9) устанавливаем, что при этом приращение компонент вектора перемещений  $\Delta(u_1 + iu_2)$  определяется с точностью до

$$4\mu\Delta(u_1 + iu_2) = iC_0^*z + (\gamma_0 - 2\alpha_0 - 2\bar{\beta}_0)$$

Отсюда заключаем, что однозначность перемещений обеспечивается лишь только в том случае, если

$$C_0^* = 0, \quad \gamma_0 - 2\alpha_0 - 2\bar{\beta}_0 = 0 \tag{4.2}$$

Таким образом, при заданных перемещениях степень произвола в выборе постоянных (4.1) определяется соотношениями (4.2). Обратим внимание на возможность выбора значений

$$\varphi(0) = 0 \text{ (или } \psi(0) = 0), f(0) = 0$$

ликвидирующую произвол в выборе комплексных постоянных и обеспечивающую однозначность задания перемещений [1].

Несмотря на то что компоненты вектора перемещения и тензора напряжений – однозначные функции, функции комплексного переменного  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ ,  $f(z)$  могут оказаться многозначными.

Действительно, рассматриваемые голоморфные функции будут однозначными в любой односвязной области, занятой телом. Предположим теперь, следуя известному подходу [1], что область многосвязная, т.е. область, занятая телом, ограничена простыми замкнутыми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ , причем последний контур охватывает все предыдущие. Предполагается, что контуры не имеют общих точек.

Выше установлена однозначность действительных частей функций  $\varphi'(z)$  и  $f'(z)$ . Мнимые части указанных функций могут, однако, при обходе какого-либо замкнутого контура  $L'_k$ , охватывающего контур  $L_k$ , получать приращения вида  $2\pi i A_k^*$  и  $2\pi i C_k^*$ , где  $A_k^*, C_k^*$  – действительные постоянные. Подобное приращение обеспечивается функ-

цией  $\ln z$ , и поэтому будем полагать

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^m A_k^* \ln(z - z_k) + F_\varphi, \quad f'(z) = \sum_{k=1}^m C_k^* \ln(z - z_k) + F_f \quad (4.3)$$

где  $m$  – число контуров, образующих границу тела, занимающего некоторую область;  $F_\varphi, F_f$  – голоморфные в этой области функции;  $z_k$  – постоянная точка, произвольно выбранная внутри контура  $L_k$ .

Интегрируя соотношения (4.3), получим (далее всюду суммирование ведется от  $k = 1$  до  $k = m$ )

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_{z_0}^z \varphi'(z) dz + \text{const} = \sum A_k^* \Gamma_k + I_\varphi + \text{const} \\ f(z) &= \int_{z_0}^z f'(z) dz + \text{const} = \sum C_k^* \Gamma_k + I_f + \text{const} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Gamma_k = (z - z_k) \ln(z - z_k) - (z - z_k), \quad I_\varphi = \int_{z_0}^z F_\varphi dz, \quad I_f = \int_{z_0}^z F_f dz$$

Однако интегралы  $I_\varphi, I_f$  представляют собой функции комплексного переменного  $z$ , которые при обходе вокруг одного из контуров могут получить приращения вида  $2\pi i \alpha_k$  и  $2\pi i \gamma_k$  соответственно;  $\alpha_k$  и  $\gamma_k$  – постоянные, вообще говоря, комплексные (множитель  $2\pi$  введен для удобства). Точно так же, как и выше, имеем

$$I_\varphi = \sum \alpha_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad I_f = \sum \gamma_k \ln(z - z_k) + f^*(z) \quad (4.5)$$

где  $\varphi^*(z)$  и  $f^*(z)$  – однозначные функции.

Соотношения (4.4) при учете равенств (4.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z \sum A_k^* \ln(z - z_k) + \sum \beta_k \ln(z - z_k) + \varphi_0(z), \quad \beta_k = (\alpha_k - A_k^* z_k) \\ f(z) &= z \sum C_k^* \ln(z - z_k) + \sum \delta_k \ln(z - z_k) + f_0(z), \quad \delta_k = (\gamma_k - C_k^* z_k) \\ \varphi_0(z) &= \varphi^*(z) \sum A_k^* \ln(z - z_k), \quad f_0(z) = f^*(z) + \sum C_k^* (z - z_k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\beta_k, \delta_k$  – некоторые комплексные постоянные.

Подобным образом устанавливаем, что  $\psi'(z)$  – голоморфная функция и

$$\varphi(z) = \sum B_k^* \ln(z - z_k) + \psi_0(z) \quad (4.7)$$

где  $\psi_0(z)$  – однозначная функция.

Коэффициенты  $A_k^*, B_k^*, C_k^*, \beta_k, \delta_k$  связаны между собой определенными соотношениями, вытекающими из однозначности перемещений и усилий. В первую очередь воспользуемся соотношением

$$4\mu(u_1 + iu_2) = f(z) - 2[\varphi + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})]$$

Подставляя в него соотношения (4.6), (4.7), получим следующее выражение для приращения перемещений при обходе вокруг  $k$ -го контура в положительном направлении

$$4\mu(u_1 + iu_2)|_k = 2\pi i(z C_k^* + \delta_k - 2\beta_k + 2\bar{B}_k^*) \quad (4.8)$$

Очевидно, для однозначности перемещений следует потребовать равенство нулю выражения (4.8), в результате чего имеем два уравнения

$$C_k^* = 0, \quad \delta_k - 2\beta_k + 2\bar{B}_k^* = 0$$

Компоненты вектора силы, действующей на элемент контура  $ds$ , определяются выражениями

$$P_1 = 2f_1 h ds, \quad P_2 = 2f_2 h ds$$

Более удобно представить их в виде комбинации  $(P_1 + iP_2)2hds$ , преобразуя которую точно так же, как аналогичное выражение в предыдущем разделе, получим

$$(P_1 + iP_2)2hds = 2h \left( S_3 dz - \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 dz + \bar{S}_2 \right) \quad (4.9)$$

Для однозначности усилий необходимо потребовать равенство нулю приращения выражения (4.9) при обходе по замкнутому контуру  $L'_k$ , охватывающего выбранный  $k$ -й контур  $L_k$  [1]. В результате получим выражение для приращения сил (или, что эквивалентно, напряжений) при обходе вокруг  $k$ -го контура, учитывая представления (4.3) и голоморфность функции  $\psi'(z)$ ,  $C_k^* - \frac{\mu}{\lambda + \mu} A_k^* = 0$ .

Отсюда следует, что  $A_k^* = 0$  для любого  $k$ , поскольку, как уже установлено выше, все  $C_k^* = 0$ .

Выражение для дифференциала момента  $M$  усилий, действующих на элемент  $ds$  контура  $L_k$  относительно начала координат, имеет вид

$$dM = (x_1 f_2 - x_2 f_1) 2h(z, \bar{z}) ds$$

Учитывая соотношения (3.1), получим

$$\begin{aligned} dM &= 2h \left\{ x_1 \left( \mu g dx_1 - d \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) - x_2 \left( d \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \mu g dx_2 \right) \right\} = \\ &= 2h \left\{ \mu g (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) - \left( x_1 d \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 d \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right\} = h \left\{ \mu g d(z, \bar{z}) - \left( z d \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \bar{z} d \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right) \right\} \end{aligned}$$

При помощи комплексных потенциалов это соотношение можно записать следующим образом:

$$dM = h(z, \bar{z}) \left\{ \left[ \bar{z} \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 - S_3 \right) - z S_2 \right] dz + \left[ z \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} S_1 - S_3 \right) - \bar{z} \bar{S}_2 \right] d\bar{z} \right\}$$

Видно, что определенные выше значения  $A_k^* = 0$ ,  $C_k^* = 0$  также обеспечивают однозначность момента. Таким образом, рассматриваемые функции комплексного переменного – голоморфные функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. N.Y.: McGraw-Hill, 1970. = Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
3. Love A. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1928. = Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.

Москва  
e-mail: common@inmech.msu.su

Поступила в редакцию  
30.III.2000