

УДК 532.591

© 2000 г. И.С. Жукова, А.И. Саичев

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СГУСТКОВ ПЛАВУЧИХ ЧАСТИЦ НА ПОВЕРХНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Исследуется эволюция сгустка плавучей пассивной примеси на поверхности турбулентного потока жидкости в одномерном приближении. Установлен эффект локализации сгустка, состоящий в том, что частицы с течением времени образуют скопления повышенной концентрации. Исследуется эволюция во времени случайной ширины сгустка. Обсуждается физический механизм явления локализации.

В реальных условиях диффузия плавучей примеси на поверхности жидкости, например на поверхности океана, сопровождается хаотическим движением частиц примеси вместе с жидкостью. Пренебрегая влиянием вертикальных движений жидкости на плавучую примесь, будем считать, что частицы примеси полностью увлекаются случайным двумерным полем скорости $v(x, t)$ – проекции вектора скорости жидкости на ее плоскую свободную поверхность [1]. Здесь x – координаты точек свободной поверхности. При этом поверхностная концентрация примеси $\rho(x, t)$ описывается уравнением конвективной диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v(x, t) \cdot \nabla) \rho + \rho u(x, t) = \mu \Delta \rho$$

Здесь введено скалярное поле $u(x, t) = (\nabla \cdot v(x, t))$ – дивергенция двумерного поля скорости жидкости $v(x, t)$ на свободной поверхности, μ – коэффициент молекулярной диффузии.

Подчеркнем, что на поверхности даже несжимаемой жидкости дивергенция вектора горизонтальных компонент скорости жидкости, вообще говоря (при отличной от нуля скорости изменения вертикальной компоненты скорости, направленной по нормали к поверхности), не равна нулю. Физически это означает, что поверхность хаотически движущейся несжимаемой жидкости ведет себя как двумерная сжимаемая среда. При этом возникает неожиданный, на первый взгляд, эффект локализации сгустков плавучей примеси, родственный известному эффекту локализации волн в случайных слоистых средах (см., например, [2]). Некоторые количественные и качественные аспекты локализации плавучей примеси обсуждались ранее [1, 3, 4]. Родственные эффекты возникновения квазирегулярной крупномасштабной структуры распределения вещества во Вселенной широко обсуждались в астрофизической литературе (см., например, [5–8]).

По мнению авторов, упомянутый эффект локализации примеси в хаотически движущихся средах имеет универсальный характер и присущ случайным потокам сжимаемых сред разной физической природы. Ниже приводится количественное описание эффекта локализации в простейшем случае одномерной среды, моделирующей эволюцию концентрации плавучей примеси на поверхности жидкости в узком канале. Полученные результаты могут оказаться полезными для выявления и анализа эффектов локализации в пространствах большей размерности.

1. Асимптотика поля концентрации плавучей примеси в одномерной среде. Обсудим поведение сгустка плавучих частиц на поверхности турбулентного потока жидкости в канале. Рассмотрим идеализированный случай, когда движение жидкости поперек канала и поперечная диффузия частиц примеси отсутствуют. Соответственно будем полагать поле горизонтальной скорости движения жидкости вдоль канала $u(x, t)$

и концентрации частиц плавучей примеси $\rho(x, t)$ функциями времени и лишь одной – продольной – координаты x . Концентрация сгустка $\rho(x, t)$ подчиняется при этом одномерному уравнению конвективной диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\nu(x, t)\rho) = \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \rho(x, t=0) = \rho_0(x) \quad (1.1)$$

Для описания случайного поля $u(x, t)$ используем известную крейчнановскую аппроксимацию [9, 10] поля скорости гауссовым дельта-коррелированным во времени статистически однородным полем со структурной функцией

$$\langle [\nu(x, t) - \nu(x+s, t+\tau)]^2 \rangle = d(s)\delta(\tau), \quad d(s) = Bs^2 + \dots \quad (1.2)$$

Сконструируем вначале приближенное решение уравнения (1.1), для чего запишем решение в форме

$$\rho(x, t) = \overline{\tilde{\rho}(x, t)} \quad (1.3)$$

где $\tilde{\rho}(x, t)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\nu(x, t)\tilde{\rho}) = \xi(t) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \quad (1.4)$$

Здесь $\xi(t)$ – гауссов белый шум с корреляционной функцией $\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = 2\mu\delta(\tau)$, а черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций $\xi(t)$.

Как известно, решение уравнения (1.4) представимо в виде

$$\tilde{\rho}(x, t) = \int \rho_0(y) \delta(\tilde{X}(y, t) - x) dy \quad (1.5)$$

где $\tilde{X}(y, t)$ – траектория частицы при учете молекулярной диффузии, удовлетворяющая стохастическому уравнению

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \nu(\tilde{X}, t) + \xi(t) \quad (1.6)$$

Представим функцию $\tilde{X}(y, t)$ в виде суммы двух слагаемых

$$\tilde{X}(y, t) = X(y, t) + z(y, t) \quad (1.7)$$

Здесь $X(y, t)$ описывает конвективный перенос плавучих частиц (при $\mu = 0$), а $z(y, t)$ учитывает отклонение частицы от $X(y, t)$ за счет молекулярной диффузии и подчиняется уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \nu(X+z, t) - \nu(X, t) + \xi(t), \quad z(y, t=0) = 0 \quad (1.8)$$

Пусть l_ν – характерный масштаб пространственного изменения случайного поля скорости $u(x, t)$. Будем полагать, что выполнено неравенство

$$z \ll l_\nu \quad (1.9)$$

которое позволяет в дальнейшем, при статистическом описании поля скорости, удерживать лишь первый ненулевой член разложения структурной функции (1.2). Если это так, то уравнение для $z(y, t)$ можно заменить более простым линейным уравнением

$$\frac{dz}{dt} = u(X, t)z + \xi(t), \quad z(y, t=0) = 0, \quad u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \nu(x, t) \quad (1.10)$$

В указанном линейном приближении и при заданном наперед поле скорости $u(x, t)$

процесс $z(y, t)$ – гауссов с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2(y, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2u(X, t)\sigma^2 + 2\mu, \quad \sigma^2(y, t=0) = 0 \quad (1.11)$$

Подставив выражение (1.7) в соотношение (1.5) и усреднив полученное выражение по гауссовой статистике процесса $z(y, t)$, придем к асимптотической формуле для поля концентрации плавучей примеси при учете конвективного переноса частиц и молекулярной диффузии

$$\rho(x, t) = \int \rho_0(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(y, t)} \exp\left[-\frac{(x - X(y, t))^2}{2\sigma^2(y, t)}\right] dy \quad (1.12)$$

2. Эволюция эффективной ширины сгустка плавучих частиц. Пусть при $t = 0$ частицы плавучей примеси располагались в точке $x = 0$. Тогда их начальная концентрация равна $\rho_0(x) = \delta(x)$, а поле концентрации (1.12) имеет вид

$$\rho(x, t) = R(x - X(t), t), \quad R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t)}\right) \quad (2.1)$$

Здесь $X(t) = X(0, t)$ – положение центра сгустка в текущий момент времени t , $R(x, t)$ – концентрация сгустка в системе отсчета, движущейся вместе со сгустком, а $\sigma(t) = \sigma(0, t)$ – эффективная ширина сгустка (ЭШС) к моменту времени t .

Изучим поведение случайной ЭШС $\sigma(t)$ с течением времени. Из стохастического уравнения (1.11) а также из соотношения (1.2) вытекает, что $\sigma(t)$ представляет собой марковский процесс, вероятностное распределение которого

$$f(\sigma; t) = \langle \delta(\sigma(t) - \sigma) \rangle$$

удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка [3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = B \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\sigma^2 f), \quad f(\sigma, t=0) = \delta(\sigma) \quad (2.2)$$

Статистическая и динамическая интерпретация следствий этого уравнения позволяет понять влияние конкурентного действия молекулярной диффузии и хаотического движения поверхности жидкости на поведение сгустка плавучих частиц. Из уравнения (2.2) следует, в частности, что средний квадрат ЭШС удовлетворяет уравнению

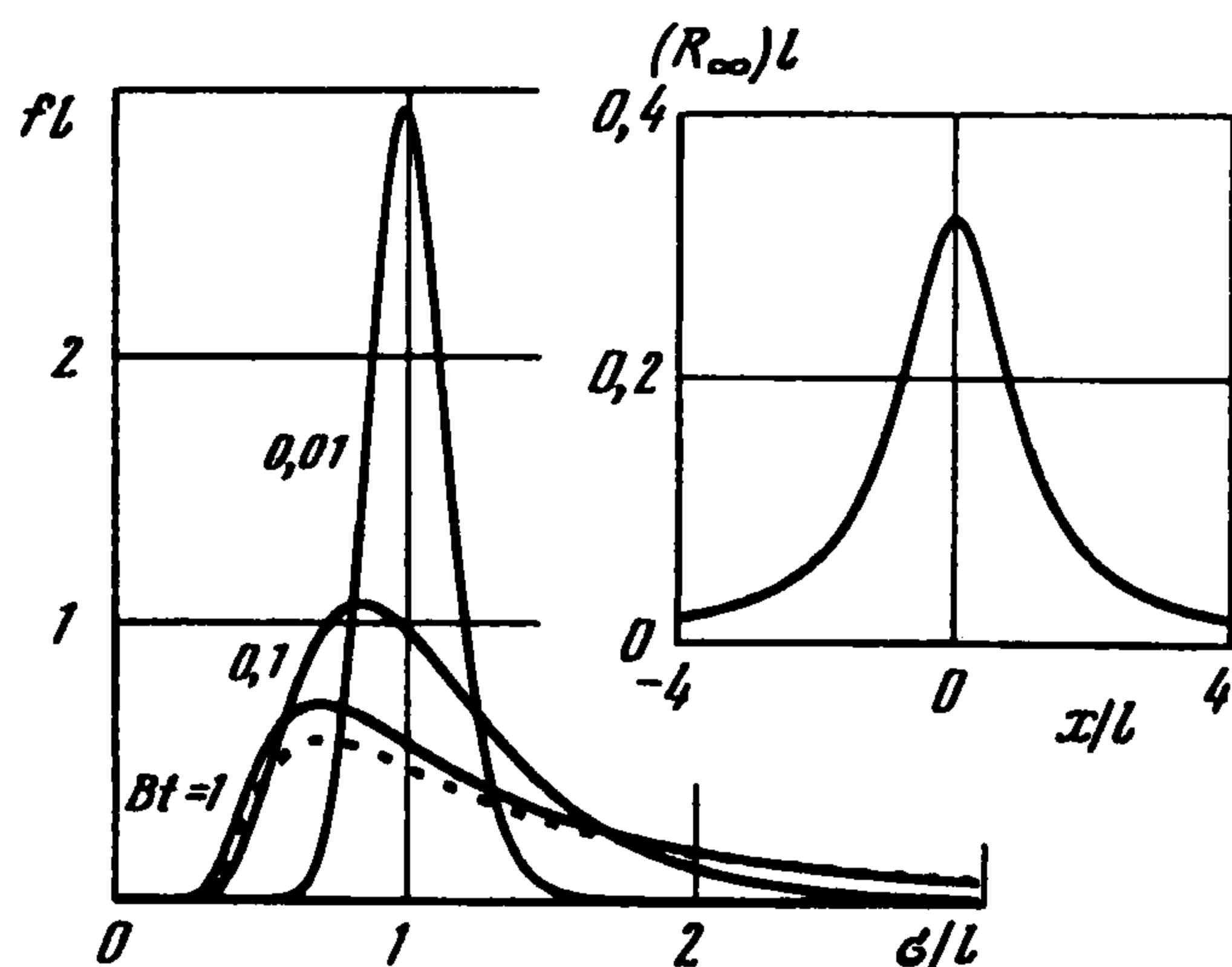
$$\frac{d\langle \sigma^2 \rangle}{dt} = 2\mu + B\langle \sigma^2 \rangle, \quad \langle \sigma^2(t=0) \rangle = 0$$

решение которого

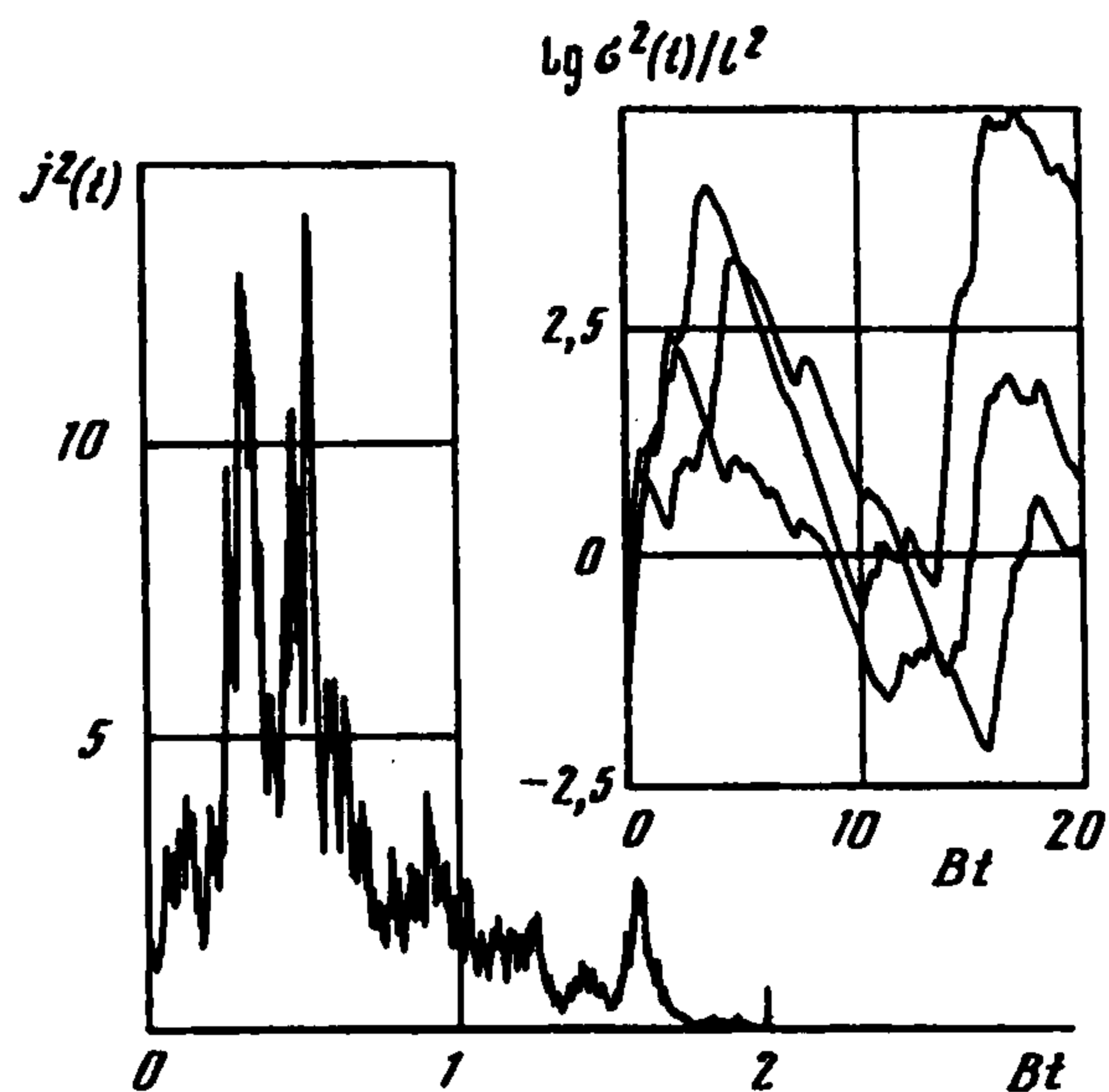
$$\langle \sigma^2(t=0) \rangle = \int x^2 \langle R(x, t) \rangle dx = \frac{2\mu}{B} [\exp(Bt) - 1] \quad (2.3)$$

имеет наглядную физическую интерпретацию: на малых временах, пока $Bt \ll 1$, влияние молекулярной диффузии на ЭШС преобладает, а квадрат ЭШС растет по классическому линейному закону $\langle \sigma^2(t) \rangle = 2\mu t$. Позднее начинают сказываться сжатия и растяжения, обусловленные хаотическими движениями поверхности турбулентного потока жидкости, за счет чего $\langle \sigma^2(t) \rangle$ начинает расти быстрее, а на временах $Bt \gg 1$ линейный закон роста сменяется экспоненциальным.

В дальнейшем, когда величина $\langle \sigma^2(t) \rangle$ становится сравнимой с квадратом характерного масштаба l_v скорости турбулентного движения жидкости $u(x, t)$, движение частиц можно считать практически взаимно независимым, формула (2.3) становится



Фиг. 1



Фиг. 2

неприменимой, а ЭШС вновь растет по линейному закону [11] $\langle \sigma^2(t) \rangle = 2(D + \mu)t$, где D – коэффициент турбулентной диффузии.

Заметим еще, что безразмерным параметром, малость которого обеспечивает справедливость асимптотического решения (2.1) и всех последующих выкладок, служит отношение

$$\varepsilon = 2\mu / (Bl_v^2)$$

коэффициента в правой части равенства (2.3) к квадрату характерного масштаба турбулентности.

Обратим внимание на то, что выводы о поведении сгустка, основанные на анализе среднего квадрата ЭШС (2.3) и других его моментных функций, могут не отражать истинное поведение сгустка с течением времени (см., например, [1]). Более аккуратный анализ должен основываться на обсуждении вероятностных свойств ЭШС.

Убедимся в сказанном, исследуя некоторые вероятностные следствия уравнения (2.2). На фиг. 1 представлены результаты численного решения этого уравнения с начальным условием $f(\sigma/l; t=0) = \delta(\sigma/l - 1)$, где $l = \sqrt{\mu/B}$ – параметр, имеющий размерность длины. Видно, что решение стремится к стационарному распределению (штриховая линия на фиг. 1), описывающему статистику ЭШС на больших временах. Это стационарное распределение можно найти аналитически:

$$f_{\infty}(\sigma) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\sigma; t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{l}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

Наличие стационарного распределения (2.4) означает, что турбулентное движение среды преимущественно ослабляет молекулярную диффузию и ведет к локализации сгустка. В самом деле, усреднив концентрацию сгустка (2.1) с помощью вероятностного распределения (2.4), найдем что средний профиль концентрации довольно хорошо локализован на оси x (см. также правую часть фиг. 1)

$$\langle R_{\infty}(x) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle R(x, t) \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{l}{x^2 + l^2} \quad (2.5)$$

Подчеркнем, однако, что это выражение не противоречит стремлению среднего квадрата ЭШС (2.3) к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, поскольку определяющий его интеграл (первое равенство (2.3)) расходится.

Локализация сгустка приводит также к тому, что максимальное значение концентрации

$$\rho = R(x=0, t) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma(t))$$

не стремится с течением времени монотонно к нулю, как в случае броуновских плавучих частиц на поверхности покоящейся жидкости, а имеет стационарное распределение

$$W(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}r} \exp\left(-\frac{\rho^2}{r^2}\right), \quad r = \frac{1}{l\sqrt{\pi}}$$

3. Физический механизм эффекта локализации сгустка. Детальнее раскроем механизм локализации сгустков плавучих частиц на поверхности хаотически движущейся среды. Для этого заметим, что величина $z(x) = z(0, t)$ имеет ясный физический смысл. Это случайное отклонение некоторой частицы сгустка от его центра, тесно связанное с функцией расходимости (якобиана перехода от лагранжевых y - к эйлеровым x -координатам)

$$J(t) = \partial X / \partial y$$

удовлетворяющей в рассматриваемом одномерном случае уравнению

$$dJ/dt = u(X, t)J \quad (3.1)$$

В самом деле, решение стохастического уравнения (3.1)

$$z(t) = \int_0^t \xi(t') J(t, t') dt' \quad (3.2)$$

где $J(t, t')$ – решение уравнения (3.1) с начальным условием $J(t = t') = 1$, имеет наглядную геометрическую интерпретацию: выражение (3.2) представляет собой сумму порождающих броуновское движение "микроскопических толчков" $\xi(t')$, умноженных на степень сжатия (при $J < 1$) или разрежения ($J > 1$) сгустка частиц. В случае покоящейся жидкости $J \equiv 1$, а интеграл (3.2) описывает классическое броуновское движение. В общем же случае движение жидкости, приводящее к случайным сжатиям и разрежениям сгустка, может качественно изменить процесс диффузии частиц сгустка. Аналогичное утверждение справедливо и относительно $\sigma^2(t)$ – дисперсии отклонения частиц сгустка от его центра. Согласно соотношениям (1.11), (3.1), она равна

$$\sigma^2(t) = 2\mu \int_0^t J^2(t, t') dt' \quad (3.3)$$

и также определяется поведением функции $J(t, t')$.

Обсудим подробнее ее свойства. В рассматриваемом дельта-коррелированном приближении поля скорости $u(x, t)$ функция $J(t, t')$ представляет собой марковский процесс, вероятностное распределение которого

$$f(j; t, t') = \langle \delta(J(t, t') - j) \rangle$$

удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка [1, 3, 4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B \frac{\partial^2}{\partial j^2} (j^2 f), \quad f(j; t = t', t') = \delta(j - 1) \quad (3.4)$$

Изучим поведение реализаций $J(t, t')$, для чего используем предложенный ранее [3] прием, а именно отождествим $J(t, t')$ со статистически эквивалентным процессом, удовлетворяющим модельному стохастическому уравнению

$$\frac{dJ}{dt} + BJ = \eta(t)J, \quad J(t = t', t') = 1 \quad (3.5)$$

где $\eta(t)$ – белый шум с корреляционной функцией $\langle \eta(t)\eta(t + \tau) \rangle = 2B\delta(\tau)$. Основанием замены $J(t, t')$ статистически эквивалентным процессом служит тот факт, что вероят-

ностное распределение решения стохастического уравнения (3.5) удовлетворяет уравнению (3.4). Естественно ожидать при этом, что свойства реализаций процесса $J(t, t')$ и статистически эквивалентного ему процесса одинаковы.

Обратим внимание на последнее слагаемое в левой части уравнения (3.5), поскольку именно оно ответственно за эффект локализации сгустков плавучей примеси. Это слагаемое учитывает тот факт, что при гауссовом поле $u(x, t)$ со структурной функцией (1.2) среднее от дивергенции поля скорости в центре сгустка, при $x = X(t)$, отрицательно [3, 4]: $\langle u(X(t), t) \rangle = -B$. Данное равенство означает, что случайные горизонтальные движения поверхности жидкости чаще сжимают сгусток, чем расширяют его, что и ведет в конечном итоге к эффекту локализации.

Решение уравнения (3.5) имеет вид

$$J(t, t') = \exp(-\theta + \omega(t, t')), \quad \omega(t, t') = \int_{t'}^t \eta(\tau) d\tau, \quad \theta = B(t - t') \quad (3.6)$$

где $\omega(t, t')$ – винеровский процесс с дисперсией, равной 2θ .

Реализации процесса $J(t, t')$ (3.6) обладают внешне противоречивыми статистическими свойствами. Его моменты

$$\langle J^n(t, t') \rangle = \exp(n(n-1)\theta) \quad (3.7)$$

при $n > 1$ экспоненциально растут с течением времени. С другой стороны, логарифмически нормальное вероятностное распределение процесса $J(t, t')$

$$f(j; t, t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{\ln^2(je^\theta)}{4\theta}\right)$$

имеет медиану $j_{\max} = \exp(-\theta)$, экспоненциально стремящуюся к нулю. Последнее означает, что случайная величина $J(t, t')$ с течением времени со все большей вероятностью принимает значения, близкие к $j = 0$ (такое сочетание противоречивых статистических свойств характерно для перемежающихся процессов [12, 13]).

Экспоненциальный рост моментов (3.7) обусловлен наличием высоких пиков в некоторых реализациях $J(t, t')$. С другой стороны, большая часть реализаций $J(t, t')$ стремится со временем к нулю. Этот вывод подтверждается наличием экспоненциально спадающих к нулю мажорантных кривых [1–3, 12]

$$M(t) = A \exp(-rBt), \quad A > 1, \quad 0 < r < 1 \quad (3.8)$$

ниже которых лежат реализации процесса $J(t, t')$. Именно последнее свойство реализаций $J(t, t')$ обеспечивает существование стационарного распределения (2.4) случайной ЭШС и возникновение эффекта локализации сгустка за счет конкуренции молекулярной диффузии и конвективного хаотического движения частиц плавучей примеси.

На фиг. 2 изображен характерный график реализации процесса $J^2(t) = J^2(t, t' = 0)$, иллюстрирующий поведение подынтегральной функции в выражении (3.3), определяющем эволюцию случайной ЭШС. Видно, что с течением времени $J^2(t)$ спадает к нулю, приводя к асимптотической стационарности ЭШС, что демонстрируют приведенные в правой части фиг. 2 графики зависимости от времени трех реализаций ЭШС (логарифмический масштаб по вертикальной координате выбран из-за большого разброса величин $\sigma(t)$ в различных реализациях).

Авторы благодарят В.И. Кляцкина за замечания и советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-02-16521), фонда "Университеты России – фундамен-

тальные исследования" (38-78), Международного фонда – Центра перспективных исследований в Нижнем Новгороде (99-2-09), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-11134), Королевской академии наук Швеции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В.И., Саичев А.И. К статистической теории диффузии плавучей примеси в случайном поле скоростей // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 4. С. 1297–1313.
2. Кляцкин В.И., Саичев А.И. Статистическая и динамическая локализация плоских волн в хаотически слоистых средах // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. № 3. С. 161–194.
3. Saichev A.I., Woyczynski W.A. Probability distribution of passive tracers in randomly moving media / Stochastic Models in Geosystems (The IMA Volumes in mathematics and its applications) N.Y.: Springer, 1996. V. 85. P. 359–399.
4. Saichev A.I., Zhukova I.S. The arising and evolution of the passive tracer clusters in compressible random media / Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1998. V. 511. P. 353–371.
5. Shandarin S.F., Zeldovich Ya.B. The large-scale structure of the Universe. Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium // Rev. Modern Phys. 1989. V. 61. № 2. P. 185–220.
6. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 214 с.
7. Weinberg D.H., Gunn J.E. Large scale structure and the adhesion approximation // Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1990. V. 247. № 2. P. 260–286.
8. Shandarin S.F., Sathyaprakash B.S. Modeling gravitational clusters without computing gravitation force // Astrophys. J. 1996. V. 467. № 1. Pt 2. P. L25–L28.
9. Kraichnan R.H. Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 5. P. 945–953.
10. Kraichnan R.H. Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. № 7. P. 1016–1019.
11. Теодорович Э.В. Турбулентная диффузия пассивной примеси // ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 275–282.
12. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. 1987. Т. 152. № 1. С. 3–32.
13. Frisch U. Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Univ. Press, 1996. 296 p.

Нижний Новгород
e-mail: saichev @rf.unn.runnet.ru

Поступила в редакцию
8.IV.1999