

УДК 532.5 : 534.1

© 2000 г. А.Б. Киселев, В.Ф. Никитин, Н.Н. Смирнов, М.В. Юмашев

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ АВТОТРАНСПОРТА НА КОЛЬЦЕВОЙ МАГИСТРАЛИ

Предлагается модель нестационарных однополосных транспортных потоков по кольцевой магистрали, обладающая рядом коренных отличий от традиционно рассматриваемых в механизме сплошной среды. Даже в упрощенном варианте рассмотрения однополосного движения модель позволяет правильно качественно и количественно описать условия обеспечения максимальной пропускной способности, возникновение и эволюцию "подвижных пробок" на дорогах.

В имеющихся математических моделях, описывающих движение автотранспорта по однополосной магистрали с позиций механики сплошной среды [1–4], используется классическое уравнение неразрывности, дополненное либо алгебраическими условиями, выражающими эмпирическую связь расхода и скорости [1, 2], либо источниковыми членами [4], либо одномерным гидродинамическим уравнением движения [3], что привносит в модель такие свойства сжимаемой среды, как двунаправленность распространения возмущений, отсутствие ограничений на скорости и ускорения и т.п. Поэтому транспортные потоки, характеризующиеся рядом специфических свойств – таких, как однонаправленность распространения слабых возмущений, наличие нескольких типов волн сильных разрывов, наличие ограничения на скорости и ускорения, не могут быть описаны с помощью обычных гидродинамических моделей.

Исследование двусторонних транспортных потоков проводили также на основании одного только уравнения неразрывности [5].

В данной работе предлагается модель движения транспорта, содержащая как уравнение неразрывности, так и дифференциальное уравнение движения, учитывающее реакцию водителя на изменение дорожной обстановки и технические характеристики транспортного средства.

1. Модель движения транспортного потока по автомагистрали. Рассмотрим однонаправленный поток машин по автомагистрали с однополосным движением. Пересечение с другими дорогами и наличие светофоров будут учитываться соответствующими граничными условиями. Введем эйлерову систему координат x вдоль магистрали в направлении движения потока и время t . Введем среднюю плотность потока $\rho(x, t)$ как отношение площади полосы движения, занятой транспортными средствами, к площади всего рассматриваемого участка полосы движения

$$\rho = h n / (hL), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

где h – ширина полосы движения, L – длина контрольного участка, l – средняя длина транспортного средства, n – количество транспортных средств на контрольном участке.

Введем скорость потока $u(x, t)$, которая может изменяться в пределах $0 \leq u \leq u_m$, где u_m – максимально разрешенная скорость движения. Из определений следует, что максимальная плотность $\rho = 1$ соответствует ситуации, когда машины располагаются практически вплотную; при этом естественно принять $u = 0$, т.е. что на дороге образовалась пробка.

Условно называя "массой", сосредоточенной на участке длины L , величину

$$m = \int_0^L \rho dx$$

можно записать изменения "массы" на автомагистрали. Для непрерывного потока машин будет иметь место уравнение неразрывности

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (1.1)$$

При записи уравнения изменения количества движения будем учитывать, что изменения скорости движения определяются техническими характеристиками транспортного средства (максимальное ускорение, экстренное торможение) и реакцией водителя на изменение дорожной обстановки (изменение плотности и скорости впереди идущих автомобилей). Тогда уравнение движения запишется в виде

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} \alpha H(\alpha) H(-\rho_x v_x), & v = 0 \\ \alpha H(-\rho_x v_x), & 0 < v < v_m; \\ \alpha H(-\alpha) H(-\rho_x v_x), & v = v_m \end{cases} \quad \alpha = \begin{cases} \alpha^+, & \alpha_* \geq \alpha^+ \\ \alpha_*, & -\alpha^- < \alpha_* < \alpha^+ \\ -\alpha^-, & \alpha_* \leq -\alpha^- \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\alpha_* = -k^2 \rho^{-1} \rho_x$$

Здесь $H(x) = \{1 \text{ при } x \geq 0; 0 \text{ при } x < 0\}$ – функция Хевисайда, α^+ – максимальное возможное ускорение разгона машины, α^- – ускорение экстренного торможения; эти величины положительны и определяются техническими характеристиками транспортного средства. Параметр k , как будет видно из дальнейшего, характеризует скорость распространения малых возмущений ("скорость звука" в потоке транспорта); в качестве первого приближения будем считать параметр k постоянным.

Из (1.2) видно, что в штатной ситуации движения действия водителя диктуются градиентом плотности потока ρ_x и самой плотностью ρ . При увеличении плотности потока ($\rho_x > 0$) водитель притормаживает ($\alpha < 0$), при уменьшении ($\rho_x < 0$) – разгоняется ($\alpha > 0$), а в стабильной ситуации ($\rho_x = 0$) – движется с постоянной скоростью ($\alpha = 0$). Уравнение (1.2) также учитывает, что в случае локального увеличения плотности потока впереди ($\rho_x > 0$) при условии одновременного увеличения скорости впереди идущих машин ($v_x > 0$) водитель прогнозирует последующее уменьшение плотности и сохраняет режим движения ($\alpha = 0$). В случае появления впереди медленно движущихся автомобилей ($v_x < 0$) водитель не изменяет режим движения ($\alpha = 0$), пока они находятся на значительном расстоянии ($\rho_x < 0$), и начинает реагировать при их приближении ($\rho_x \geq 0$). Кроме того, уравнение (1.2) включает в себя ограничение скорости автомобиля в пределах $0 \leq v \leq v_m$.

Проведенный анализ соотношения (1.2) показывает, что данная модель, в отличие от рассматривавшихся ранее, не имеет прямой гидродинамической аналогии и учитывает ограничения транспортного потока на скорость и ускорение отдельных элементов, а также особенности реакции водителя на изменение дорожной ситуации.

Рассмотрим случай штатного движения. В этом случае уравнение (1.2) принимает вид

$$v_t + vv_x + k^2 \rho^{-1} \rho_x = 0 \quad (1.3)$$

и вместе с уравнением (1.1) образует систему двух квазилинейных уравнений гиперболического типа. Ее характеристики в плоскости (x, t) – C^+ и C^- и условия вдоль них следующие:

$$C^\pm : dx/dt = v \pm k, \quad \rho dv = \mp k d\rho \quad (1.4)$$

Характеристики C^+ и C^- несут информацию об изменении дорожной обстановки соответственно по потоку и против него.

Специфика транспортных потоков и существующих систем организации движения состоит в том, что распространение информации происходит однонаправленно – навстречу потоку. Для волн, распространяющихся влево, навстречу потоку с постоянными параметрами, имеет место интеграл Римана

$$-v_0 = k \ln(\rho_0/\rho) \quad (1.5)$$

Будем полагать, что при нулевой скорости потока автомобили стоят на магистрали вплотную друг к другу и плотность их максимальна ($\rho_0 = 1$ при $v_0 = 0$). Тогда из интеграла (1.5), учитывая ограничения на максимальную скорость ($v \leq v_m$), можно получить следующую зависимость для скорости потока

$$v(\rho) = \begin{cases} -k \ln \rho, & e^{-v_m/k} < \rho \leq 1 \\ v_m, & 0 < \rho \leq e^{-v_m/k} \end{cases} \quad (1.6)$$

График функции $q(\rho) = \rho v$, определяющий пропускную способность однополосной дороги (фиг. 1), показывает, что максимальная пропускная способность (МПС) достигается при плотности $\rho = 1/e$ и скорости $v = k$.

Для оценки величины скорости распространения возмущений k сделаем следующие предположения о свойствах потока. Пусть, начиная движение ее состояния покоя ($v = 0$; $\rho = 1$) и ускоряясь до v_m , поток достигает при этом максимальной допустимой плотности ρ_* , гарантирующей безопасность движения. Под безопасной плотностью будем понимать такую, при которой расстояния между машинами не меньше тормозного пути $X(v)$. Тогда максимально допустимая плотность при скорости v_m определится равенством

$$\rho_* = (1 + X(v_m)/l)^{-1}$$

где l – характерная длина транспортного средства. С другой стороны, из интеграла Римана для волны ускорения (1.5) достигаемая в ней плотность определяется конечной скоростью движения и скоростью распространения возмущений k

$$\rho_* = e^{-v_m/k}$$

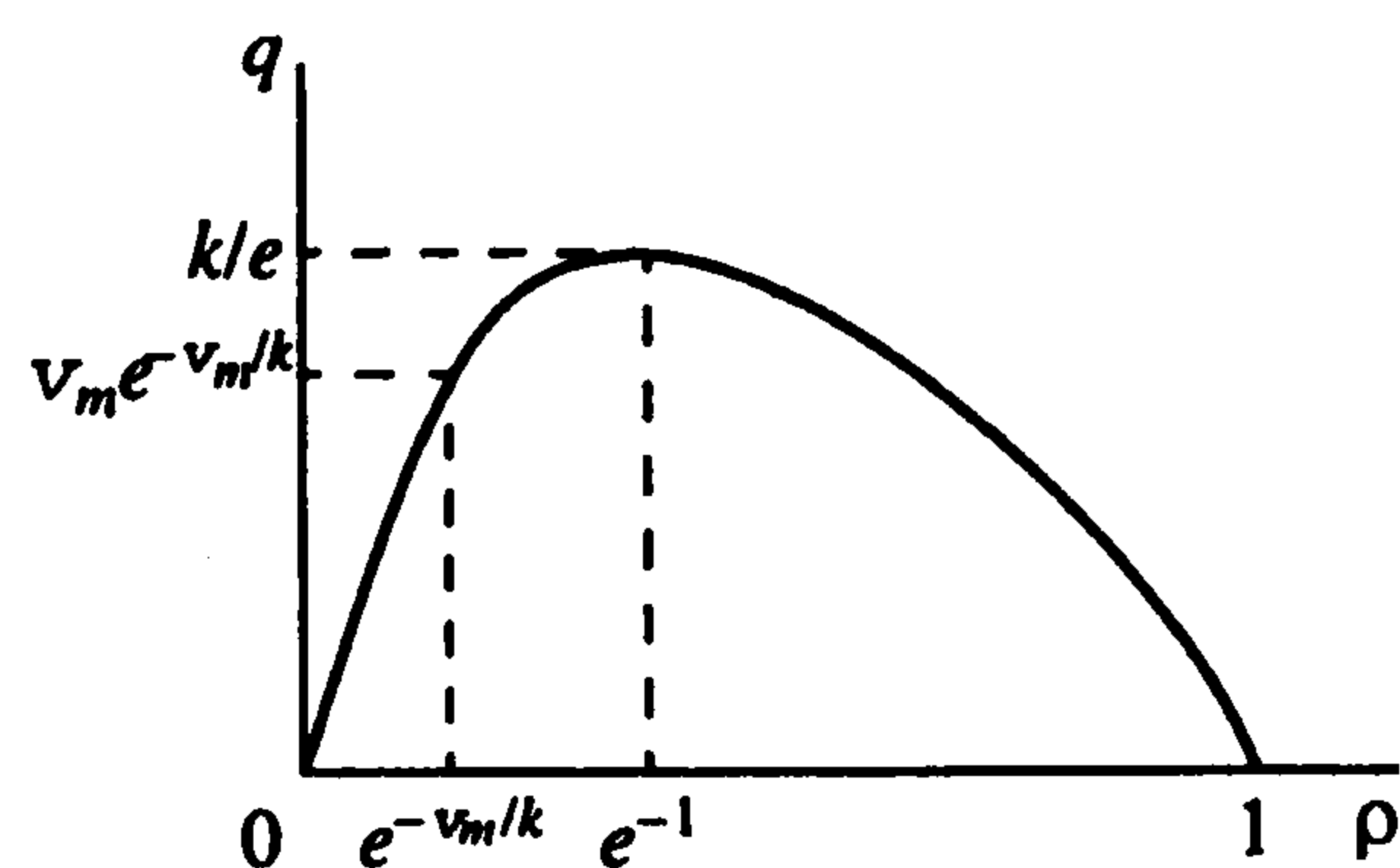
Тогда скорость распространения возмущений k определяется по формуле

$$k = v_m / \ln(1 + X(v_m)/l)$$

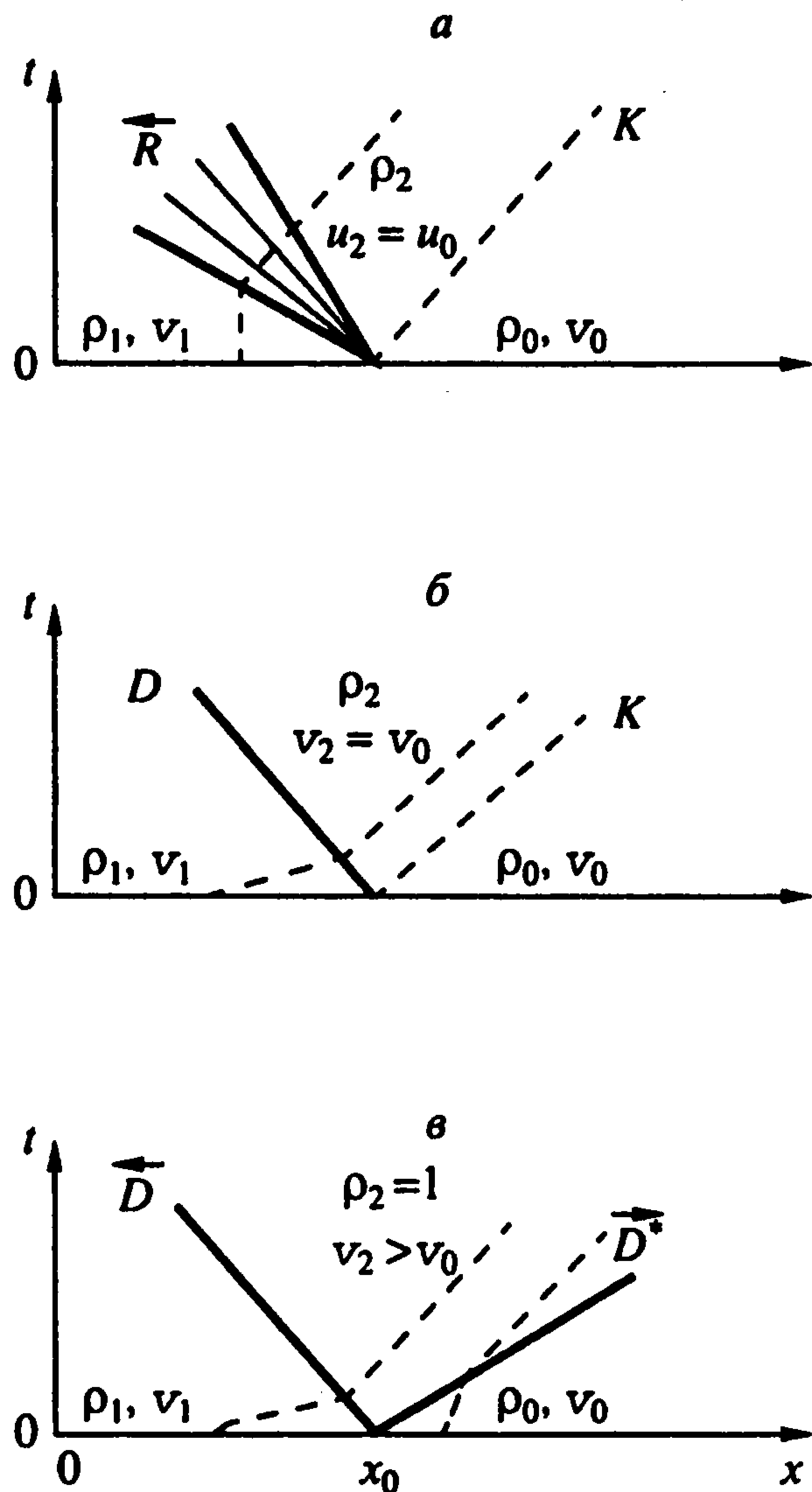
При скорости $v_m = 80$ км/ч тормозной путь автомобиля типа ВАЗ составляет 45 м, что при средней длине автомобиля 5 м дает скорость распространения возмущений $k = 35$ км/ч. Оценки величин максимальных ускорений разгона α^+ и торможения α^- (формула (1.2)) для автомобилей данного класса составляют: $\alpha^+ = 1,63$ м/с²; $\alpha^- = 5,5$ м/с².

Был проведен [6] анализ экспериментальных данных наблюдений за движением в туннеле Линкольна в Нью-Йорке, показавший, что зависимость скорости от плотности потока хорошо аппроксимируется выражением типа (1.6). При этом определенный по данным экспериментов коэффициент k составил $k = 17,2$ миль/ч ≈ 28 км/ч. Более низкое значение k , полученное в эксперименте, объясняется, вероятно, тем, что реальная плотность потока всегда несколько меньше максимально допустимой ($\rho < \rho_*$) в целях повышения безопасности движения.

Эксперименты в туннеле Линкольна [6] показали, что МПС туннеля – 1430 машин в час – достигалась при плотности 83 машины на милю. При этом максимальная размерная плотность $\hat{\rho}_m$ составляла 228 машин на милю. Отсюда следует, что плотность при МПС $\rho_m = 83/228 \approx 0,36$, что хорошо согласуется с теоретически определенной величиной



Фиг. 1



Фиг. 2

убывает при убывании скорости и возрастании плотности. Таким образом, волны ускорения характеризуются расходящимся веером характеристик, а волны торможения – сходящимся. В последнем случае возможно пересечение характеристик, приводящее к возникновению градиентной катастрофы и области неоднозначности решения. Поэтому необходимо дополнить модель учетом возможности возникновения сильных разрывов.

Условия на поверхности сильного разрыва для рассматриваемой модели, получаемые при записи уравнений (1.1) и (1.3) в интегральной форме, имеют вид

$$\rho_1(D - v_1) = \rho_2(D - v_2) \quad (2.1)$$

$$\rho_1((D - v_1)^2 + k^2) = \rho_2((D - v_2)^2 + k^2) \quad (2.2)$$

Рассмотрим возможные решения задач о распаде разрывов в начальных условиях. Пусть при $x = x_0$ имеется разрыв

$$v = v_1, \rho = \rho_1 \text{ при } x < x_0; \quad v = v_0, \rho = \rho_0 \text{ при } x > x_0.$$

Тогда при $v_1 < v_0$ против потока распространяется центрированная волна ускорения, а вправо со скоростью потока распространяется контактный разрыв (фиг. 2, а). В непрерывной волне ускорения скорость возрастает от v_1 до v_0 , а плотность уменьшается до величины $\rho_2 = \rho_1 \exp((v_1 - v_0)/k)$. На контактной поверхности k – разрыв плотности. Заметим, что решение типа центрированной волны имеет особенность при $t = 0, x = x_0$ и справедливо при $t > v_m/\alpha^+$.

При $v_1 > v_0$ против потока распространяется волна торможения в форме сильного разрыва. Возможны два типа решений. При относительно небольшой разности скоростей ($v_1 - v_0$) решение представлено на фиг. 2, б.

Скорость волны D и плотность затормозившегося потока ρ_2 определяются из соот-

$\rho_m = 1/e \approx 0,37$. Формула для МПС в размерных переменных $\hat{q}_m = k\hat{\rho}_m$ дает $\hat{q}_m = 17,3 \cdot 83 = 1436$ машин в час, что также хорошо согласуется с экспериментом.

Эксперименты на Мерритт Парквэй [3] показали, что МПС – 1300 машин в час – достигалась при плотности $\hat{\rho}_m = 80$ машин на милю при максимальной плотности в состоянии покоя 215 машин на милю, что дает величину $\rho_m \approx 0,37 \approx 1/e$, также хорошо согласующуюся с теоретическими выводами.

Анализ некоторых решений системы уравнений. Рассмотрим простые волны, распространяющиеся влево навстречу потоку. Для этих волн характеристики C^- : $dx/dt = v - k$ будут прямыми линиями, а характеристики C^+ – криволинейными. Во всей области простой волны справедлив интеграл Римана (1.5). Изменения скорости распространения малых возмущений относительно скорости и плотности потока соответственно равны

$$d(v - k)/dv = 1, \quad d(v - k)/d\rho = -k/\rho$$

откуда следует, что угол наклона характеристик вдоль траектории возрастает при возрастании скорости и убывании плотности и

ношений (2.1), (2.2):

$$D = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_0 - \Delta), \quad \rho_2 = \frac{\rho_1}{4k^2}(\nu_1 - \nu_0 + \Delta)^2 \quad (2.3)$$

$$\Delta = \sqrt{(\nu_1 - \nu_0)^2 + 4k^2}$$

Это решение справедливо, пока выполнено условие

$$\Delta < 2k\rho_1^{-1/2} - (\nu_1 - \nu_0) \quad (2.4)$$

обеспечивающее непревышение плотностью ρ_2 максимального значения. При невыполнении этого условия решение имеет вид, изображенный на фиг. 2, в.

Против потока распространяется волна торможения со скоростью

$$D = \nu_1 - k\rho_1^{-1/2} \quad (2.5)$$

которая при определенных условиях может сноситься потоком вправо. За волной устанавливается скорость

$$\nu_2 = \nu_1 - k\rho_1^{-1/2}(1 - \rho_1) \quad (2.6)$$

Волна упаковки распространяется по потоку со скоростью

$$D_* = (\nu_1 - \nu_0)/(1 - \rho_0) + \nu_0 - k\rho_1^{-1/2} > \nu_0. \quad (2.7)$$

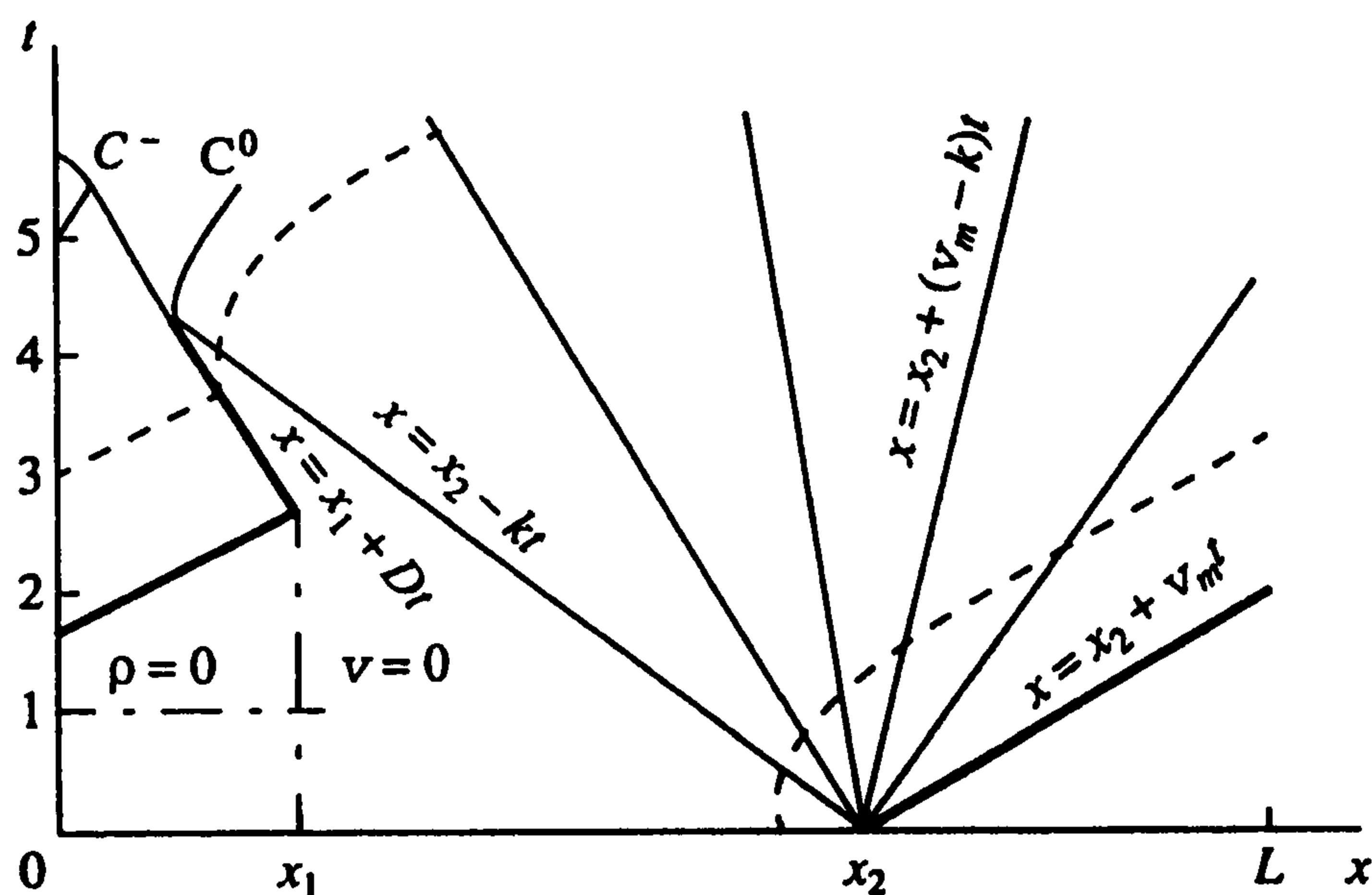
Волной упаковки в данном случае называется волна, распространяющаяся по направлению потока, за которой плотность среды оказывается равной конечному максимально возможному значению и больше возрастать не может. Это коренным образом отличает рассматриваемые волны от газодинамических сильных разрывов, накладывая другие условия на скорость распространения волны. Условие $D_* > \nu_0$ возникает при невыполнении условия (2.4), откуда

$$\nu_1 - \nu_0 > k\rho_1^{-1/2}(1 - \rho_0)$$

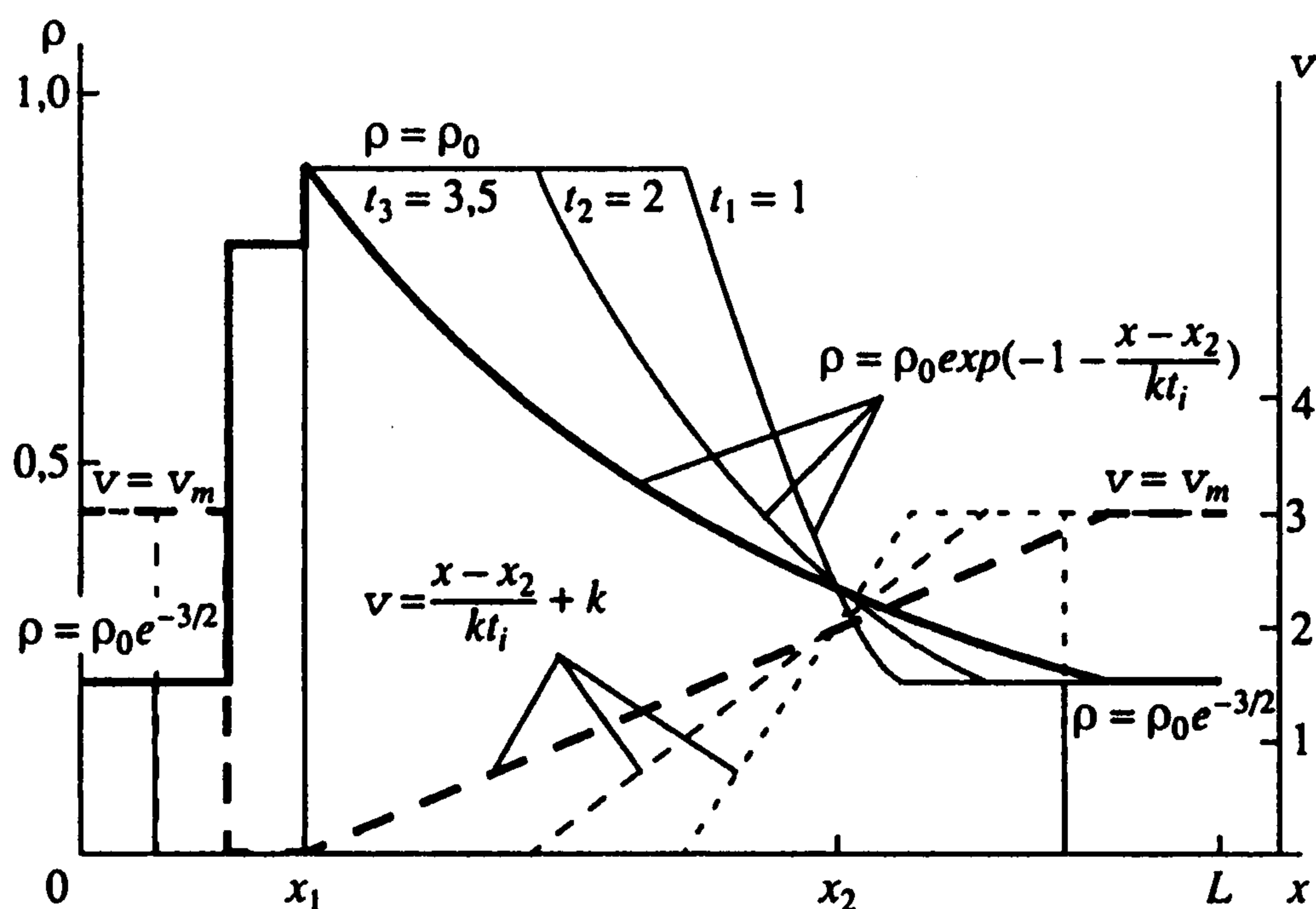
Заметим, что скорость волны упаковки (2.7) определена с использованием условия сохранения потока массы, которое имеет вид (2.1). Условие сохранения потока количества движения для волны упаковки имеет вид отличный от (2.2) и служит для определения неизвестных напряжений, возникающих при установлении физического контакта между элементами системы.

3. Решение модельной задачи. Построим решение модельной задачи о динамике движения по кольцевой однонаправленной дороге. Пусть имеется полоса движения длины L , где граничными условиями при $x = 0$ являются значения решения при $x = L$. Пусть в начальный момент покоящиеся транспортные средства сосредоточены на участке $x_1 < x < x_2$ и имеют плотность $\rho_0 < 1$ ($\nu_0 = 0$). Значения характерных скоростей для рассматриваемой системы пусть будут $\nu_m = 3V$, $k = 2V$, что допускает существование "дозвуковых" и "сверхзвуковых" режимов движения. Предположим также, что $\alpha^+L \gg V^2$, $\alpha^-L \gg V^2$. Волновая картина движения представлена на фиг. 3.

При распаде разрыва в точке $x = x_2$ образуется центрированная волна ускорения, в которой автомобили ускоряются до скорости ν_m и далее движутся с постоянной скоростью. Головная характеристика волны ускорения ($x = x_2 - kt$) распространяется влево против потока. "Хвост" волны также распространяется против потока, но последняя характеристика ($x = x_2 + (\nu_m - k)t$) сносится потоком вправо. Головной поток машин движется равномерно: $x = x_2 + \nu_m t$. При выполнении условия $x_2 - x_1 > L/(1 + \nu_m/k)$, что имеет место в данной задаче ($x_2 - x_1 > 2L/5$), головные автомобили через некоторое время (в точке $x = x_1$) встречают стоящие автомобили, до которых еще не



Фиг. 3

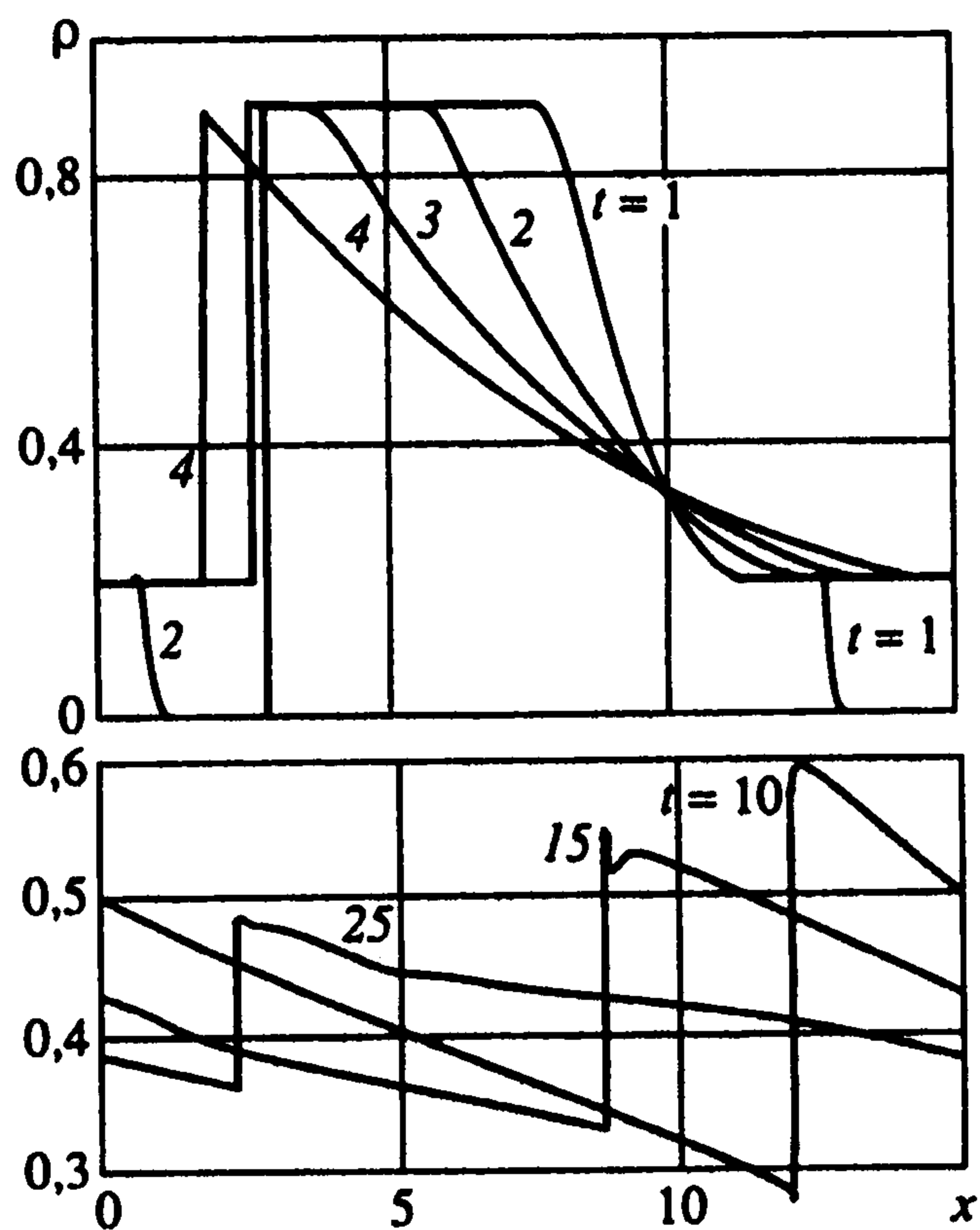


Фиг. 4

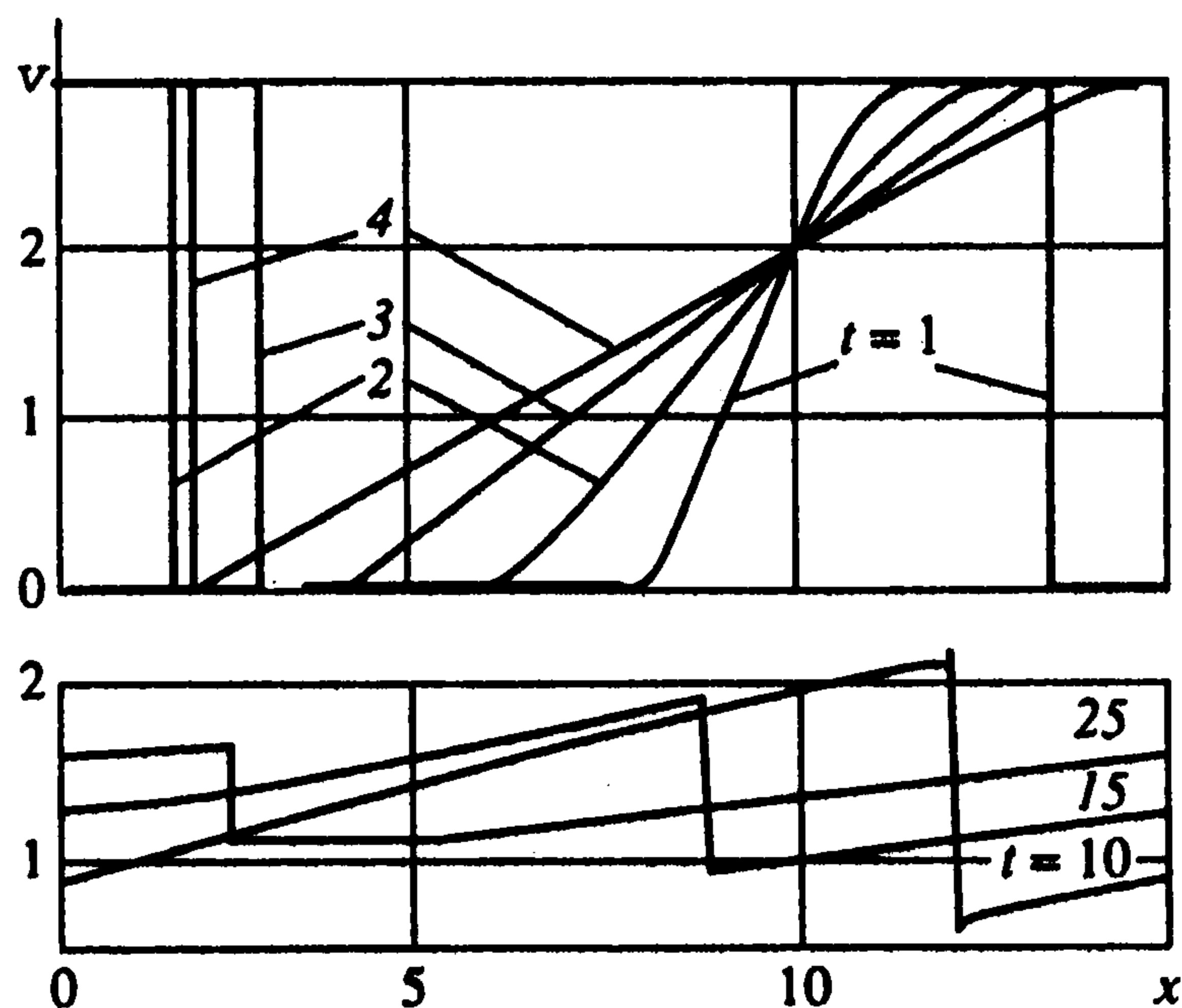
дошла волна ускорения. Поток затормаживается до полной остановки. Навстречу потоку распространяется волна торможения $x = x_1 - Dt$ со скоростью $D = -V$. Затормозившийся поток остается в покое до тех пор, пока до него не дойдет головная характеристика волны ускорения, после чего вновь происходит ускорение потока (но более плавное). Типичный пример траектории движения изображен на фиг. 3 штриховой линией.

Через некоторое время головная характеристика волны ускорения ($x = x_2 - 2Vt$) догоняет волну торможения ($x = x_1 - Vt$). В точке их взаимодействия берет начало расширяющаяся область, где существует общее решение системы. Эта область ограничена характеристиками C^- и C^0 .

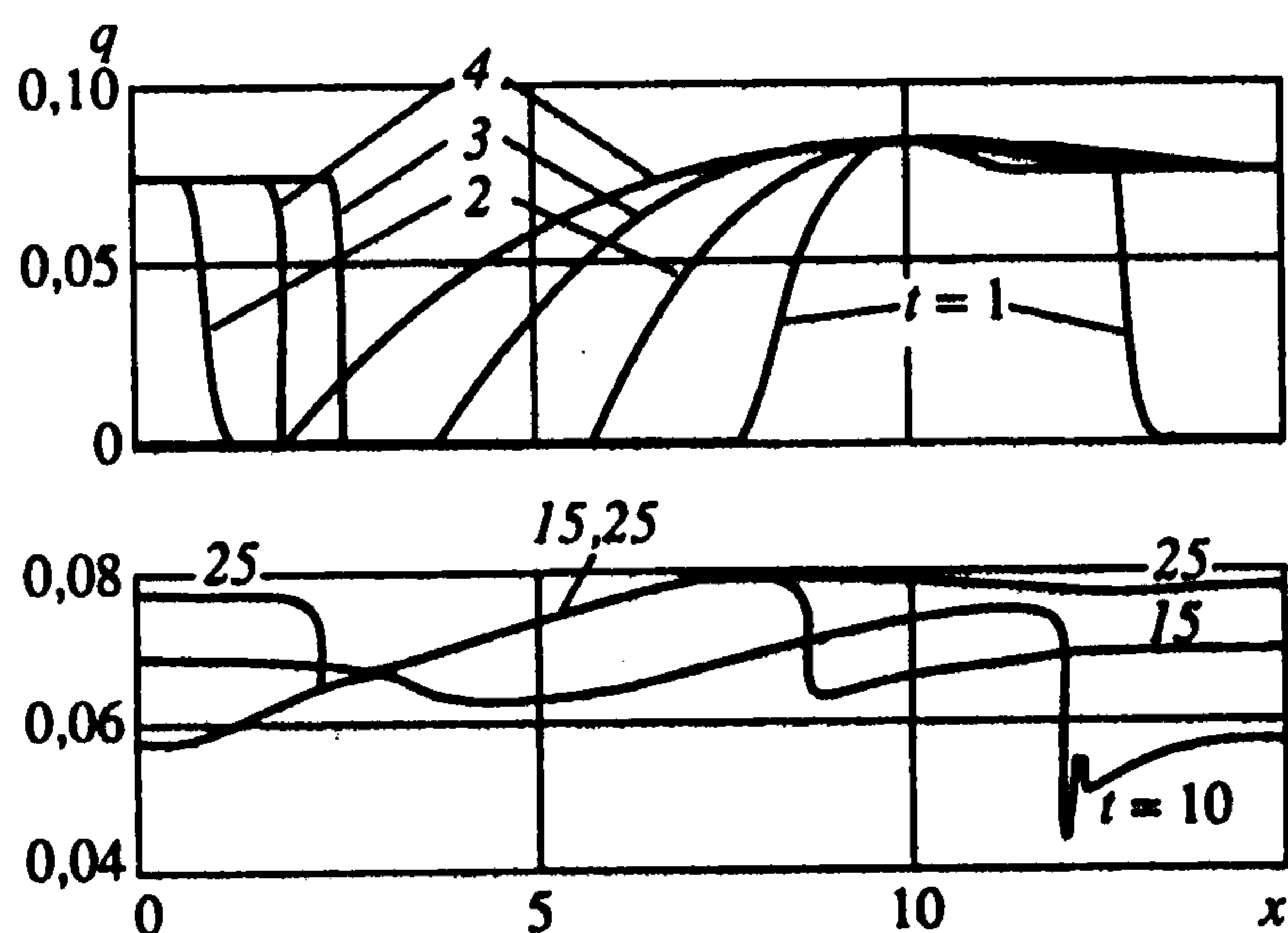
Профили распределения плотности и скорости для трех последовательных моментов времени представлены на фиг. 4. Видно, что скорость движения (штриховые линии) линейно возрастает в волне ускорения от 0 до v_m . Плотность же потока экспоненциально убывает от ρ_0 до $\rho_0 e^{-3/2}$. В волне торможения затем плотность возрастает до величины $\rho = 4\rho_0 e^{-3/2} < \rho_0$. Графики распределения плотности и скорости для всех моментов времени проходят через одни и те же точки при $x = x_2$: $\rho = \rho_0 e^{-1}$, $v = k$ при всех значениях t .



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

4. Численное решение задачи о неустановившемся движении по кольцевому шоссе. Численное решение полученной системы уравнений осуществлялось методом коррекции потоков [7] с точностью второго порядка. При этом начальные и граничные условия соответствовали примеру, рассмотренному в разд. 3. Аналитические точные решения, полученные для начальных моментов времени $t \leq 3,5$ (фиг. 4), служили в качестве теста для выбранного численного алгоритма. Анализ результатов численного решения – распределений плотности (фиг. 5), скорости (фиг. 6) и пропускной способности (фиг. 7) для соответствующих времен – показывает, что оно обладает требуемой точностью. Неизбежное при численной реализации "размазывание" переднего фронта приводит к появлению "предвестника" малой плотности, также движущегося с максимальной скоростью, что, однако, не портит в целом полученную картину движения.

На фиг. 5 приведены профили плотности для последовательных моментов времени. Видно, что после взаимодействия волны ускорения с волной торможения последняя начинает ослабляться, но продолжает распространяться против потока, доходит до $x = 0$ и затем появляется при $x = L$ (нижняя часть фиг. 5).

Анализ профилей пропускной способности (фиг. 7) показывает, что максимальная пропускная способность достигается при $x = x_2$, когда скорость потока равна местной скорости звука $v = k$, а плотность $\rho = 1/e$, что согласуется с теоретическими выводами.

Результаты численного решения показывают, что с течением времени на кольцевой однополосной дороге возникает "подвижная пробка". Эта пробка перемещается против потока. В ней происходит падение скорости (но не до полной остановки) и увеличение плотности, в целом приводящее к небольшому уменьшению пропускной способности. С течением времени амплитуды изменения определяющих параметров в подвижной пробке уменьшаются. Попав в такую пробку, автомобили резко сбрасывают скорость, а затем плавно ускоряются до прежнего значения скорости. Подобную пробку можно встретить на значительных расстояниях от места возникновения первоначального затора.

Рассмотренный пример характеризуется достаточно большой средней плотностью транспортных средств на кольцевом шоссе. Поэтому устанавливающийся на нем режим движения характеризуется средней скоростью, значительно меньшей, чем максимально разрешенная на данной дороге: $v_m = 3V$. При этом устанавливающееся на дороге значение пропускной способности q (фиг. 7) близко к оптимальному.

5. Заключение. Сравнение предлагаемой модели с существующими в литературе показывает, что данная модель учитывает ограничения транспортного потока на скорость и ускорение отдельных элементов, а также технические характеристики транспортных средств и особенности реакции водителя на изменение дорожной обстановки. В силу этого задача не имеет прямой гидродинамической аналогии. Рассматриваемая среда (потоки транспорта) обладает рядом отличий от традиционно рассматриваемых в механике сплошных сред: наличие конечных ограничений на скорости, ускорения (положительные и отрицательные) и плотности, однонаправленность распространения слабых возмущений, возможность существования различных волн сильного разрыва.

Разработанная модель позволяет правильно качественно и количественно описать такие характеристики, возникновение и эволюция "подвижных пробок" на магистралях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinetic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 229. № 1178. P. 317–345.
2. *Richards P.L.* Shock waves on the highway // Operations Research. 1956. V. 4. № 1. P. 42–51.
3. *Greenberg H.* An analysis of traffic flow // Operations Research. 1959. V. 7. № 1. P. 79–85.
4. *Prigogine I., Résibois P.* On a generalized Boltzmann-like approach for traffic flow // Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg. 1962. V. 48. № 9. P. 805–814.
5. *Солдатов Г.П.* Момент образования ударной волны в двустороннем транспортном потоке // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 135–137.
6. *Whitham G.B.* Linear and Non-linear Waves. N.Y.: Wiley, 1974. = *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
7. *Oran E., Boris J.* Numerical Simulation of Reactive Flow. N.Y.: Elsevier, 1987. = *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков // М.: Мир, 1990. 662 с.