

УДК 532.526.2

© 2000 г. А.Д. Хонькин

**О ТЕЙЛОРОВОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛЯХ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ПАССИВНОЙ
ПРИМЕСИ
В КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССАХ**

Рассматривается задача о дисперсии пассивной примеси в круглой трубе. С помощью асимптотического метода, аналогичного методу Чепмена – Энскога кинетической теории газов или методу усреднения Крылова – Боголюбова нелинейной механики, выводится уравнение нестационарной диффузии для средней по сечению трубы концентрации примеси, полученное Тейлором из физических соображений. В рамках асимптотического метода получена рекуррентная система уравнений для членов разложения произвольного порядка. Даны оценки применимости тейлоровской модели продольной дисперсии, уточняющие оценки, установленные Тейлором. Для расширения пределов применимости модели Тейлора используется двучленное представление Бубнова – Галеркина для средней по сечению трубы концентрации, которая теперь описывается телеграфным уравнением гиперболического типа. Получена функция Грина для данной модели, согласно которой распределение концентрации примеси характеризуется наличием фронтов возмущений и конечными скоростями их распространения. Продемонстрировано асимптотическое соответствие между функцией Грина гиперболической модели и функцией Грина тейлоровской модели.

Исследуя задачу о продольной дисперсии пассивной примеси в потоке жидкости в круглой трубе, Тейлор [1, 2] обнаружил, что взаимодействие процессов конвекции и поперечной диффузии порождает специфический механизм продольной дисперсии, который значительно сильнее, чем механизм молекулярной диффузии. Полученное Тейлором уравнение для средней по сечению трубы концентрации примеси нашло широкое применение при построении одномерных моделей различных устройств, таких, как, например, проточные тепловые и химические реакторы. Однако подход Тейлора основан на физических соображениях, так что имеется необходимость вывода уравнения Тейлора с помощью какой-либо регулярной процедуры последовательных приближений. Кроме того, модель Тейлора приводит к параболическому уравнению нестационарной диффузии и, следовательно, к известному парадоксу бесконечности скорости распространения возмущений.

Ниже показано, что модель Тейлора может быть получена с помощью асимптотического метода, в рамках которого определяются малый параметр и оценки применимости модели, и строится гиперболическая модель продольной дисперсии с конечными скоростями распространения возмущений, которая асимптотически эквивалентна модели Тейлора в областях, удаленных от фронтов возмущений.

1. Асимптотическая теория тейлоровской дисперсии пассивной примеси. В простейшем случае линейного механизма нестационарной дисперсии пассивной примеси в отсутствие физико-химических превращений задача описывается уравнением нестационарной конвекции – диффузии для концентрации пассивной примеси $c(\mathbf{R}, t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)c = (\nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla)c \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{V}$ – вектор скорости несущей среды (жидкости или газа), $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки пространства, $\mathbf{D}$ – тензор коэффициентов диффузии. В общем случае как $\mathbf{V}$, так и $\mathbf{D}$ могут быть функциями времени и координат, которые считаются известными.

Тейлор рассматривал осесимметричную задачу нестационарной дисперсии пассивной примеси в цилиндрической трубе радиуса a , описываемую уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(r) \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[D(r) r \frac{\partial c}{\partial r} \right] \quad (1.2)$$

и граничным условием

$$\partial c / \partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad (1.3)$$

где x – продольная координата, отсчитываемая вдоль оси трубы, r – радиальная координата, отсчитываемая от оси трубы, $u(r)$ – ламинарный профиль скорости по Пуазейлю [1] или турбулентный профиль скорости, который задавался в [2] таблицей экспериментальных значений, и $D(r)$ – коэффициент молекулярной или турбулентной диффузии примеси. При записи уравнения конвекции – диффузии в форме (1.2) Тейлор предположил, что влиянием продольной диффузии $D(\partial^2 c / \partial x^2)$ в уравнении (1.1) можно пренебречь. Это предположение было обосновано им посредством анализа полученных результатов.

Для осредненной по сечению трубы концентрации

$$c_0(x, t) = \langle c \rangle = \frac{2}{a^2} \int_0^a c(x, r, t) r dr \quad (1.4)$$

(угловыми скобками здесь и далее обозначаются средние по сечению трубы величины) из уравнения (1.2) следует "закон сохранения"

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

где средний поток есть

$$\langle J \rangle = \langle uc \rangle \quad (1.6)$$

Обсуждая эту проблему конвекции – диффузии, Тейлор замечает, что в практических целях представляет интерес получить замкнутое уравнение для средней концентрации c_0 , т.е. получить какое-либо приближенное выражение для среднего потока $\langle J \rangle$ через c_0 . Исходя из физических соображений (которые сам он назвал интуитивными), Тейлор вывел приближенное уравнение

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial c_0}{\partial x} = D_{\text{eff}} \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

где для ламинарного профиля скорости по Пуазейлю

$$u = u_m [1 - (r/a)^2]$$

коэффициент эффективной диффузии равен

$$D_{\text{eff}} = a^2 u_m^2 / (192 D)$$

Можно видеть, что эффективная продольная дисперсия обратно пропорциональна коэффициенту D ($D = \text{const}$).

В работах (см. обзор в [3]), посвященных проблеме строгого вывода модели Тейлора и ее аналогов для других задач, были попытки обосновать или уточнить предположения Тейлора, однако в них не было достигнуто большего понимания, как, например, в [4], или даже содержались ошибки (например, в [3] приближенное выражение для концентрации c нарушает

условие $\langle c \rangle = c_0$). Ясное изложение результатов Тейлора, не выходящее за рамки его идей дано В.Г. Левичем [5].

Сформулированная Тейлором "проблема замыкания" типична в теоретической и математической физике. Например, на языке кинетической теории газов уравнение (1.2) можно рассматривать как "кинетическое уравнение" для функции распределения $c(x, r, t)$, уравнение (1.5) – как "закон сохранения" для ее первого (нулевого) момента, а уравнение (1.7) – как "приближенное уравнение гидродинамики". Сама проблема вывода уравнения (1.7) из (1.2) теперь становится проблемой перехода от подробного "микроскопического" описания на уровне "функции распределения" $c(x, r, t)$ к огрубленному "макроскопическому" описанию системы с помощью гидродинамического параметра $c_0(x, t)$, получаемого из $c(x, r, t)$ с помощью процедуры осреднения.

В кинетической теории газов соответствующая проблема решается с помощью метода Чепмена – Энскога [6], который на жаргоне специалистов называется "разложением по градиентам параметров гидродинамического состояния". Общий подход к решению проблем такого рода дал Н.Н. Боголюбов [7]. Он замечает, что проблема сокращенного описания систем родственна проблеме осреднения нелинейных динамических систем по быстрым переменным, для решения которой им же совместно с Н.М. Крыловым были разработаны соответствующие асимптотические методы. В рассматриваемом здесь случае быстрой переменной является поперечная координата r , по которой проводится осреднение.

Следуя Н.Н. Боголюбову ([6, § 9]), чтобы в явной форме подчеркнуть тот факт, что x – медленная переменная, и избежать лишних преобразований координат, введем формальным образом малый параметр ϵ и будем рассматривать распределение $c(\epsilon x, r, t)$ и строить асимптотические разложения по степеням этого параметра. В окончательных формулах параметр ϵ полагается равным единице.

Как и в [6], желая получить уравнение для изучения "медленного" процесса эволюции гидродинамического параметра c_0 , будем строить такое решение динамического уравнения (1.2), которое функциональным образом зависит от времени через зависимость от времени "гидродинамического параметра" $c_0(\xi, t)$ с $\xi = \epsilon x$ [7]:

$$c(\xi, r, t) = c_0(\xi, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k c_k(\xi, r | c_0), \quad \langle c_k \rangle = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial \xi} = -\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \frac{\partial J_k}{\partial \xi}, \quad J_k = \langle \nu c_k \rangle \quad (1.9)$$

Функциональная зависимость от времени через посредство c_0 членов разложения (1.8) означает, что при вычислении их производных по t нужно дифференцировать входящие в них функции c_0 и заменять $\partial c_0 / \partial t$ в соответствии с разложениями (1.9). В нелинейной механике такая процедура соответствует исключению секулярных членов, тогда как в кинетической теории и в рассматриваемом случае она позволяет получать асимптотическое описание эволюции "на больших временах" или "на гидродинамическом уровне" [8].

В силу линейности и структуры уравнений (1.8), (1.9) можно убедиться, что члены разложения c_k имеют следующую структуру:

$$c_k = A_k(r) \frac{\partial^{(k)} c_0}{\partial \xi^k} \quad (1.10)$$

и соответственно

$$J_k = \langle \nu A_k \rangle \frac{\partial^{(k)} c_0}{\partial \xi^k} \quad (1.11)$$

Эти формулы можно применять и для $k = 0$, если принять, что производная нулевого порядка есть просто операция умножения на единицу. Очевидно, что $A_0 = 1$.

Функции $A_k(r)$ удовлетворяют уравнениям, следующим из уравнения (1.2) при подстановке соотношений (1.8)–(1.11) и приравнивании нулю групп членов при одинаковых степенях параметра ϵ (что эквивалентно приравниванию нулю членов при производных $\partial^{(k)} c_0 / \partial \xi^k$ одного и того же порядка $k > 1$)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_{k+1}}{dr} = G_{k+1} \quad (1.12)$$

где

$$G_{k+1} = uA_k - \sum_{p=0}^k \langle uA_p \rangle A_{k-p}$$

Решение уравнения (1.12), удовлетворяющее краевому условию (1.3), записывается в явном виде

$$A_{k+1}(r) = \int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r r G_{k+1} dr \right) dr + B_{k+1}$$

постоянная B_{k+1} определяется из условия $c_0 = \langle c \rangle$ или $\langle A_{k+1} \rangle = 0$, гарантирующего отсутствие вклада поправок c_{k+1} в среднюю концентрацию c_0 . Таким образом, все члены разложений (1.8), (1.9) определяются однозначно (в явном виде).

Приведем результаты вычислений нескольких первых членов асимптотических рядов

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad J_0 = \frac{u_m}{2} \frac{\partial c_0}{\partial x} \\ A_1 &= -\frac{a^2 u_m}{16D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{2}{3} \right], \quad J_1 = -D_{eff} \frac{\partial c_0}{\partial x}, \quad D_{eff} = \frac{a^2 u_m^2}{192D} \end{aligned} \quad (1.13)$$

В этом порядке асимптотической теории соответствующее "уравнение гидродинамики", т.е. приближенное уравнение для средней концентрации c_0 , в точности совпадает с уравнением Тейлора (1.7), которое получается теперь как продукт регулярной асимптотической процедуры и может уточняться посредством учета последующих приближений. Например, в следующем приближении (не используемые в дальнейшем громоздкие вычисления и выражения опускаются)

$$J_2 = D_2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2}, \quad D_2 = \frac{u_m^3 a^4}{23040D^2}$$

и обобщенное уравнение дисперсии для c_0 принимает вид

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{u_m}{2} \frac{\partial c_0}{\partial x} = D_{eff} \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} - D_2 \frac{\partial^3 c_0}{\partial x^3} \quad (1.14)$$

Метод Чепмена – Энскога часто называют разложением по градиентам параметров гидродинамического состояния, так как каждый следующий член этого разложения решения уравнения Больцмана (по малому числу Кнудсена) содержит на единицу большее число производных по пространственным переменным, чем предыдущий член. Точно так же и в асимптотических разложениях (1.8), (1.9) содержится в каждом последующем слагаемом на единицу более высокая производная по продольной координате, чем в предыдущем слагаемом, как это явно показано в соотношениях (1.10), (1.11).

В безразмерных переменных ряды в формулах (1.8), (1.9) будут представлять собой разложения по степеням безразмерного параметра $\epsilon_* = a^2 u_m / (Dl)$, где l – характерный масштаб изменения c по продольной координате.

Анализируя условия применимости модели (1.7), Тейлор требует выполнения порядковых соотношений [1, 5]

$$D_{\text{eff}} \gg D, \quad \varepsilon_* \ll 1$$

Первое соотношение позволяет пренебречь членом продольной молекулярной диффузии при переходе от уравнения (1.1) к (1.2), тогда как второе можно переписать в виде условия малости отношения поперечного масштаба a к продольному l в виде

$$a/l \ll D/(au_m) \quad (1.15)$$

Из условия же $D_{\text{eff}} \gg D$ следует оценка

$$D/(au_m) \ll 0,07 \quad (1.16)$$

Полученное выше явное выражение для поправки следующего порядка к тейлоровскому выражению позволяет существенно ослабить условие (1.15). В самом деле, для справедливости тейлоровской модели достаточно, чтобы выполнялось условие

$$D_{\text{eff}} |\partial^2 c_0 / \partial x^2| \gg D_2 |\partial^3 c_0 / \partial x^3|$$

или

$$a/l \ll 120(D/(au_m)) \quad (1.17)$$

которое содержит числовой множитель, ослабляющий требование (1.15) более чем на два порядка величины. Отметим еще, что из оценок (1.15) и (1.16) вытекает условие $l \gg 0,12a$, однако оно не является достаточным для применимости модели Тейлора, если не выполнено условие (1.17).

Фундаментальное решение, называемое еще функцией источника или функцией Грина, уравнения (1.7) для главного приближения, представляющего собой тейлоровскую модель продольной дисперсии пассивной примеси при совместном влиянии поперечной диффузии и конвекции в неоднородном поле продольной скорости, имеют вид

$$G(x, t) = (4\pi D_{\text{eff}} t)^{-1/2} \exp[-(x - \langle u \rangle t)^2 / (4D_{\text{eff}} t)]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(x, t) = \delta(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) dx = 1 \quad (1.18)$$

2. Гиперболическая модель дисперсии пассивной примеси. В опытах на установке, сконструированной в соответствии с условиями применимости рассматриваемой теории, Тейлор [1, 2] подтвердил установление асимптотического режима дисперсии в форме (1.18). Тем не менее описание нестационарной дисперсии на основе модели (1.7) обладает дефектом, известным как парадокс бесконечной скорости распространения возмущений. Можно видеть, что, согласно решению (1.18), возмущение, создаваемое в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$, в любой последующий момент времени $t > 0$ будет ощущаться на любом удалении от места его возникновения, т.е. скорость распространения возмущений бесконечна. В то же время очевидно, что уравнение (1.2) этим свойством не обладает: максимальная скорость, с которой могла бы распространяться трассирующая частица в продольном направлении, не может превышать максимальную скорость потока u_m . Этот парадокс разрешается [9] посредством добавления "искусственного члена распространения" в уравнение диффузии и превращения его в телеграфное уравнение гиперболического типа, обеспечивающее конечную скорость распространения возмущений и диффузионный характер решения при стремлении этой скорости к бесконечности.

Аналогичные проблемы возникают во многих областях математической и теоретической физики (см., например, обзоры [10, 11], в которых цитируется более двухсот работ по этой

проблеме только в задачах теплопроводности) и в частности в классической гидродинамике вязкой теплопроводности среды [12]. Искусственное добавление вторых производных по времени в параболические уравнения диффузии и теплопроводности или дополнительных членов релаксационного типа с производными по времени в законы переноса Фика и Фурье, связывающие потоки массы и тепла с порождающими их градиентами концентрации и температуры, еще не решает проблему, так как необходимо теоретически вычислить значения коэффициентов при этих членах на основе исходной модели явления. Эта проблема решена для случаев однокомпонентной [12–14] и многокомпонентной [15–17] сред на основе обобщенных нормальных решений уравнения Больцмана [14, 18, 19]. Для рассматриваемой задачи о нестационарной продольной дисперсии пассивной примеси в стационарном течении жидкости по цилиндрической трубе также разрабатывались волновые (т.е. гиперболические) модели [20–24].

Ниже для построения гиперболической модели продольной дисперсии пассивной примеси используется метод Бубнова – Галеркина, однако в отличие от работ [20, 21, 25], где он также применялся, здесь пробные функции и приближенные решения будут конструироваться на основе результатов развитой в разд. 1 асимптотической теории. Как показано далее, это обеспечивает согласование гиперболических моделей с результатами асимптотического метода в условиях применимости последнего.

В безразмерных переменных

$$\tau = Dt/a^2, \quad \rho = r/a, \quad \xi = Dx/(a^2 u_m)$$

уравнение нестационарной конвекции – диффузии пассивной примеси в стационарном ламинарном течении в цилиндрической трубе (1.2) принимает вид

$$Lc = 0 \tag{2.1}$$

$$L = \frac{\partial}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi} - \Delta, \quad \nu = 1 - \rho^2, \quad \Delta c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} \right)$$

Концентрация примеси c подчиняется краевому условию

$$\partial c / \partial \rho = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \tag{2.2}$$

Начальное условие по времени задается в соответствии с конкретной задачей и здесь опускается.

Для вывода гиперболической модели нестационарной дисперсии воспользуемся идеями метода Бубнова–Галеркина и результатами асимптотического анализа задачи, приведенными выше.

Согласно этому методу, приближенное решение уравнения (2.1) представляют в виде отрезка ряда

$$c_N(\xi, \rho, \tau) = c_0(\xi, \tau) + \sum_{k=1}^N a_k(\xi, \tau) \varphi_k(\rho) \tag{2.3}$$

Здесь пробные функции $\varphi_k(\rho)$ не обязаны быть нормированными и взаимно ортогональными, но должны удовлетворять условиям линейной независимости: никакая функция φ_k не может быть представлена в виде линейной комбинации других пробных функций. Кроме того, функции φ_k подчиняются естественным условиям

$$\partial \varphi_k / \partial \rho = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \text{ и } \rho = 0 \tag{2.4}$$

необходимым для удовлетворения условиям (2.2) и (1.4). Здесь под угловыми скобками теперь подразумевается операция осреднения вида

$$\langle F(\rho) \rangle = 2 \int_0^1 F(\rho) \rho d\rho$$

Для нахождения уравнений, из которых определяются коэффициенты c_0 , a_k представления (2.3), можно использовать различные подходы, особенно при небольшом

числе N , но наиболее естествен классический подход, согласно которому эти коэффициенты определяются из системы уравнений

$$\langle \varphi_k(Lc_N) \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad \varphi_0 = 1$$

где L – оператор уравнения (2.1). В явном виде уравнения для определения коэффициентных функций c_0 , a_k имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_0}{\partial \tau} + \langle \nu \rangle \frac{\partial c_0}{\partial \xi} + \sum_{k=1}^N V_k \frac{\partial a_k}{\partial \xi} &= 0, \quad V_k = \langle \nu \varphi_k \rangle \\ \sum_{k=1}^N A_{kp} \frac{\partial a_k}{\partial \tau} + \sum_{k=0}^N V_{kp} \frac{\partial a_k}{\partial \xi} - \sum_{k=1}^N \Delta_{kp} a_k &= 0, \quad p = 1, \dots, N \\ A_{kp} = \langle \varphi_k \varphi_p \rangle, \quad V_{kp} = \langle \nu \varphi_k \varphi_p \rangle, \quad \Delta_{kp} &= \langle \varphi_p \langle \Delta \varphi_k \rangle \rangle \end{aligned}$$

В цитированных выше работах рассматривались различные системы пробных функций φ_k . Ниже в качестве функций φ_k предлагается использовать приведенные к безразмерному виду полиномы $A_k(\rho)$, которые удовлетворяют условиям (2.4).

Построим простейшую гиперболическую модель продольной дисперсии, используя двухчленное представление Бубнова–Галеркина

$$c(\rho, \xi, \tau) = c_0(\xi, \tau) + a_1(\xi, \tau)\varphi_1(\rho)$$

где в соответствии с полученным выше результатом (1.13) в качестве функции φ_1 выбирается

$$\varphi_1(\rho) = -(\rho^4 - 2\rho^2 + 2/3)/16$$

Отсюда получаем систему двух уравнений для функций c_0 и a_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_0}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial c_0}{\partial \xi} - \frac{1}{192} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial a_1}{\partial \tau} - 15 \frac{\partial c_0}{\partial \xi} + \frac{5}{8} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} + 15a_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

На первый взгляд может показаться, что двухчленное приближение по Бубнову–Галеркину является слишком упрощенным описанием нестационарной дисперсии пассивной примеси. Однако в действительности оно содержит в себе не только тейлоровскую модель, характеризуемую коэффициентом эффективной диффузии, но и член следующего порядка асимптотической теории с точным значением коэффициента D_2 .

Это можно показать двумя способами.

Первый способ. Запишем второе уравнение системы (2.5) в виде

$$a_1 = \frac{\partial c_0}{\partial \xi} - \frac{1}{120} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - \frac{1}{15} \left(\frac{\partial a_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi} \right)$$

Вспомним, что в асимптотической теории коэффициент a_1 характеризует поправку к c_0 , т.е. является членом следующего приближения по отношению к c_0 , и, кроме того, масштаб по продольной координате считается большим, а соответствующая производная $\partial/\partial \xi$ – малой. Поэтому соотношение, записанное выше, можно проинтегрировать, подставляя в правую часть вместо величины a_1 ее главное значение $\partial c_0/\partial \xi$, и получить

$$a_1 \approx \frac{\partial c_0}{\partial \xi} - \frac{1}{120} \frac{\partial^2 c_0}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2880} \frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2}$$

Последний член в этом соотношении имеет более высокий, третий, порядок ($O(\partial^3 c_0 / \partial \xi^3)$) по сравнению с первыми двумя членами (первого и второго порядков малости), и его можно опустить. Подставляя полученное выражение для a_1 в первое уравнение системы (2.5), получим

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tau} + \langle v \rangle \frac{\partial c_0}{\partial \xi} = \frac{1}{192} \frac{\partial^2 c_0}{\partial \xi^2} - \frac{1}{23040} \frac{\partial^3 c_0}{\partial \xi^3}$$

Можно видеть, что это уравнение полностью согласуется с уравнением (1.14) для c_0 , если переписать последнее в безразмерной форме.

Второй способ. Второй способ, применяемый при анализе линейных систем, заключается в сравнении дисперсионных соотношений для тейлоровской и гиперболической моделей продольной дисперсии пассивной примеси.

Для упрощения дальнейших выкладок перейдем в систему отсчета, движущуюся со средней скоростью несущей жидкости $\langle v \rangle = 1/2$. Полагая $\tau' = \tau$, $\eta = \xi - \langle v \rangle \tau$, вместо (2.5) имеем

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tau'} = \frac{1}{192} \frac{\partial a_1}{\partial \eta} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial \tau'} + \frac{1}{8} \frac{\partial a_1}{\partial \eta} - 15 \frac{\partial c_0}{\partial \eta} + 15 a_1 = 0$$

Рассмотрим дисперсионное соотношение для системы уравнений (2.6), соответствующее ее решениям с пространственно-временной зависимостью вида $\exp(i\omega\tau' - ik\eta)$. Оно приводится к квадратному уравнению, корни которого

$$\omega_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{8} + 15i \right) \left\{ 1 \pm \left[1 + \frac{5}{16} k^2 \left(\frac{k}{8} + 15i \right)^{-1} \right]^{1/2} \right\}$$

Так как каждая степень $-ik$ появляется в результате дифференцирования решения по пространственной переменной (или ξ), то асимптотическому тейлоровскому разложению (1.9) соответствует разложение в степенные ряды по $-ik$. Эти разложения корней дисперсионного соотношения имеют вид

$$i\omega_{-}(k) = \frac{(-ik)^2}{192} - \frac{(ik)^3}{23040} + O(k^4)$$

$$i\omega_{+}(k) = -15 + \frac{ik}{8} - i\omega_{-}(k)$$

Корень $\omega_{-}(k)$ соответствует моде диффузионного типа и согласуется с уравнением (1.14) для c_0 с правильными значениями первых двух коэффициентов в правой части, тогда как корень $\omega_{+}(k)$ соответствует распространяющейся быстро затухающей моде. Таким образом, анализ дисперсионного соотношения также показывает, что двухчленное приближение, будучи представленным в виде разложения по градиентам (т.е. по степеням $-ik$), с точностью до членов третьего порядка совпадает с тейлоровским асимптотическим разложением.

Система (2.6) сводится к одному уравнению второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial \tau'^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 c_0}{\partial \tau' \partial \eta} - \frac{5}{64} \frac{\partial^2 c_0}{\partial \eta^2} + 15 \frac{\partial c_0}{\partial \tau'} = 0 \quad (2.7)$$

Для исключения перекрестной производной из уравнения (2.7) сделаем замену переменных, положив

$$\vartheta = \tau', \quad \zeta = \eta - \frac{\tau'}{16}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau'} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Затем приведем полученное уравнение к телеграфному уравнению посредством замены зависимой переменной

$$c_0(\vartheta, \zeta) = w(\vartheta, \zeta) \exp(\alpha \vartheta + \beta \zeta)$$

где α, β – параметры. Для функции w получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} - v_*^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + (2\alpha + 15) \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \left(-2\beta v_*^2 - \frac{15}{16} \right) \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \\ + \left(\alpha^2 - \beta^2 v_*^2 + 15\alpha - \frac{15}{16} \beta \right) w = 0 \end{aligned}$$

где $v_* = \sqrt{21/16}$ – фазовая скорость распространения фронтов возмущений вправо и влево от источника в системе отсчета, движущейся относительно исходной системы отсчета со скоростью

$$v_* = 9/16 \quad (2.8)$$

Параметры α и β выбираются так, чтобы коэффициенты при членах, содержащих w и $\partial w / \partial \zeta$, обращались в нуль, а коэффициент при $\partial w / \partial \vartheta$ был положительным (последнее условие служит для отбора нужного корня квадратного уравнения для параметра α и обеспечивает соответствие решения в асимптотической области решению, полученному в разд. 1):

$$\beta = -\frac{15}{32v_*^2}, \quad \alpha = -\frac{15}{2} + \frac{15}{2} \sqrt{1-\delta}, \quad \delta = \frac{1}{(16v_*)^2}$$

Теперь функция w удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v_*^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} - \mu^2 \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0, \quad \mu^2 = 15 \frac{\sqrt{1-\delta}}{v_*^2} \quad (2.9)$$

Решение задачи Коши для уравнения (2.9) при начальных данных

$$w = w_0(\zeta), \quad \partial w / \partial \vartheta = w_1(\zeta) \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (2.10)$$

записывается с помощью функции Грина [9] со сдвинутыми аргументами $G(\zeta - \zeta', \vartheta - \vartheta')$ в виде

$$\begin{aligned} w(\zeta, \vartheta) = \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} [w(\zeta', \vartheta') G(\zeta - \zeta', \vartheta - \vartheta')]_{\vartheta'=0} d\zeta' + \\ + \frac{1}{v_*^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G(\zeta - \zeta', \vartheta - \vartheta') \frac{\partial w(\zeta', \vartheta')}{\partial \vartheta'} - w(\zeta', \vartheta') \frac{\partial G(\zeta - \zeta', \vartheta - \vartheta')}{\partial \vartheta'} \right]_{\vartheta'=0} d\zeta' \end{aligned} \quad (2.11)$$

При построении функции Грина сначала заметим, что исходное уравнение (2.9) допускает регулярное частное решение вида

$$w_p(\zeta, \vartheta) = \exp\left(-\frac{1}{2} \mu^2 v_*^2 \vartheta\right) I_0\left(\frac{1}{2} \mu^2 v_* \sqrt{v_*^2 \vartheta^2 - \zeta^2}\right) \quad (2.12)$$

где $I_0(z)$ – решение модифицированного уравнения Бесселя нулевого порядка

$$I_0'' + z^{-1} I_0' - I_0 = 0$$

подчиняющееся начальным условиям

$$I_0(0) = 1, \quad I'_0(0) = 0$$

Теперь нетрудно показать, что

$$G(\zeta, \vartheta) = \frac{1}{2} \nu_* w_p(\zeta, \vartheta) H(\nu_* \vartheta - |\zeta|) \quad (2.13)$$

где $H(z)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда, равная нулю при отрицательных значениях аргумента и единице – при положительных.

Подставляя соотношения (2.10) и (2.13) в равенство (2.11), получаем явное выражение решения задачи Коши (2.9), (2.10) через частное решение (2.12) и начальные данные

$$\begin{aligned} w(\zeta, \vartheta) = & \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mu^2 \nu_*^2 \vartheta\right) [w_0(\zeta + \nu_* \vartheta) + w_0(\zeta - \nu_* \vartheta)] + \\ & + \frac{1}{2\nu_*} \int_{\zeta - \nu_* \vartheta}^{\zeta + \nu_* \vartheta} \left\{ \exp(-\mu^2 \nu_*^2 \vartheta) \frac{\partial w_p(\zeta - \zeta', -\vartheta)}{\partial \vartheta} w_0(\zeta') + \right. \\ & \left. + w_p(\zeta - \zeta', \vartheta) w_1(\zeta') \right\} d\zeta' \end{aligned} \quad (2.14)$$

Исследуя поведение членов, содержащихся в решении при $\mu \rightarrow 0$, найдем, что

$$w(\zeta, \vartheta) = \frac{1}{2} [w_0(\zeta + \nu_* \vartheta) + w_0(\zeta - \nu_* \vartheta)] + \frac{1}{2\nu_*} \int_{\zeta - \nu_* \vartheta}^{\zeta + \nu_* \vartheta} w_1(\zeta') d\zeta' + O(\mu^2)$$

Таким образом, при $\mu \rightarrow 0$ формула (2.14) переходит в решение Даламбера задачи Коши для одномерного волнового уравнения.

Теперь заметим, что наличие в функции Грина множителя в виде функции Хевисайда $H(\nu_* \vartheta - |\zeta|)$, равной нулю при $|\zeta| > \nu_* \vartheta$, свидетельствует о конечности скорости распространения возмущений и наличии скачков или фронтов возмущений при $\zeta = \pm \nu_* \vartheta$. Поведение функции Грина (2.13) вдали от фронтов, т.е. при $|\zeta|/(\nu_* \vartheta) \ll 1$, можно получить, полагая формально $\nu_* \rightarrow \infty$ и используя асимптотику функции Бесселя $I_0(z)$ при больших значениях аргумента

$$I_0(z) = (2\pi t)^{-1/2} e^z [1 + O(z^{-1})]$$

Следовательно,

$$G(\zeta, \vartheta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu^2\vartheta}} \exp\left(-\frac{\mu^2\zeta^2}{4\vartheta}\right) H(\vartheta) [1 + O(\nu_*^{-2})]$$

т.е. главный член асимптотики функции Грина при $\nu_* \rightarrow \infty$ совпадает с функцией Грина для уравнения диффузии.

Рассмотрим также асимптотику решения (2.14) при $\nu_* \rightarrow \infty$. Так как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\nu_*} \exp(-\mu^2 \nu_*^2 \vartheta) \frac{\partial w_p(\zeta - \zeta', -\vartheta)}{\partial \vartheta} = \\ & = \frac{\mu}{2\sqrt{\pi\vartheta}} \exp\left[-\frac{\mu^2(\zeta - \zeta')^2}{4\vartheta}\right] [1 + O(\nu_*^{-2})] \end{aligned}$$

то с точностью до членов $O(\nu_*^{-2})$ решение (2.14) можно представить в виде

$$w(\zeta, \vartheta) = \frac{\mu}{2\sqrt{\pi\vartheta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mu^2(\zeta - \zeta')^2}{4\vartheta}\right] w_0(\zeta') d\zeta'$$

который соответствует решению задачи Коши для уравнения диффузии

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \mu^2 \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0, \quad w(\zeta, 0) = w_0(\zeta)$$

Рассмотрим теперь формальную задачу об импульсном δ -образном источнике для уравнения (2.9), полагая

$$w_0(\zeta) = \delta(\zeta), \quad w_1(\zeta) = 0$$

Из общей формулы (2.14) решения задачи Коши при этих начальных данных получим

$$w(\zeta, \vartheta) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mu^2 \nu_*^2 \vartheta\right) [\delta(\zeta + \nu_* \vartheta) + \delta(\zeta - \nu_* \vartheta)] + \\ + \frac{1}{2\nu_*} \exp(-\mu^2 \nu_*^2 \vartheta) H(\nu_* \vartheta - |\zeta|) w_p(\zeta, -\vartheta) \quad (2.15)$$

Первый член в формуле (2.15) аналогичен решению Даламбера, которое в данном случае содержит еще экспоненциально затухающий множитель. Второй член, как нетрудно показать, используя приведенные выше асимптотические оценки, при $\nu_* \rightarrow \infty$ дает функцию источника для уравнения диффузии.

Функция источника (2.15) отлична от нуля в области $|\zeta| \leq \nu_* \vartheta$, т.е. импульсный источник, который начал действовать в момент времени $t = 0$, при $t > 0$ порождает возмущенную область конечного размера, границы которой распространяются вправо и влево со скоростями $\pm \nu_*$. Вспомним также, что координата ζ измеряется в системе отсчета, движущейся относительно исходной системы, связанной с трубой, со скоростью ν_r (2.8). Таким образом, в исходной системе отсчета фронты перемещаются в трубе со скоростями $\nu_r \pm \nu_*$, равными соответственно $\nu_1 = 0,8489$ и $\nu_2 = 0,2761$ (напомним, что это безразмерные скорости, измеряемые в единицах u_m – максимальной скорости в центре трубы).

Следует, однако, иметь в виду, что эти выводы получены на основании приближенной математической одномерной модели явления, которая в отличие от тейлоровской модели продольной дисперсии учитывает приближенно начальную стадию развития процесса. Ввиду приближенного характера полученной модели можно только полагать, что основные механизмы и особенности дисперсии пассивной примеси – взаимодействие между поперечной диффузией и конвекцией в неоднородном поле скорости и конечность скорости распространения возмущений – будут адекватно описываться системой уравнений (2.5) или уравнением (2.7), тогда как другими эффектами, например влиянием молекулярной диффузии в продольном направлении, можно пренебречь.

Запишем теперь полученные уравнения гиперболической одномерной модели дисперсии в размерной форме. Для этого введем размерную величину потока концентрации в системе, движущейся со средней скоростью жидкости $\langle u \rangle$,

$$j = \langle (u - \langle u \rangle) c \rangle \quad (2.16)$$

В рассматриваемом приближении

$$j = a_1 u_m \langle \nu \phi_1 \rangle = -a_1 u_m / 192 \quad (2.17)$$

Возвращаясь в уравнениях (2.5) к размерным переменным и выражая a_1 через j , согласно (2.17), имеем

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{u_m}{2} \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{5}{8} u_m \frac{\partial j}{\partial x} + \frac{5}{64} u_m^2 \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{15D}{a^2} j = 0 \quad (2.18)$$

Исключая из системы (2.18) переменную j , приходим к гиперболическому уравнению для c_0

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial t^2} + \frac{9}{8} u_m \frac{\partial^2 c_0}{\partial t \partial x} + \frac{15}{64} u_m^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} + \frac{15D}{a^2} \left(\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{u_m}{2} \frac{\partial c_0}{\partial x} \right) = 0$$

В заключение отметим, что изложенная теория может быть распространена на другие случаи продольной дисперсии [26], отличающиеся от рассматриваемого здесь простого случая геометрией (некруговые поперечные сечения, течения в кольцевых зазорах, пространственные течения с преобладающей продольной конвекцией и др.), состоянием движущейся среды (турбулентный режим течения, течения неньютоновских жидкостей) или влиянием физико-химических превращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G.* Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1953. V. 219. № 1137. P. 186–203.
2. *Taylor G.* The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1954. V. 223. № 1155. P. 446–468.
3. *Fischer H.B.* Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1973. V. 5. P. 59–73.
4. *Elder J.W.* The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 5. Pt 4. P. 544–560.
5. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
6. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. = *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
7. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Л.: Гостехиздат, 1946. 119 с.
8. *Хонькин А.Д.* Анализ сходимости асимптотических решений кинетической теории с помощью модельного кинетического уравнения, имеющего точное решение // *Теорет. и мат. физика.* 1991. Т. 86. № 1. С. 130–135.
9. *Morse Ph.M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics. Pt. 1. N. Y.; Toronto; London: McGraw-Hill Book company, 1953. = *Морс Ф.М. Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
10. *Joseph D.D., Preziosi L.* Heat waves // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61. № 1. P. 41–73.
11. *Joseph D.D., Preziosi L.* Addendum to the paper Heat waves // *Rev. Mod. Phys.* 1990. V. 62. № 2. P. 375–391.
12. *Хонькин А.Д.* О парадоксе бесконечной скорости распространения возмущений в гидродинамике вязкой теплопроводной среды и уравнениях гидродинамики быстрых процессов // *Аэродинамика.* М.: Наука, 1976. С. 289–299.
13. *Хонькин А.Д.* Об уравнениях гидродинамики быстрых процессов // *Докл. АН СССР.* 1973. Т. 210. № 5. С. 1033–1035.
14. *Хонькин А.Д.* Асимптотические методы в теории уравнения Больцмана и уравнения гидродинамики // *Тр. ЦАГИ.* 1977. Вып. 1894. С. 3–27.
15. *Балабанян Г.О., Хонькин А.Д.* Построение обобщенных нормальных решений кинетических уравнений смесей газов // *Теорет. и мат. физика.* 1974. Т. 18. № 1. С. 130–137.
16. *Хонькин А.Д.* Уравнения гидродинамики смеси газов с конечными скоростями распространения возмущений // *Моделирование в механике.* 1988. Т. 2 (19). № 5. С. 142–147.
17. *Khonkin A.D., Orlov A.V.* Derivation of the modified diffusion equations in a gas mixture // *Phys. Rev.* 1994. Ser. E. V. 49. № 1. P. 906–909.
18. *Зубарев Д.Н., Хонькин А.Д.* Метод построения нормальных решений кинетических уравнений с помощью граничных условий // *Теорет. и мат. физика.* 1972. Т. 11. № 3. С. 403–412.

19. Хонькин А.Д. Проекционно-асимптотические методы решения уравнения Больцмана // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. Т. 8. № 6. С. 132–141.
20. Дильман В.В., Кронберг А.Е. Релаксационные явления при продольном перемешивании // Теорет. основы хим. технологии. 1983. Т. 17. № 5. С. 614–629.
21. Дильман В.В., Кронберг А.Е. Соотношение временных масштабов процесса и моделирование химических реакторов // Хим. пром-сть. 1983. № 8. С. 16–21.
22. Дильман В.В. Оценка продольной дисперсии примеси вещества при турбулентном движении жидкости // Хим. пром-сть. 1989. № 8. С. 33–37.
23. Вестертерп К.Р., Дильман В.В., Кронберг А.Е., Беннекер А. Волновая модель продольного перемешивания // Теорет. основы хим. технологии. 1995. Т. 29. № 6. С. 580–587.
24. Westerterp K.R., Dil'man V.V., Kronberg A.E. Wave model for longitudinal dispersion: Development of model // AIChE J. 1995. V. 41. № 9. P. 2013–2028.
25. Westerterp K.R., Dil'man V.V., Kronberg A.E., Benneker A.H. Wave model for longitudinal dispersion: Analysis and applications // AIChE J. 1995. V. 41. № 9. P. 2029–2039.
26. Дильман В.В., Полянин А.Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. М.: Химия, 1988. 303 с.

Жуковский

Поступила в редакцию
12.VIII.1999