

УДК 538.4

© 2000 г. Ю.Г. Губарев, М.-Б.А. Негматов

К НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ ПОКОЯ ВЯЗКОЙ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Исследуется задача линейной устойчивости состояний покоя вязкой сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в магнитном поле. Прямым методом Ляпунова показано, что данные состояния покоя неустойчивы относительно малых пространственных возмущений, уменьшающих эффективную потенциальную энергию, которая представляет собой сумму внутренней энергии среды и энергии магнитного поля. Получены априорные двусторонние экспоненциальные оценки роста возмущений, причем показатели экспонент в этих оценках вычисляются по параметрам состояний покоя и начальным данным для возмущений. Найден класс наиболее быстрорастущих возмущений и выведена точная формула для определения скорости их нарастания. Построен пример состояний покоя и начальных возмущений, которые эволюционируют в соответствии с полученными оценками до тех пор, пока остается справедливым линейное приближение.

Настоящая работа является естественным развитием и обобщением известных результатов [1, 2] на новые магнитогидродинамические равновесия плазмы, поскольку в ней одновременно учитываются такие физические свойства рассматриваемой среды, как вязкость и сжимаемость.

1. Постановка точной задачи. Изучаются трехмерные движения вязкой сжимаемой бесконечной по проводимости среды, которая находится в магнитном поле. Предполагается, что область τ течения среды ограничена фиксированными непроницаемыми идеально проводящими стенками $\partial\tau$. Ниже используются обозначения: ρ , p , T , s , e и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – поля плотности, давления, температуры, энтропии, внутренней энергии и скорости; $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ – магнитное поле; η и ζ – постоянные положительные коэффициенты динамической и второй вязкости; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – декартовы координаты; t – время. В этих обозначениях уравнения движения среды [3, 4] принимают вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= \sigma_{ik,k} + \frac{h_k}{4\pi} (h_{i,k} - h_{k,i}), \quad h_{i,i} = 0 \\ \frac{dp}{dt} + \rho v_{i,i} &= 0, \quad \frac{dh_i}{dt} = h_k v_{i,k} - h_i v_{k,k}, \quad \rho T \frac{ds}{dt} = D_{ik} v_{i,k} \\ e &= e(\rho, s) : de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ik} \equiv -p \delta_{ik} + D_{ik} \\ D_{ik} &\equiv \eta (v_{i,k} + v_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} v_{l,l}) + \zeta \delta_{ik} v_{l,l} \end{aligned}$$

Полагается, что на границе $\partial\tau$ выполняются следующие условия:

$$v_i = 0, \quad h_i n_i = 0 \quad (1.2)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичная внешняя нормаль к границе $\partial\tau$ области течения среды. Всюду по повторяющимся векторным и тензорным индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Начальные данные для краевой задачи (1.1), (1.2) берутся в форме

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}^0(\mathbf{x}), \quad s(\mathbf{x}, 0) = s^0(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

при этом функции $\rho^0(\mathbf{x})$ и $s^0(\mathbf{x})$ не должны противоречить уравнению состояния среды, а функция $\mathbf{h}^0(\mathbf{x})$ обязана обращать в тождество второе из уравнений системы (1.1) и наряду с функцией $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ быть согласованной с граничными условиями (1.2).

Считается, что все поля, присутствующие в соотношениях (1.1)–(1.3), обладают необходимой степенью гладкости.

Точные нестационарные решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) подчиняются закону сохранения энергии

$$E_1 = K_1 + \Pi_1 = \text{const}$$

Здесь

$$2K_1 \equiv \int \rho v_i v_i d\tau, \quad d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3, \quad \Pi_1 \equiv \int [\rho e(\rho, s) + (8\pi)^{-1} h_i h_i] d\tau$$

(интегрирование везде ведется по области τ течения среды).

Точные стационарные решения смешанной задачи (1.1)–(1.3)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \rho = \rho_0(\mathbf{x}), \quad p = p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}), \quad s = s_0(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

отвечающие состояниям равновесия (покоя) вязкой идеально проводящей сжимаемой среды в магнитном поле, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{h_{0k}}{4\pi} (h_{0i,k} - h_{0k,i}) = p_{0,i}, \quad h_{0i,i} = 0, \quad e = e_0(\rho_0, s_0) \quad (1.5)$$

(где $p_0 \equiv \rho_0^2 e_p(\rho_0, s_0)$) в области τ и условию

$$h_{0i} n_i = 0 \quad (1.6)$$

на ее границе $\partial\tau$.

2. Постановка линеаризованной задачи. Осуществляется линеаризация начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) на стационарных решениях (1.4)–(1.6), в результате чего возникает система уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 v'_{it} &= \sigma'_{ik,k} + \frac{h'_k}{4\pi} (h_{0i,k} - h_{0k,i}) + \frac{h_{0k}}{4\pi} (h'_{i,k} - h'_{k,i}) \\ h'_{i,i} &= 0, \quad \rho'_i + v'_i \rho_{0,i} + \rho_0 v'_{i,i} = 0 \\ h'_{it} + v'_k h_{0i,k} &= h_{0k} v'_{i,k} - h_{0i} v'_{k,k}, \quad s'_i + v'_i s_{0,i} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

определяющая развитие с течением времени малых возмущений полей скорости $\mathbf{v}'$, плотности ρ' , энтропии s' и магнитного поля $\mathbf{h}'$ в области τ течения среды (здесь нижним индексом в виде латинской буквы i обозначена частная производная по времени). Эту систему дополняют условия

$$v'_i = 0, \quad h'_i n_i = 0 \quad (2.2)$$

которые ставятся на границе $\partial\tau$, и начальные данные

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}'^0(\mathbf{x}), \quad \rho'(\mathbf{x}, 0) = \rho'^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}'^0(\mathbf{x}), \quad s'(\mathbf{x}, 0) = s'^0(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

причем функции, фигурирующие в правых частях соотношений (2.3), характеризуются теми же ограничениями, что и соответствующие им функции в правых частях равенств (1.3).

Следует отметить, что тензор σ'_{ik} совпадает с тензором σ_{ik} при замене в последнем p на

$$p' = c_0^2 \rho' + \rho_0^2 s' e_{ps}(\rho_0, s_0) (c_0^2 \equiv \rho_0 [2e_p(\rho_0, s_0) + \rho_0 e_{pp}(\rho_0, s_0)])$$

а D_{ik} на D'_{ik} . В свою очередь тензор D'_{ik} преобразуется к тензору D_{ik} , если в нем заменить v' на v . Далее штрихи у полей возмущений, тензоров σ'_{ik} и D'_{ik} опускаются.

Для того чтобы продемонстрировать неустойчивость состояний покоя (1.4)–(1.6) по отношению к малым пространственным возмущениям (2.1)–(2.3), достаточно найти хотя бы одно возмущение, которое нарастало бы во времени экспоненциально. В связи с этим целесообразно сузить область поиска такого возмущения, рассмотрев движения среды, состоящие исключительно в смещениях жидких частиц из их равновесных положений. Наиболее просто данные движения описываются при помощи поля лагранжевых смещений f [5], удовлетворяющего соотношению

$$f(x, t) = (f_1, f_2, f_3): f_{it} = v_i \quad (2.4)$$

С учетом определения поля f линеаризованная смешанная задача (2.1)–(2.3) может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \rho_0 f_{it} &= -p_{,i} + \frac{h_k}{4\pi} (h_{0i,k} - h_{0k,i}) + \frac{h_{0k}}{4\pi} (h_{i,k} - h_{k,i}) + G_{ikt} \\ \rho + f_i \rho_{0,i} + \rho_0 f_{i,i} &= 0, \quad h_i + f_k h_{0i,k} = h_{0k} f_{i,k} - h_{0i} f_{k,k} \\ s + f_i s_{0,i} &= 0 \quad (G_{ik} \equiv \eta \left(f_{i,k} + f_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} f_{l,l} \right) + \zeta \delta_{ik} f_{l,l}) \quad \text{в } \tau \\ f_i &= 0, \quad h_i n_i = 0 \quad \text{на } \partial \tau \\ f(x, 0) &= f^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

На решениях начально-краевой задачи (2.4), (2.5) справедливо уравнение диссипации энергии

$$\dot{E} = -D \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} E &\equiv K + \Pi, \quad 2K \equiv \int \rho_0 v_i v_i d\tau, \quad 2\Pi \equiv \int \left[-p f_{k,k} + \frac{h_i}{4\pi} (h_i - f_k [h_{0k,i} - h_{0i,k}]) \right] d\tau \\ D &\equiv \int \left[\frac{\eta}{2} (v_{i,k} + v_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} v_{l,l})^2 + \zeta v_{i,i}^2 \right] d\tau \end{aligned}$$

(точка над буквой E обозначает полную производную по времени).

Предполагается, что существует начальное поле лагранжевых смещений $f^0(x)$, которое обеспечивает выполнение условия

$$\Pi(0) < 0 \quad (2.7)$$

Разумеется, для других начальных полей $f^0(x)$ (2.5) знак неравенства (2.7) может смениться на противоположный.

При наличии условия (2.7) ниже будут получены двусторонние оценки, свидетельствующие об экспоненциальном с течением времени росте малых возмущений состояний равновесия (1.4)–(1.6).

3. Функционал Ляпунова. С этой целью, руководствуясь рекомендациями работ [1, 2], вводятся вспомогательные функционалы вида

$$M \equiv \int \rho_0 f_i f_i d\tau, \quad X \equiv \dot{M} + G, \quad G \equiv \int \left[\frac{\eta}{2} (f_{i,k} + f_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} f_{l,l})^2 + \zeta f_{i,i}^2 \right] d\tau \quad (3.1)$$

Дифференцирование интеграла X по времени и дальнейшие преобразования с применением (2.4)–(2.6), (3.1) приводят к соотношению

$$\dot{X} = 4(K - \Pi) = 8K - 4E$$

которое называется вириальным равенством [5]. Умножая данное равенство на произвольный постоянный множитель λ и вычитая получившийся результат из уравнения (2.6), можно вывести связь

$$\dot{E}_\lambda = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda K_\lambda - D_\lambda \quad (3.2)$$

Здесь

$$E_\lambda \equiv K_\lambda + \Pi_\lambda, \quad 2K_\lambda \equiv 2K - \lambda \dot{M} + \lambda^2 M = \int \rho_0 (\mathbf{f}_t - \lambda \mathbf{f})^2 d\tau$$

$$2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + \lambda G + \lambda^2 M, \quad D_\lambda \equiv D - \lambda \dot{G} + \lambda^2 G =$$

$$= \int \left[\frac{\eta}{2} (v_{i,k} + v_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} v_{l,l} - \lambda (f_{i,k} + f_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} f_{l,l}))^2 + \zeta (v_{i,i} - \lambda f_{i,i})^2 \right] d\tau$$

Если теперь положить $\lambda > 0$, то в силу неотрицательности функционалов K_λ и D_λ отсюда будет вытекать дифференциальное неравенство $\dot{E}_\lambda \leq 2\lambda E_\lambda$, интегрирование которого дает возможность установить соотношение

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda^0 \exp(2\lambda t) \quad (E_\lambda^0 \equiv E_\lambda(0)) \quad (3.3)$$

играющее определяющую роль во всем последующем изложении.

Важно, что неравенство (3.3) имеет место для любых решений смешанной задачи (2.4), (2.5). Кроме того, при его выводе не потребовалось налагать каких-либо ограничений на знак функционала Π (2.6).

Соотношение (3.3) показывает, что интеграл E_λ (3.2) меняется с течением времени монотонно, а потому он может рассматриваться ниже как функционал Ляпунова [1, 2].

4. Оценки снизу и сверху. Пусть условие (2.7) выполнено. Поскольку поле лагранжевых смещений $\mathbf{f}$ и возмущения поля скорости $\mathbf{v}$ задаются в начальный момент времени независимо друг от друга, в качестве последних можно взять такую функцию $\mathbf{v}^0$ (2.3), чтобы было верным неравенство $K^0 < |\Pi^0|$. В этом случае интеграл E_λ^0 (3.2) предстанет полиномом второй степени от λ с положительным коэффициентом M^0 (3.1) при λ^2 и отрицательным свободным членом E^0 (2.6):

$$E_\lambda^0 = M^0 \lambda^2 + A^0 \lambda + E^0 \quad (2A \equiv G - \dot{M}) \quad (4.1)$$

Если выбрать $\lambda > 0$, то из (4.1) будет вытекать, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 = -\frac{A^0}{2M^0} + \sqrt{\left(\frac{A^0}{2M^0}\right)^2 - \frac{E^0}{M^0}} \quad (4.2)$$

справедливо соотношение

$$E_\lambda^0 < 0 \quad (4.3)$$

Неравенства (3.3), (4.3) свидетельствуют об экспоненциальном по времени нарастании решений начально-краевой задачи (2.4), (2.5).

Положив $\lambda = \Lambda_1 - \delta \equiv \sigma$ (с любым δ из промежутка $]0, \Lambda_1[$), соотношению (3.3) можно придать форму

$$E_\sigma(t) \leq E_\sigma^0 \exp[2\sigma t] \quad (E_\sigma^0 < 0) \quad (4.4)$$

Согласно определению функционала E_λ , имеет место неравенство

$$E_\lambda(t) > \Pi(t)$$

позволяющее переписать соотношение (4.4) в виде

$$\Pi(t) < E_\sigma^0 \exp[2\sigma t] \quad (4.5)$$

При помощи дополнительного интеграла

$$J(t) \equiv \int [\rho^2 + s^2 + f_{i,i}^2 + h_i h_i + f_i f_i] d\tau$$

неравенство (4.5) преобразуется к окончательной и наиболее наглядной форме

$$J(t) > |c E_\sigma^0| \exp[2\sigma t] \quad (4.6)$$

где c – известная постоянная. Из соотношения (4.6) следует, что параметр σ (4.2), (4.4) оценивает снизу инкременты решений смешанной задачи (2.4), (2.5).

Оценка (4.6) существенно улучшится, если начальные возмущения поля скорости v^0 связать с начальным полем лагранжевых смещений f^{0*} (2.5), (2.7) посредством равенства

$$v^0(x) = \lambda f^{0*}(x) \quad (4.7)$$

Действительно, наличие связи (4.7) является причиной того, что из (3.2) тогда можно будет получить соотношения

$$K_\lambda^0 = 0, \quad E_\lambda^0 = \Pi_\lambda^0$$

которые при $\lambda > 0$ и учете (4.1) дадут возможность убедиться в истинности неравенства $\Pi_\lambda^0 < 0$ на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda = -\frac{G^0}{2M^0} + \sqrt{\left(\frac{G^0}{2M^0}\right)^2 - \frac{2\Pi^0}{M^0}} \quad (4.8)$$

Если принять $\lambda = \Lambda - \delta_1 \equiv \sigma_1$ (с произвольным δ_1 из промежутка $]0, \Lambda[$), то соотношение (3.3) запишется в виде

$$E_{\sigma_1}(t) \leq \Pi_{\sigma_1}^0 \exp[2\sigma_1 t] \quad (\Pi_{\sigma_1}^0 < 0) \quad (4.9)$$

откуда с использованием определения функционала $J(t)$ и выводится искомая улучшенная (т.е. более строгая) оценка

$$J(t) > |c_1 \Pi_{\sigma_1}^0| \exp[2\sigma_1 t] \quad (4.10)$$

(здесь c_1 – известная постоянная величина). Неравенство (4.10) говорит о том, что параметр σ_1 (4.8), (4.9) доставляет собой нижнюю границу для значений инкрементов решений начально-краевой задачи (2.4), (2.5), (4.7). При этом сопоставление оценок (4.6) и (4.10) показывает, что решения смешанной задачи (2.4), (2.5), начальные данные которых дополнительно подчинены условию (4.7), растут быстрее всех остальных возмущений.

Однако наибо́льший рост решений начально-краевой задачи (2.4), (2.5) наблюдается в том случае, когда их инкремент роста равен следующей величине:

$$\Lambda^+ \equiv \sup_{f^0(x)} \Lambda \quad (4.11)$$

Для того чтобы доказать это утверждение, необходимо найти оценку, из которой вытекала бы ограниченность сверху нарастания малых пространственных возмущений состояний покоя (1.4)–(1.6). С этой целью параметр λ выбирается строго большим Λ^+ . Тогда интеграл Π_λ^0 будет положительно определен при любом возможном задании начального поля лагранжевых смещений f^0 (2.5). Это означает, что функционал E_λ^0 также будет положительным для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений f^0 и возмущений поля скорости v^0 (2.4), (2.5).

Следовательно, взяв $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon \equiv \sigma_2$, где $\varepsilon > 0$, можно неравенство (3.3) представить в форме

$$E_{\sigma_2} \leq E_{\sigma_2}^0 \exp[2\sigma_2 t] \quad (4.12)$$

Если теперь принять во внимание оценку

$$\Pi_{\Lambda^+}(t) \geq 0$$

то неравенство (4.12) может быть переписано в более наглядном виде

$$2K_{\sigma_2}(t) + \varepsilon(\Lambda^+ + \sigma_2)M(t) + \varepsilon G(t) \leq 2E_{\sigma_2}^0 \exp[2\sigma_2 t] \quad (4.13)$$

Соотношение (4.13) свидетельствует о том, что параметр σ_2 (4.8), (4.11) оценивает сверху инкременты решений смешанной задачи (2.4), (2.5).

Сравнение оценок (4.10) и (4.13) позволяет сделать вывод о том, что параметр Λ^+ ограничивает скорость нарастания решений начально-краевой задачи (2.4), (2.5) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leq \omega_* \leq \Lambda^+ + \varepsilon \quad (4.14)$$

В свою очередь двойное неравенство (4.14) дает возможность прийти к заключению, что наиболее быстро растут те из решений смешанной задачи (2.4), (2.5), у которых инкремент совпадает по величине с Λ^+ (4.11).

Итак, если выполняется условие (2.7), то, вычислив значение Λ^+ по формулам (4.10), (4.11), можно определить характерное время, в течение которого вязкая идеально проводящая сжимаемая среда, содержащая магнитное поле, перестанет находиться в том или ином состоянии равновесия (1.4)–(1.6).

5. Пример. В цилиндрической системе координат r, φ, z рассматриваются магнитогидродинамические состояния покоя вязкой сжимаемой бесконечной по проводимости среды, которая полностью заполняет пространство между двумя соосными цилиндрами, ограниченными по высоте:

$$\begin{aligned} v_0 &\equiv 0, \quad h_0 = (0, \alpha r^2, 0), \quad p_0 = \frac{3\alpha^2}{16\pi} [r_2^4 - r^4] \\ e_0 &= e_0(p_0, s_0), \quad p_0 = p_0(r), \quad s_0 = s_0(r) \\ \tau &= [(r, z) : 0 < r_1 < r < r_2, \quad 0 < z < z_1] \end{aligned} \quad (5.1)$$

(здесь α, r_1, r_2 и z_1 — постоянные величины). Следует отметить, что уравнение состояния среды считается произвольным, а функции p_0 и s_0 выбираются из тех соотношений, чтобы получать с их помощью для любого наперед заданного уравнения состояния нужное распределение давления p_0 .

Состояния равновесия (5.1), что можно проверить непосредственными вычислениями, являются точным решением стационарных уравнений (1.5) в области τ , тогда

как на ее поверхности $\partial\tau = [(r, z) : r = r_1, r = r_2, z = 0, z = z_1]$ магнитное поле $\mathbf{h}_0$ удовлетворяет граничному условию (1.6).

Оказывается, что данные состояния равновесия будут неустойчивы, например, к таким малым возмущениям, которым отвечает начальное поле лагранжевых смещений

$$\mathbf{f}^{0*} = \left(r^{-1} \frac{\partial q_2}{\partial z}, q_1, -r^{-1} \frac{\partial q_2}{\partial r} \right) \quad (5.2)$$

причем от функций $q_1(r, z)$ и $q_2(r, z)$ требуется лишь, чтобы они обеспечивали истинность граничных условий (2.5). В остальном же эти функции допускают значительный произвол и, в частности, могут быть взяты в следующей форме:

$$q_k = a_k (r - r_1)^k (r - r_2)^k z^k (z - z_1)^k \quad (k = 1, 2) \quad (5.3)$$

где a_1 и a_2 — некоторые постоянные.

В самом деле, проделав необходимые расчеты, нетрудно показать, что в данном случае

$$\Pi(0) = -\frac{\alpha^2}{2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{z_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial z} \right)^2 r dr dz < 0$$

т.е. условие (2.7) справедливо. Тем самым возмущения (5.2), (5.3) будут нарастать со временем в соответствии с оценками (4.6), (4.10) и (4.13), а их скорость роста будет определяться формулами (4.2), (4.8) и (4.11).

Авторы благодарят В.В. Кузнецова за обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00597, 99-01-00614).

ЛИТЕРАТУРА

1. Губарев Ю.Г. К обращению теоремы Лагранжа в магнитной гидродинамике // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 988–991.
2. Губарев Ю.Г., Ковылина С.С. Неустойчивость состояний покоя идеальной проводящей среды в магнитном поле // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 148–155.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
4. Демуцкий В.П., Половин Р.В. Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 206 с.
5. Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Hawen; London: Univ. Press, 1969. — Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1987. 288 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
12.VII.1999