

УДК 532.51+532.72

© 2000 г. В.А. Городцов

### ЭФФЕКТ ЛОКАЛЬНОГО РОСТА КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ В ОДНОМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Система нелинейных уравнений одномерной конвективной диффузии пассивной примеси при течении жидкости, описываемом модельным уравнением Бюргерса, решается с применением преобразований Коула–Хопфа и Дарбу. При равных кинетических коэффициентах жидкости ее решение приводится к решению линейных уравнений теплопроводности. При целых числах Прандтля, отличных от единицы, такое приведение удастся для течений типа равномерно движущихся ударных волн, сглаженных влиянием вязкости. Его возможность тесно связана с факторизуемостью дифференциальных операторов второго порядка в этом случае (разложимостью их на произведение операторов первого порядка) и дополнительной внутренней симметрией (суперсимметрией) задачи. Взаимодействие ударных волн и переносимых ими примесных солитонов носит абсолютно неупругий характер. Результатом слияния примесных солитонов является локальное повышение концентрации примеси. Отмечено, что при некоторых уравнениях состояния сведение решений нелинейных уравнений конвективной диффузии к решению линейных уравнений теплопроводности возможно и для активной примеси (при равенстве кинетических коэффициентов жидкости).

**1. Конвекция пассивной примеси при единичном числе Прандтля.** В работах Ковалевской, посвященных решению задачи о движении твердого тела в поле силы тяжести, закрепленного в одной точке [1, 2], впервые была результативно использована связь интегрируемости нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с аналитическими свойствами их решений. Затем такая связь была применена Пенлеве с учениками для классификации и исчерпывающего анализа решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [3, 4]. В методе Ковалевской–Пенлеве интегрируемость ОДУ увязывается с возможностью представления решения в виде рядов Лорана с конечной главной, полюсной частью

$$(t-t_0)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (t-t_0)^m$$

при достаточном числе произвольных параметров разложения (последнее определяется порядком уравнения).

Метод Ковалевской–Пенлеве непосредственно обобщается для анализа нелинейных уравнений в частных производных [5]. Для этого следует заменить разность  $t - t_0$  в случае, например, двух независимых переменных на функцию  $\varepsilon(x, t)$  и воспользоваться разложением лорановского типа в окрестности сингулярного многообразия  $\varepsilon(x, t) = 0$ ,  $\partial_t \varepsilon \neq 0$ ,  $\partial_x \varepsilon \neq 0$ , считая коэффициенты разложения также функциями  $x, t$ ,

$$u(x, t) = \sum_n u_n \varepsilon^{n-\alpha}, \quad u_n = u_n(x, t), \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t), \quad u_n|_{n < 0} = 0$$



Если после подстановки такого разложения решения в уравнения показатель  $\alpha$  оказывается целым числом (полюсная сингулярность) и рекуррентное соотношение для коэффициентных функций содержит достаточное число произвольных функций  $u_n(x, t)$ ,  $\varepsilon(x, t)$ , соответствующее порядку уравнения, то можно говорить о выполнении испытания Ковалевской–Пенлеве в форме Вейса–Тейбора–Карневейла для рассматриваемого уравнения. Это оказывается достаточным признаком его интегрируемости [5].

В случае модельного уравнения одномерной гидродинамики, не содержащего давления, именуемого обычно уравнением Бюргерса [6, 7],

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0, \quad u = u(x, t) \quad (1.1)$$

испытание Ковалевской–Пенлеве оказывается выполнимым [5] и решение уравнения представляется следующим рядом Лорана:

$$u = -2\nu \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \varepsilon^n, \quad u_n = u_n(x, t), \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t) \quad (1.2)$$

При этом две функции из указанных  $\varepsilon(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  можно выбирать произвольно (такой произвол соответствует произволу общего решения уравнения второго порядка), а коэффициентная функция  $u_1(x, t)$  удовлетворяет исходному уравнению Бюргерса. При отбрасывании регулярной части разложения в конечном итоге устанавливается вид известной замены Коула–Хопфа [8, 9], с помощью которой решение нелинейного уравнения приводится к решению линейного уравнения теплопроводности.

Описание одномерной конвекции пассивной примеси требует совместного анализа нелинейного уравнения движения (1.1) с уравнениями типа

$$\partial_t c + \partial_x (uc) - \chi \partial_x^2 c = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial_t k + u \partial_x k - \chi \partial_x^2 k = 0 \quad (1.4)$$

причем уравнение (1.3) простым дифференцированием получается из последнего,  $c = \partial_x k$ . Система уравнений (1.1), (1.4) также допускает испытание Ковалевской–Пенлеве с лорановским разложением (1.2) для скорости и аналогичным разложением для концентрации только в частном случае единичного числа Прандтля  $\sigma \equiv \nu/\chi = 1$  [10]. При этом устанавливается вид обобщенной замены Коула–Хопфа

$$u = -2\nu \partial_x \ln \varepsilon, \quad k = \varphi / \varepsilon$$

с помощью которой система зацепленных нелинейных уравнений в случае равных кинетических коэффициентов приводится к отдельным линейным уравнениям теплопроводности

$$\partial_t \varepsilon = \nu \partial_x^2 \varepsilon, \quad \partial_t \varphi = \nu \partial_x^2 \varphi \quad (1.5)$$

Уже простейшие их решения соответствуют физически содержательным решениям исходных нелинейных уравнений. Например, экспоненциальное в сумме с единичным постоянным решением для  $\varepsilon$

$$\varepsilon = 1 + \exp(-\theta), \quad \theta \equiv \frac{u_0}{\nu} (x - x_0 - u_0 t) \quad (1.6)$$

соответствует одиночной равномерно движущейся ударной волне в виде ступенчатого перепада скоростей с плавной переходной областью шириной  $\sim \nu/u_0$

$$u = \frac{2u_0}{1 + \exp \theta} = u_0 \left( 1 - \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.7)$$



Взаимодействие нескольких ударных волн описывается суммой экспонент для  $\epsilon$  [11, 12]

$$\epsilon = 1 + \sum_i \exp[-(\theta_i - \theta_{0i})], \quad \theta_i \equiv \frac{u_i}{2v} \left( x - \frac{u_i}{2} t \right)$$

В частности, подобная сумма с двумя экспонентами ( $u_2 > u_1 > 0$ )

$$\epsilon = 1 + \exp(-\theta_1) + \exp(-\theta_2 + \theta_0), \quad u = \frac{u_1 \exp(-\theta_1) + u_2 \exp(-\theta_2 + \theta_0)}{1 + \exp(-\theta_1) + \exp(-\theta_2 + \theta_0)}$$

описывает слияние пары ударных волн, из которых обладающая большей скоростью  $(u_2 + u_1)/2$  нагоняет другую, имеющую скорость  $u_1/2$ , в момент времени  $2x_0/(u_2 - u_1)$ , и вновь сформированная в результате взаимодействия волна движется дальше со скоростью  $u_2/2$ .

Конвекция первоначально локализованной пассивной примеси в поле равномерно движущейся ударной волны, описываемая уравнением (1.3), является нестационарной, но асимптотически распределение примеси принимает упрощенный вид стационарно распространяющегося вместе с ударной волной солитоноподобного распределения [10]

$$c(x, t) \sim \text{sech}^2 \frac{u_0}{2v} (x - u_0 t)$$

По форме такие распределения вполне соответствуют солитонам уравнения Кортевега–де Вриза. Однако в отличие от этих известных солитонов обсуждаемые "солитоны пассивной примеси" взаимодействуют между собой абсолютно неупруго в соответствии с неупругим характером взаимодействия переносящих их ударных волн. В итоге происходит концентрирование примеси в одном суммарном солитоне.

**2. Анализ алгебраической структуры и решений уравнений конвекции пассивной примеси.** В случае произвольных чисел Прандтля обсуждаемую систему нелинейных уравнений с помощью аналогичной обобщенной замены Коула–Хопфа вида

$$u = -2v \frac{\partial_x \epsilon}{\epsilon}, \quad c = \frac{\psi}{\epsilon^\sigma}, \quad k = \frac{\phi}{\epsilon^\sigma} \quad (2.1)$$

$$\psi = \hat{D}\phi, \quad \hat{D} \dots \equiv \left( \partial_x + \sigma \frac{u}{2v} \right) \dots = \epsilon^\sigma \partial_x \epsilon^{-\sigma} \dots \quad (2.2)$$

можно привести к трем линейным дифференциальным уравнениям второго порядка

$$(\partial_t - v \partial_x^2) \epsilon, \quad \hat{B}_+ \psi = 0, \quad \hat{B}_- \phi = 0 \quad (2.3)$$

$$\hat{B}_\pm \equiv \partial_t - \frac{v}{\sigma} \partial_x^2 + \frac{\sigma \pm 1}{2} u_x \quad (2.4)$$

Однако два последних из них зацеплены за первое (аномальным здесь опять является случай  $\sigma = 1$ , когда уравнение для  $\phi$  приводится к отдельному уравнению диффузии).

В указанном обобщенном преобразовании появляется оператор Дарбу  $\hat{D} \equiv \partial_x + \sigma u/(2v)$ , отличительное свойство которого заключается в преобразовании решения линейного дифференциального уравнения второго порядка к решению другого уравнения того же вида (с различием операторов лишь в коэффициентных функциях). Такая его роль ясна из (2.2)–(2.4) и непосредственного проверяемого коммутационного операторного соотношения ("соотношения сплетания")

$$\hat{B}_+ \hat{D} = \hat{D} \hat{B}_- \quad (2.5)$$

Здесь удобнее использовать безразмерные переменные. В безразмерных переменных

$$\eta = \frac{u_0}{2v} x, \quad \tau = \frac{u_0^2}{4v\sigma} t, \quad v = \frac{u}{u_0} \quad (2.6)$$



образуемых с помощью характерной скорости  $u_0$  и коэффициента вязкости, система исходных нелинейных уравнений переписывается следующим образом:

$$\sigma^{-1} \partial_\tau \nu + 2\sigma \partial_\eta \nu = \partial_\eta^2 \nu, \quad \partial_\tau c + 2\sigma \partial_\eta (\nu c) = \partial_\eta^2 c, \quad \partial_\tau k + 2\sigma \partial_\eta k = \partial_\eta^2 k \quad (2.7)$$

причем в силу линейности пары уравнений для концентрации пассивной примеси ее масштаб может выбираться произвольно. Обобщенное преобразование Коула–Хопфа (2.1), (2.2) и преобразованные уравнения (2.3), (2.4) в безразмерном виде будут выглядеть так:

$$\nu = -\partial_\eta \ln \varepsilon, \quad c = \frac{\psi^{(\sigma)}}{\varepsilon^\sigma}, \quad k = \frac{\varphi^{(\sigma)}}{\varepsilon^\sigma}, \quad \psi^{(\sigma)} = \frac{u_0}{2\nu} \hat{D}_\sigma \varphi^{(\sigma)}, \quad \hat{D}_\sigma = \partial_\eta + \sigma \nu = \frac{2\nu}{u_0} \hat{D} \\ (\sigma^{-1} \partial_\tau - \partial_\eta^2) \varepsilon = 0, \quad \hat{L}_\sigma \psi^{(\sigma)} = 0, \quad \hat{L}_{\sigma-1} \varphi^{(\sigma)} = 0 \quad (2.8)$$

$$\hat{L}_\sigma \equiv \partial_\tau - \partial_\eta^2 + \sigma(\sigma+1) \nu_\eta = \frac{4\nu\sigma}{u_0^2} \hat{B}_+, \quad \hat{B}_- = \frac{u_0^2}{4\nu\sigma} \hat{L}_{\sigma-1}$$

Коммутационное соотношение (2.5) переписывается при этом как "лестничное" соотношение

$$\hat{L}_\sigma \hat{D}_\sigma = \hat{D}_\sigma \hat{L}_{\sigma-1} \quad (2.9)$$

Безразмерный оператор Дарбу  $\hat{D}_\sigma$ , как видно отсюда, будет лестничным оператором, коммутирование с которым позволяет изменить на единицу значение параметра  $\sigma$  в единственной явно входящей в оператор  $\hat{L}_\sigma$  комбинации  $\sigma(\sigma+1)$ . Если он является "оператором понижения", то в силу формального свойства симметрии  $\hat{L}_{-\sigma} = \hat{L}_{\sigma-1}$  (в силу термодинамических ограничений отрицательные числа Прандтля невозможны) оператор Дарбу  $\hat{D}_{-\sigma}$  будет, согласно (2.9), "оператором повышения". Однако явной комбинацией  $\sigma(\sigma+1)$  в общем случае не исчерпывается зависимость обсуждаемого оператора от числа Прандтля. Неявно от числа Прандтля зависит, вообще говоря, также входящая в него безразмерная скорость  $\nu$ , как это ясно из первого уравнения (2.7). В силу этого цепочка соотношений с различными числами Прандтля, следующая из (2.9), оказывается незамкнутой. Ее замыкание происходит в частном случае стационарного поля скорости, так как при  $\partial_\tau \nu = 0$  распределение безразмерной скорости перестает зависеть от числа Прандтля (см. (2.7)). В итоге тогда на основе (2.9) формируется зацепляющаяся последовательность операторных соотношений

$$\hat{L}_\sigma \hat{D}_\sigma \hat{D}_{\sigma-1} \dots \hat{D}_{\sigma-n+1} = \hat{D}_\sigma \hat{D}_{\sigma-1} \dots \hat{D}_{\sigma-n+1} \hat{L}_{\sigma-n} \quad (2.10)$$

и повторным применением операторов понижения или повышения можно добиться любого целочисленного изменения числа Прандтля в уравнениях.

В частности, при целых числах Прандтля последними звеньями в цепи понижения будут операторы с  $\sigma = 1$  и  $\sigma = 0$ , так что задача оказывается приводимой к простой задаче для уравнения теплопроводности, и возможно следующее представление решения:

$$\hat{L}_\sigma \psi^{(\sigma)} = 0, \quad \psi^{(\sigma)} = \hat{D}_\sigma \dots \hat{D}_1 \psi^{(0)}, \quad \hat{L}_0 \varphi^{(1)} = 0, \quad \hat{L}_0 = \partial_\tau - \partial_\eta^2, \quad \psi^{(0)} \equiv \frac{u_0}{2\nu} \varphi^{(1)} \quad (2.11)$$

Лестничный характер найденной здесь связи решений с различными числами Прандтля оказывается фактически отражением того, что оператор Дарбу является при  $\nu_\tau = 0$  корневым оператором факторизации (сведения операторов второго порядка к произведению операторов первого) стационарной части оператора  $\hat{L}_\sigma$  и коммути-



рует с оператором  $\partial_\tau$

$$\begin{aligned}\partial_\tau + \hat{D}_\sigma \hat{D}_\sigma^+ &= \hat{L}_\sigma + \sigma^2 C, \quad \partial_\tau + \hat{D}_\sigma^+ \hat{D}_\sigma = \hat{L}_{\sigma-1} + \sigma^2 C; \quad \hat{D}_\sigma^+ = -\hat{D}_{-\sigma} \\ \hat{L}_\sigma \hat{D}_\sigma \varphi &= (\partial_\tau + \hat{D}_\sigma \hat{D}_\sigma^+ - \sigma^2 C) \hat{D}_\sigma \varphi = \hat{D}_\sigma (\partial_\tau + \hat{D}_\sigma^+ \hat{D}_\sigma - \sigma^2 C) \varphi = \hat{D}_\sigma \hat{L}_{\sigma-1} \varphi\end{aligned}$$

Верхним индексом "плюс" обозначен сопряженный дифференциальный оператор Дарбу, и для преобразований использовано следствие уравнения движения  $v^2 = v_\eta + C$  при  $v_\tau = 0$  (для решения вида (2.13) постоянная  $C$  становится единичной). Таким образом, факторизация операторов ведет к свойству (2.9) [13, 14]. В свою очередь возможность факторизации связана с дополнительной внутренней симметрией задачи [15, 16].

При переходе из неподвижной в равномерно движущуюся систему координат нелинейные гидродинамические уравнения (1.1), (1.3), (1.4) остаются неизменными в соответствии с неизменностью полей концентрации примеси и изменением поля скорости на аддитивную постоянную (галилеевская инвариантность)

$$t' = t, \quad x' = x - u_0 t \quad (2.12)$$

$$u'(x', t') = u(x, t) - u_0, \quad c'(x', t') = c(x, t), \quad k'(x', t') = k(x, t)$$

Благодаря этому решение в виде стационарного ограниченного вдали течения сводится к равномерно движущейся ударной волне. В движущейся вместе с такой волной системе координат распределение скоростей в безразмерных переменных (штрихи опускаем) имеет вид (ср. с записью в размерных переменных в лабораторной системе координат (1.6), (1.7))

$$v = -\text{th } \xi, \quad \xi = \eta - 2\sigma\tau = \frac{u_0}{2v}(x - u_0 t) \quad (2.13)$$

Новые неизвестные величины  $\varepsilon$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ , введенные обобщенным преобразованием Коула–Хопфа, не являются галилеевски инвариантными. В соответствии с неизменностью концентрации и преобразованием поля скорости (2.12) они следующим образом меняются при переходе в движущуюся систему координат:

$$\begin{aligned}\varepsilon'(x', t') &= \varepsilon(x, t) \exp\left(\frac{u_0}{2v} x\right) f(t) \\ \psi'(x', t') &= \psi(x, t) \exp\left(\frac{u_0}{2v} \sigma x\right) f^\sigma(t) \\ \varphi'(x', t') &= \varphi(x, t) \exp\left(\frac{u_0}{2v} \sigma x\right) f^\sigma(t)\end{aligned} \quad (2.14)$$

Вид уравнения диффузии для функции  $\varepsilon(x, t)$  в (2.3) не будет меняться при такой замене переменных, если произвольную функцию времени  $f(t)$  выбрать в виде

$$f(t) = C \exp\left(-\frac{u_0^2}{4v} t\right) \quad (2.15)$$

Здесь еще остается произвол в постоянной  $C$ . При этом уравнения (2.3) для двух других функций  $\psi(x, t)$ ,  $\varphi(x, t)$  остаются инвариантными автоматически.

Отражением указанных трансформационных свойств вспомогательных функций является, в частности, то, что стационарному распределению скоростей (2.13) будет соответствовать зависящая от времени функция

$$\varepsilon(\xi, \tau) = \text{ch } \xi \exp(\sigma\tau)$$

Здесь с использованием амплитудного произвола (2.15) сделан упрощающий выбор произвольной постоянной  $C = 1/2$ .



Рассматриваемые линейные уравнения и связи их решений при целых числах Прандтля можно переписать теперь в движущейся вместе с ударной волной системе координат следующим образом:

$$\hat{L}_\sigma \psi^{(\sigma)} = 0: (\partial_\tau - \partial_\xi^2 - \sigma(\sigma+1) \operatorname{sech}^2 \xi) \psi^{(\sigma)} = 0$$

$$\psi^{(\sigma)} = \hat{D}_\sigma \psi^{(\sigma-1)}: \psi^{(\sigma)} = (\partial_\xi - \sigma \operatorname{th} \xi) \psi^{(\sigma-1)} = \operatorname{ch}^\sigma \xi \partial_\xi \frac{\psi^{(\sigma-1)}}{\operatorname{ch}^\sigma \xi}$$

$$\psi^{(\sigma)} = \operatorname{ch}^{\sigma+1} \xi \left( \frac{\partial}{\partial \operatorname{sh} \xi} \right)^\sigma \frac{\psi^{(0)}}{\operatorname{ch} \xi} = \operatorname{ch}^{\sigma+1} \xi \left( \frac{\partial}{\partial \operatorname{sh} \xi} \right)^{\sigma+1} \chi, \quad \psi^{(0)} = \hat{D}_0 \chi = \partial_\xi \chi$$

Если ограничиться анализом фундаментального решения начальной задачи для уравнения конвективной диффузии (1.3) в поле скоростей ударной волны, т.е. начальной задачи с локализованным начальным распределением примеси

$$c|_{t=0} = \delta(x - x_0) = \frac{u_0}{2\nu} \delta(\xi - \xi_0)$$

то соответствующими начальными условиями к уравнению теплопроводности для  $\psi^{(0)}$  и для  $\chi$  будут (общий размерный множитель  $u_0/(2\nu)$  далее для упрощения опускается)

$$\psi^{(0)}|_{\tau=0} = \partial_\xi \chi|_{\tau=0}, \quad \chi|_{\tau=0} = \frac{(\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh} \xi_0)^\sigma}{\sigma!} H(\xi - \xi_0)$$

Они пропорциональны функции Хевисайда. Решение таких начальных задач для уравнения теплопроводности позволяет описать эволюцию концентрационного поля следующим интегральным представлением:

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) &= e^{-\sigma^2 \tau} \operatorname{ch} \xi \left( \frac{\partial}{\partial \operatorname{sh} \xi} \right)^{\sigma+1} \chi = \\ &= \frac{\exp(-\sigma^2 \tau)}{2\sqrt{\pi\tau}} \operatorname{ch} \xi \left( \frac{\partial}{\partial \operatorname{sh} \xi} \right)^{\sigma+1} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{(\operatorname{sh} \zeta - \operatorname{sh} \xi_0)^\sigma}{\sigma!} \exp\left(-\frac{(\zeta - \xi)^2}{4\tau}\right) d\zeta \end{aligned}$$

причем интегралы выражаются через функцию ошибок, поскольку они легко сводятся к интегралам от квадратичных выражений под знаком экспоненты.

В частности, при  $\sigma = 1$  имеем

$$c(\xi, \tau) = \frac{\operatorname{sech}^2 \xi}{4} [\operatorname{erf}(\lambda + \sqrt{\tau}) - \operatorname{erf}(\lambda - \sqrt{\tau})] + \frac{\exp(-\lambda^2 - \tau) \operatorname{ch} \xi_0}{2\sqrt{\pi\tau} \operatorname{ch} \xi}, \quad \lambda \equiv \frac{\xi_0 - \xi}{2\sqrt{\tau}}$$

В другом частном случае  $\sigma = 2$  получаем

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) &= \frac{3}{8} \operatorname{sech}^4 \xi \left[ \sum_{\pm} \operatorname{erf}(2\sqrt{\tau} \pm \lambda) + 2 \exp(-3\tau) \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} \xi_0 \sum_{\pm} \operatorname{erf}(\sqrt{\tau} \pm \lambda) \right] + \\ &+ \frac{\exp(-\lambda^2 - 3\tau) \operatorname{ch}^2 \xi_0}{2\sqrt{\pi\tau} \operatorname{ch}^2 \xi} \end{aligned}$$

Асимптотически при больших временах  $\tau \rightarrow \infty$  и фиксированных координатах  $\xi, \xi_0$  распределение примеси принимает здесь вид локализованной солитоноподобной волны, отражающей стационарное решение уравнения конвекции,  $c(\xi, \tau) \sim \operatorname{sech}^{2\sigma} \xi$ .



Несмотря на общность (совпадение при  $\sigma = 1$ ) формы с солитонами уравнения Кортевега–де Вриза, подобные примесные солитоны резко отличаются от классических по характеру своих взаимодействий. При столкновении происходит абсолютно неупругое слияние таких асимптотически упрощенных примесных солитонов в соответствии с неупругим взаимодействием переносящих их ударных волн. По мере увеличения числа столкновений можно ожидать накопления примеси в солитонах. Ее концентрирование будет резче при больших числах Прандтля. Это может быть одним из механизмов формирования когерентных структур из пар ударная волна–примесный солитон в турбулентных потоках сжимаемой жидкости.

Рассмотренному одномерному варианту, по-видимому, соответствует образование паутинообразных примесных структур в поле случайных двумерных сжимаемых течений [17]. Был выполнен [18] анализ стохастического роста средней ширины скопления примеси на поверхности турбулентного потока жидкости в одномерном приближении.

**3. Конвекция активной примеси.** Рассмотрим теперь пример активной примеси, оказывающей обратное влияние на течение жидкости, для которого также удастся свести решение нелинейных уравнений движения и конвекции к решению линейных уравнений теплопроводности.

Если под влиянием переносимой потоком примеси давление в жидкости оказывается квадратично меняющимся с изменением концентрации примеси

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = -\partial_x p, \quad p = p_0 + \frac{\gamma}{2} c^2$$

то для скорости и концентрации получаем систему зацепляющихся уравнений

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = -\gamma c \partial_x c, \quad \partial_t c + \partial_x (uc) - \chi \partial_x^2 c = 0 \quad (3.1)$$

Простой заменой неизвестных, состоящей в использовании суммарной и разностной переменных  $s \equiv u + c\sqrt{\gamma}$ ,  $r \equiv u - c\sqrt{\gamma}$ , в случае равных кинетических коэффициентов ( $\nu = \chi$ ) переходим к паре уравнений Бюргерса

$$\partial_t s + s \partial_x s - \nu \partial_x^2 s = 0, \quad \partial_t r + r \partial_x r - \nu \partial_x^2 r = 0$$

каждое из которых в свою очередь заменой Коула–Хопфа приводится к линейному уравнению теплопроводности.

Обсудим, как указанная приводимость решения системы уравнений (3.1) при равных кинетических коэффициентах к решениям линейных уравнений теплопроводности, обнаруживается испытание Ковалевской–Пенлеве. При поиске полюсных разложений решений [5]

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^{n-\alpha}, \quad c(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, t) \varepsilon^{n-\beta}, \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t)$$

для баланса наиболее сингулярных членов уравнений требуется, чтобы  $\alpha = \beta = 1$ , и уравнения (3.1) в случае  $\nu = \chi$  сводятся к рекуррентным связям между функциями  $u_n(x, t)$ ,  $c_n(x, t)$

$$\begin{aligned} & (\partial_t - \nu \partial_x^2) u_{n-2} + (n-2) \left\{ u_{n-1} \varepsilon_t + \frac{\varepsilon_x}{2} \sum_m (u_m u_{n-m} + \gamma c_m c_{n-m}) - (n-1) \nu u_n \varepsilon_x^2 - \right. \\ & \left. - \nu \varepsilon_x \partial_x u_{n-1} - \nu \partial_x (\varepsilon_x u_{n-1}) \right\} + \partial_x \frac{1}{2} \sum_m (u_m u_{n-m-1} + \gamma c_m c_{n-m-1}) = 0 \\ & (\partial_t - \nu \partial_x^2) c_{n-2} + (n-2) \left\{ c_{n-1} \varepsilon_t + \varepsilon_x \sum_m u_m c_{n-m} - \right. \\ & \left. - (n-1) \nu c_n \varepsilon_x^2 - \nu \varepsilon_x \partial_x c_{n-1} - \nu \partial_x (\varepsilon_x c_{n-1}) \right\} + \partial_x \sum_m c_m c_{n-m-1} = 0 \end{aligned}$$



Полагая  $n = 0$ , получим

$$u_0 = -v\epsilon_x, \quad c_0 = q \frac{v}{\sqrt{\gamma}} \epsilon_x, \quad q \equiv \pm 1 \quad (3.2)$$

Общее решение системы уравнений в частных производных требует достаточного числа произвольных функций (здесь четырех), которые могут быть выявлены при обращении в нуль определителя из коэффициентов при старших членах в рекуррентных соотношениях. Этот определитель с использованием выражений для  $u_0, c_0$  преобразуется к виду

$$\Delta = \epsilon_x^2 (n-2)^2 \begin{vmatrix} u_0 - (n-1)v\epsilon_x & \gamma c_0 \\ c_0 & u_0 - (n-1)v\epsilon_x \end{vmatrix} = v^2 \epsilon_x^2 (n+1)(n-1)(n-2)^2$$

Из обращения его в нуль находятся "резонансные показатели" – номера коэффициентных функций, которые могли бы оказаться произвольными.

Рекуррентные соотношения с использованием (3.2) дают при  $n = 1$

$$\epsilon_t - v\epsilon_{xx} + (u_1 - q\sqrt{\gamma}c_1)\epsilon_x = 0 \quad (3.3)$$

при  $n = 2$

$$\partial_t u_0 = \partial_x (v\partial_x u_0 - u_0 u_1 - \gamma c_0 c_1), \quad \partial_t c_0 = \partial_x (v\partial_x c_0 - u_0 c_1 - c_0 u_1) \quad (3.4)$$

и при  $n = 3$

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_1 \partial_x - v\partial_x^2)u_1 + \gamma c_2 \partial_x c_1 = & -\partial_x (u_0 u_2 + \gamma c_0 c_2 - v\epsilon_x u_2) - \epsilon_t u_2 - \\ & -\epsilon_x (u_0 u_3 + u_1 u_2 + \gamma c_0 c_3 + \gamma c_1 c_2 - v\partial_x u_2 - 2v\epsilon_x u_3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - v\partial_x^2)c_1 + \partial_x (u_1 c_1) = & -\partial_x (u_0 c_2 + c_0 u_2 - v\epsilon_x c_2) - \epsilon_t c_2 - \\ & -\epsilon_x (u_0 c_3 + u_1 c_2 + c_0 u_3 + c_1 u_2 - v\partial_x c_2 - 2v\epsilon_x c_3) \end{aligned}$$

В соотношении (3.3) одна из функций  $u_1, c_1$  остается неопределенной. При  $n = 2$  два соотношения (3.4) в силу (3.2) есть следствие друг друга, и к тому же получаются дифференцированием (3.3), так что на этом шаге функции  $u_2, c_2$  не определяются. В итоге возникает нужное для выполнимости испытания Ковалевской–Пенлеве количество произвольных функций: одна при  $n = 1$ , две при  $n = 2$  и еще одна при  $n = -1$  (последняя есть  $\epsilon(x, t)$ ).

Из рекуррентных соотношений видно, что ряды для решений можно оборвать, полагая  $u_n, c_n = 0$  при  $n > 1$ . Тогда функции  $u_1, c_1$  будут удовлетворять согласно (3.5) исходной системе уравнений, а формулы (3.2) – (3.5) дают преобразование Беклунда, позволяющее строить по одним решениям другие,

$$u = \frac{u_0}{\epsilon} + u_1 = -v\partial_x \ln \epsilon + u_1, \quad c = \frac{c_0}{\epsilon} + c_1 = q \frac{v}{\sqrt{\gamma}} \partial_x \ln \epsilon + c_1 \quad (3.6)$$

$$\epsilon_t - v\epsilon_{xx} + (u_1 - q\sqrt{\gamma}c_1)\epsilon_x = 0$$

Если начать с  $u_1 = c_1 = 0$ , то решения для  $u, c$  оказываются выраженными через решения уравнения теплопроводности. Вид преобразования Беклунда подсказывает замену  $v = u - q\sqrt{\gamma}c$ . Для такой переменной оно принимает вид преобразования Беклунда для уравнения Бюргерса.

Примененный выше прием обращения к суммарной и разностной переменным остается полезным и при учете дисперсии среды, одинаковой для скоростного и примесного полей. Например, в случае системы уравнений

$$\partial_t u + u\partial_x u - v\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u = -\gamma c\partial_x c, \quad \partial_t c + \partial_x (uc) - v\partial_x^2 c + \beta\partial_x^3 c = 0$$



такой прием позволяет перейти к паре уравнений Кортевега–де Вриза–Бюргерса

$$\partial_t s + s \partial_x s - \nu \partial_x^2 s + \beta \partial_x^3 s = 0, \quad \partial_t r + r \partial_x r - \nu \partial_x^2 r + \beta \partial_x^3 r = 0$$

которые при нулевой вязкости сводятся к уравнениям Кортевега–де Вриза.

Аналогичное расщепление уравнений получается и при произвольном виде линейной дисперсии, одинаковой для полей скорости и концентрации примеси.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00435) и доложена на Международной конференции "Современная теория фильтрации", посвященной памяти П.Я. Кочкиной (Москва, сентябрь 1999 г.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С.В. Научные работы. (Ред. и коммент. П.Я. Полубариновой-Кочкиной). М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сб., посвященный памяти С.В. Ковалевской. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. С. 157–186.
3. Ince E.L. Ordinary Differential Equations. N.Y.: Dover, 1944. = Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во, 1939. 719 с.
4. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and The Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981 = Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
5. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.
6. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances Applied Mechanics. 1948. V. 1. P. 171–199.
7. Burgers J.M. The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht; Boston: Reidel, 1974. 173 p.
8. Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  // Commun. Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
9. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9. № 3. P. 225–236.
10. Городцов В.А. Теплоперенос и турбулентная диффузия в одномерной гидродинамике без давления // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1021–1028.
11. Lighthill M.J., Viscosity effects in sound waves of finite amplitude // Surveys in Mechanics / Ed. G.K. Batchelor, R.M. Davies. Cambridge: Univ. Press, 1956. P. 250–351.
12. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. N.Y.: Wiley, 1974. = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
13. Infeld L., Hull T.E. The factorization method // Rev. Mod. Phys. 1951. V. 23. № 1. P. 21–68.
14. Morse P.M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. V. 1. N.Y.: McGraw Hill, 1953 = Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
15. Генденштейн Л.Э., Криве И.В. Суперсимметрия в квантовой механике // Успехи физ. наук. 1985. Т. 146. № 4. С. 553–590.
16. Kwong W., Rosner J.L. Supersymmetric quantum mechanics and inverse scattering // Progr. Theor. Phys., Suppl. 1986. № 86. P. 366–376.
17. Кляцкин В.И., Саичев А.И. К статистической теории диффузии плавучей примеси в случайном поле скоростей // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 4. С. 1297–1313.
18. Жукова И.С., Саичев А.И. Локализация сгустков плавучих частиц на поверхности турбулентного потока // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 624–630.

Москва

Поступила в редакцию  
30.IX.1999