

УДК 532.58

© 2000 г. Г.Е. Якунина

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕКОНИЧЕСКИХ И НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

В предположении, что сила воздействия среды на элемент поверхности тела зависит только от ориентации элемента относительно направления движения, предложен метод построения неконических пространственных тел минимального сопротивления. При заданных площади основания тела и максимально допустимой длине форма этих тел образуется комбинациями участков поверхности кругового конуса и плоскостей, нормаль которых составляет с направлением движения некоторый оптимальный угол. Показано, что поперечное сечение оптимального тела может быть несимметричным, но сила, действующая на тело, не имеет составляющей в плоскости, перпендикулярной направлению движения.

Для любого закона сопротивления, записанного в рамках модели локального взаимодействия, при заданных площади основания тела и максимально допустимой длине задача построения пространственной формы тела минимального сопротивления была решена [1] без упрощающих предположений о геометрии тела. Было показано, что она имеет бесконечное множество решений. Построенные тела названы абсолютно оптимальными (АОТ), так как все они имеют одинаковое сопротивление, меньше которого при заданной площади основания получить нельзя. Форма АОТ образуется комбинациями участков поверхности кругового конуса и плоскостей, нормаль которых составляет с направлением движения некоторый оптимальный угол. Этот угол определяется характеристиками среды и скоростью движения через постоянные, входящие в закон сопротивления. Ранее [1] были построены АОТ с коническим продольным контуром и было показано, что они могут иметь как симметричное, так и несимметричное поперечное сечение.

Ниже при заданных площади основания тела и максимально допустимой длине строятся неконические пространственные АОТ и исследуются силовые характеристики несимметричных АОТ.

1. Свойства оптимальных поверхностей. В декартовой прямоугольной системе координат O, x, y, z рассматривается движение тела в среде с постоянной скоростью в направлении, противоположном направлению оси Ox .

Сила, действующая на тело, записывается в виде

$$\mathbf{F} = q \iint_S (c_p \mathbf{n} + c_\tau \boldsymbol{\tau}) dS \quad (1.1)$$

Здесь q – скоростной напор, c_p и c_τ – коэффициенты давления и трения на поверхности тела, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные векторы внутренней нормали и касательной к элементу поверхности, причем векторы $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{x}$ – компланарны:

$$\boldsymbol{\tau} = [(\mathbf{n} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{n}] / |[\mathbf{n} \times \mathbf{x}]| \quad (1.2)$$

Интегрирование в выражении (1.1) ведется по поверхности S контакта среды и тела, для которой

$$\alpha = (\mathbf{n}\mathbf{x}) \geq 0, \quad (\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}) = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (1.3)$$

В рамках модели локального взаимодействия каждый элемент поверхности тела

взаимодействует со средой независимо от других участков поверхности и коэффициенты c_p и c_τ — функции от α :

$$c_p = c_p(\alpha), \quad c_\tau = c_\tau(\alpha) \quad (1.4)$$

В общем случае в выражения (1.4) могут входить скорость движения тела и характеристики среды, которые считаются постоянными.

Пусть тело обладает кусочно-гладкой поверхностью и в каждой ее точке, кроме конечного числа линий излома, выполнено условие (1.3). Площадь основания тела S_b считаем заданной. Она связана с S соотношением

$$S_b = \iint_S \alpha dS \quad (1.5)$$

Сопротивление тела запишем в виде

$$F_1 = (F_x) = q \iint_S f(\alpha) \alpha dS \quad (1.6)$$

$$f(\alpha) = c_p(\alpha) + (c_\tau(\alpha) / \alpha) \sqrt{1 - \alpha^2}$$

Заметим, что поверхность тела однозначно проецируется на плоскость основания за исключением участков с $\alpha = 0$. Обозначая общую площадь таких участков S_0 , представим интеграл (1.6) в виде

$$F_1 = q \left(\iint_{S_b} f(\alpha) dS_b + c_\tau(0) S_0 \right)$$

Рассмотрим $f(\alpha)$ как функцию действительного переменного α на отрезке $[0, 1]$. Пусть при некотором значении $\alpha = \alpha^*$ она достигает минимума. Тогда для интеграла F_1 верна оценка

$$F_1 \geq F_1^* = q S_b f(\alpha^*)$$

Равенство в ней возможно лишь при $\alpha \equiv \alpha^*$, когда функционал сопротивления (1.6) достигает своего абсолютного минимума F_1^* .

Таким образом, при заданной площади основания S_b нельзя получить сопротивление меньшее, чем F_1^* . Его имеют тела, в каждой точке поверхности которых выполнено условие

$$\alpha = \alpha^* = \text{const} \quad (1.7)$$

Как и ранее [1] будем называть такие тела абсолютно оптимальными (АОТ). Было показано [1], что если поверхность тела в цилиндрической системе координат (ρ, x, θ) с началом отсчета x в вершине тела задана уравнением

$$\rho = \psi(x, \theta) \quad (1.8)$$

то функция $\psi(x, \theta)$, дающая форму АОТ, на гладких участках поверхности удовлетворяет уравнению

$$\psi_x / [1 + (\psi_\theta / \psi)^2]^{1/2} = t^*, \quad t^* = \alpha^* / \sqrt{1 - \alpha^{*2}} \quad (1.9)$$

При $\alpha^* < 1$ его решения с $\psi_x = t^*$ и $\psi_\theta = 0$ определяют поверхности круговых конусов, в частности конус с функцией $\psi(x, \theta) = t^* x$ с началом координат в его вершине. Все плоскости, касательные к нему, также удовлетворяют уравнению (1.9). Поверхность тела, состоящая из комбинаций участков этого конуса и касающихся его плоскостей, задается функцией

$$\psi(x, \theta) = \phi(x) R(\theta) \quad (1.10)$$

где непрерывные функции $\phi(x)$ и $R(\theta)$ определяют соответственно продольный и поперечный контуры тела. Как следует из уравнения (1.9), в этом случае продольный

контур оптимальной поверхности конический

$$\varphi'(x) = t_k = \text{const} > 0 \quad (1.11)$$

а функция $R(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$R^2 / (R^2 + R'^2)^{1/2} = r_k = t^* / t_k = \text{const} \quad (1.12)$$

Его решениями являются дуги двух типов: дуга окружности с $R(\theta) \equiv r_k$ и отрезок прямой, касающейся окружности радиуса r_k , с $R(\theta) = r_k / \cos(\theta - \theta_1)$, где θ_1 – постоянная интегрирования. Поперечный контур оптимального тела может содержать отрезки разных прямых с разными θ_1 , непрерывно сопрягающиеся друг с другом. Это приводит к появлению линий излома на поверхности и может быть причиной того, что поперечный контур оптимального тела будет несимметричным. Правило сопряжения отрезков прямых задает условие (1.5), которое для тела длины x_k с поверхностью (1.8) записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} \psi^2(x_k, \theta) d\theta = 2S_b \quad (1.13)$$

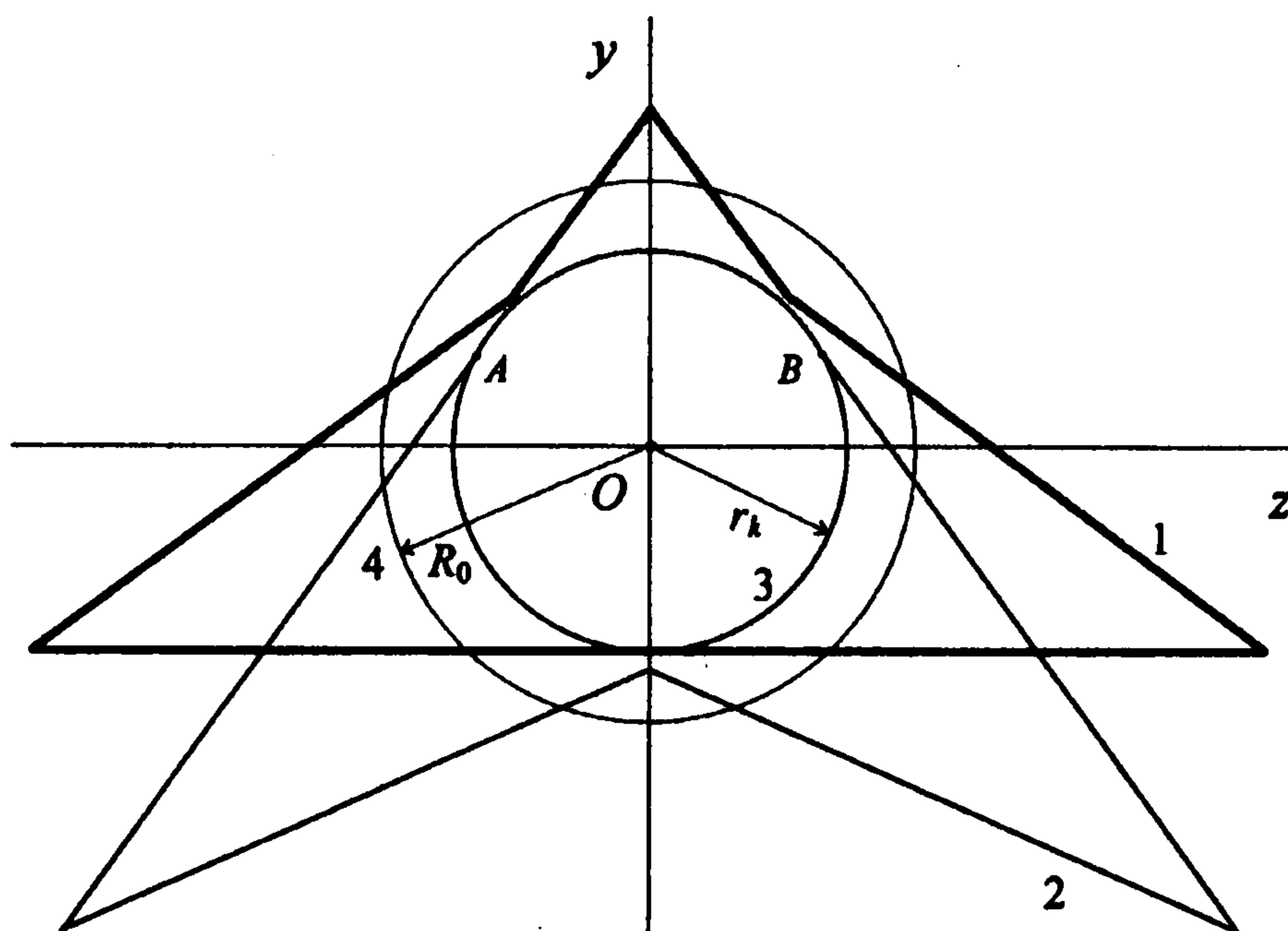
Согласно ему, для функций $\varphi(x)$ и $R(\theta)$ должны выполняться условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x_k) = (S_b / \pi)^{1/2} \quad (1.14)$$

$$R(0) = R(2\pi), \quad \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta = 2\pi \quad (1.15)$$

Поверхность АОТ, удовлетворяющая соотношениям (1.10) – (1.15), коническая. Как следует из условий (1.12) и (1.15), значение $r_k \leq 1$ и всегда $t_k \geq t^*$. Это, в частности, означает, что наибольшую длину x_k^* в классе конических АОТ имеет круговой конус с $x_k^* = (S_b / \pi)^{1/2} / t^*$.

Примеры поперечных контуров конических АОТ в проекции на плоскость Oyz приведены на фиг. 1. При этом контур 1 не содержит дуг окружности, тогда как контуру 2 принадлежит дуга AB окружности 3 радиуса r_k . Ее касаются прямые, из отрезков которых состоят контуры 1 и 2. При одинаковых площади основания S_b и продольном контуре $\varphi(x) = t_k x$ с $t_k = t^* / r_k$ тела с поперечными сечениями 1 и 2 имеют одинаковое сопротивление F_1^* . Заметим, что они несимметричны относительно горизонтальной плоскости Oxz .



Фиг. 1

Ранее [1] было показано, что классу конических АОТ при заданной площади основания S_b принадлежат тела разной длины и разных поперечных размеров, которые можно непрерывно изменять, не меняя сопротивления тела. Покажем, что в классе АОТ можно построить бесконечное множество неконических тел, поверхность которых состоит из участков поверхности конических тел, удовлетворяющих условию (1.7) и непрерывно сопрягающихся друг с другом.

2. Построение неконических АОТ. Выпишем соотношения для $R(\theta)$ циклически симметричного ("звздообразного") конического АОТ, поперечный контур которого состоит из N -одинаковых симметричных циклов. При известном $r_k \leq 1$ и любом $N \geq 2$ поперечный контур такого тела полностью определяется функцией $R(\theta)$ в полуцикле на отрезке $[0, \pi/N]$. Он может состоять из двух, гладко сопрягающихся в точке $\theta = \theta_0$, дуг:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= r_k, & 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ R(\theta) &= r_k / \cos(\theta - \theta_1), & \theta_0 \leq \theta \leq \pi/N \end{aligned} \quad (2.1)$$

причем значения θ_0 и θ_1 при учете условий (1.15) находятся из соотношений

$$\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_1) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{N} - \theta_0\right) - \frac{Nr_0^2}{(\pi - N\theta_0 r_0^2)}, \quad r_0 = \frac{r_k}{\cos(\theta_0 - \theta_1)} \quad (2.2)$$

Здесь r_0 – минимальное значение $R(\theta)$, причем без ограничения общности считаем, что $r_0 = R(0)$. Если

$$r_k \leq [(\pi/N) / \operatorname{tg}(\pi/N)]^{1/2} \quad (2.3)$$

то дуга окружности у поперечного контура отсутствует ($\theta_0 = 0$). При нарушении условия (2.3) и $r_k < 1$ контур содержит обе дуги (2.1). В этом случае $\theta_1 = \theta_0$, а $r_0 = r_k$. При известных r_k и N значения r_0 , θ_0 и θ_1 из выражений (2.2) определяются однозначно.

Было доказано [1], что если при постановке задачи о теле минимального сопротивления на искомое тело кроме задания S_b наложены дополнительные ограничения на длину и количество циклов поперечного контура, то всегда можно подобрать удовлетворяющее им коническое звездообразное АОТ, которое при этих ограничениях будет решением задачи. Используя это свойство, при заданных S_b , N и максимально допустимой длине тела L построим неконическое АОТ, поверхность которого состоит из участков поверхности двух конических АОТ, непрерывно сопрягающихся друг с другом.

В качестве одного из тел возьмем круговой конус, который в классе АОТ имеет наибольшую длину x_k^* . Поверхность этого конуса задается функцией

$$\psi_1(x, \theta) = t^* x \quad (2.4)$$

Рассмотрим его сечение при некотором $x = x_1 < \min(L, x_k^*)$. Радиус этого сечения, отнесенный к $(S_b/\pi)^{1/2}$, обозначим $R_0 = x_1/x_k^*$. При заданных S_b и N построим также коническое звездообразное АОТ длины $x_2 < x_1$. Его продольный контур в соответствии с выражениями (1.11) и (1.14) определяется функцией $\varphi(x) = t_k x$, где $t_k = (S_b/\pi)^{1/2}/x_2$, а поперечный контур состоит из дуг окружности радиуса $r_k = x_2/x_k^*$ и отрезков прямых, ее касающихся. Функция поперечного контура $R(\theta)$ определяется соотношениями (2.1). Выполним сдвиг этого тела по оси Ox , перенеся его основание в точку $x = x_1$ (см. фиг. 2, а). После сдвига поверхность тела задается функцией

$$\psi_2(x, \theta) = t_k(x - x_0)R(\theta) \quad (2.5)$$

где $x_0 = x_1 - x_2$, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.9) и условию (1.13) при

$x_k = x_1$. Поверхность такого АОТ пересекается с поверхностью кругового конуса (2.4) по некоторым пространственным кривым.

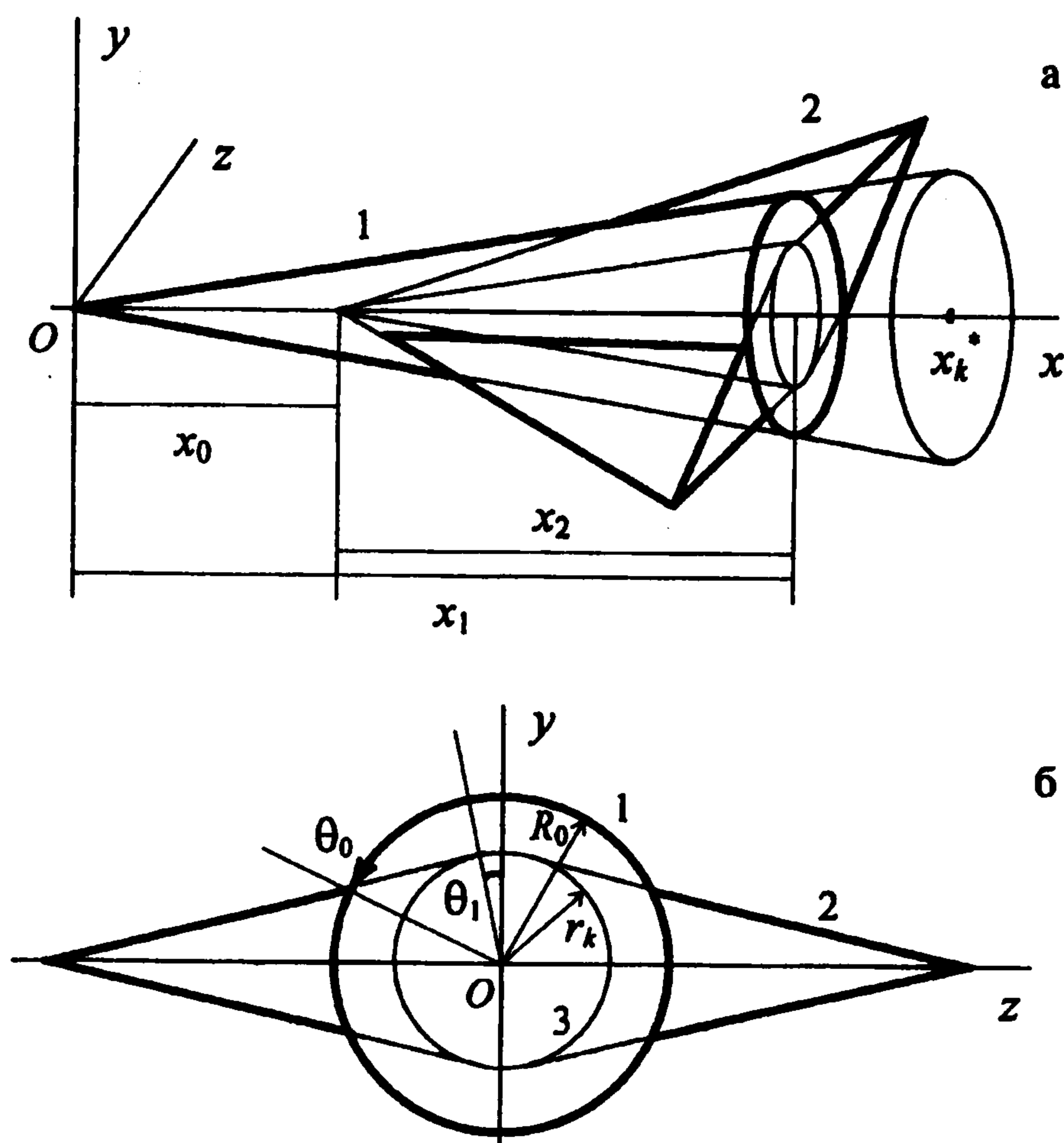
Рассмотрим новое тело длины x_1 , поверхность которого составлена из комбинаций участков поверхностей кругового конуса (2.4) и звездообразного АОТ (2.5). Определим его функцию $\psi(x, \theta)$ при любом $\theta \in [0, 2\pi]$ следующим образом:

$$\psi(x, \theta) = \psi_1(x, \theta), \quad 0 \leq x \leq x_0 \quad (2.6)$$

$$\psi(x, \theta) = \max(\psi_1(x, \theta), \psi_2(x, \theta)), \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

Эта функция, так же как $\psi_1(x, \theta)$ и $\psi_2(x, \theta)$, кусочно-гладкая и во всей области определения, кроме конечного числа линий излома, удовлетворяет уравнению (1.9). Она задает поверхность АОТ, если при $x_k = x_1$ для нее будет выполнено условие (1.13).

Так, если $R_0 \leq r_0$, где r_0 находится из соотношений (2.2) по известным r_k и N , то искомое неконическое АОТ построено. В этом случае в плоскости основания при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ функция $\psi(x_1, \theta) = \psi_2(x_1, \theta)$ и условие (1.13) удовлетворяется автоматически. Если же $R_0 > r_0$, что верно всегда при нарушении условия (2.3), в частности, это будет всегда при $N = 2$, то построенное тело имеет площадь основания больше заданной. В этом случае основание тела имеет вид, приведенный на фиг. 2, б. Его контур состоит из комбинаций дуг окружности 1 и отрезков прямых 2, которые принадлежат соответственно поверхностям 1 и 2 конических АОТ, изображенных на фиг. 2, а. Площадь основания такого тела без нарушения условия оптимальности (1.7) может быть уменьшена увеличением угла θ_1 , который является постоянной интегрирования уравнения (1.12). При неизменном продольном контуре (1.11) и сохранении значения r_k решение уравнения (1.12) с новой постоянной интегрирования определит функцию (2.5), которая, как и раньше, будет удовлетворять уравнению (1.9). Новое значение θ_1 можно найти из соотношений (2.2), если в них r_0 заменить на R_0 . Тогда из них однозначно определяется θ_0 и θ_1 , а значит, и контур основания тела. В полуцикле



Фиг. 2

на отрезке $[0, \pi/N]$ он будет состоять из двух сопрягающихся в точке $\theta = \theta_0$ дуг

$$R(\theta) \equiv R_0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0$$

$$R(\theta) = r_k / \cos(\theta - \theta_1), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi/N$$

Так как θ_0 и θ_1 подобраны в соответствии с условием (1.13), то построенное неконическое тело будет принадлежать классу АОТ, так как функция (2.6), задающая его поверхность, теперь удовлетворяет условиям (1.9) и (1.13). Как следует из правила его построения, количество циклов N звездообразного АОТ может браться любым, а значения x_1 и x_2 должны удовлетворять лишь условию: $x_2 < x_1 < \min(L, x_k^*)$. Меняя их, можно получать неконические АОТ, которые, как и конические, будут иметь разную длину и разные поперечные размеры. При равной площади основания S_b , все они будут иметь одинаковое сопротивление F_1^* .

На фиг. 2, а в качестве примера приведена форма неконического АОТ при $N = 2$. На практике такая форма может оказаться предпочтительнее конической. Так, например, в аэродинамике она названа [2] аэродинамически совершенной. В частности, можно предположить, что движение неконических АОТ в среде будет более устойчивым, чем движение конических, так как у них по сравнению с коническими АОТ центр давления силы, действующей на тело при малых углах атаки, смещен назад.

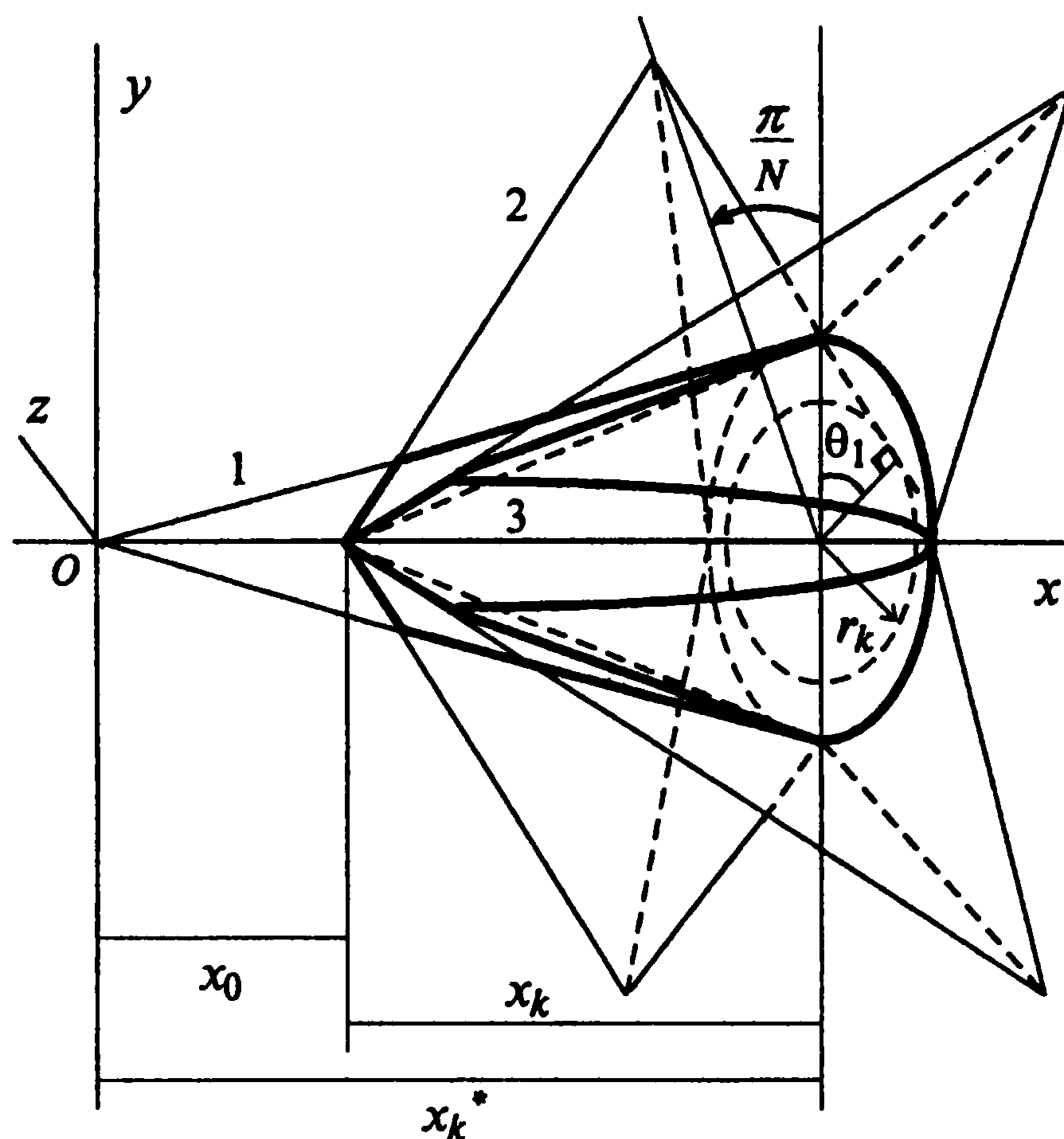
Комбинируя участки поверхности кругового конуса (2.4) и касающихся его плоскостей, можно строить АОТ, удовлетворяющие самым разным требованиям практики. Это могут быть ограничения на поперечные размеры тела и требование прохождения его поверхности через заданный контур основания.

Рассмотрим, например, задачу построения тела минимального сопротивления, когда, кроме S_b и L , дана форма его основания в виде круга. Покажем, что всегда есть неконическое АОТ, поверхность которого удовлетворяет заданным условиям.

Поверхность искомого тела будем составлять из участков поверхностей двух конических тел, одно из которых – круговой конус (2.4) длины x_k^* . Второе – звездообразное тело, имеющее длину $x_k \leq \min(L, x_k^*)$ и состоящее из N симметричных циклов, построим по следующему правилу. Рассмотрим поперечное сечение конуса (2.4) при $x = x_k$. Его радиус, отнесенный к $(S_b / \pi)^{1/2}$, обозначим $r_k = x_k / x_k^* \leq 1$. По значению r_k возьмем решение уравнения (1.12) $R(\theta) = r_k / \cos(\theta - \theta_1)$ с постоянной интегрирования $\theta_1 = -\arccos(r_k / r_0)$, где значение $r_0 = R(0)$ можно брать любым из условия $r_0 \geq 1$. Используя это решение для функции $R(\theta)$ в полуцикле на отрезке $[0, \pi/N]$, построим звездообразный поперечный контур тела. Построение контура возможно, если $N > \pi / \arcsin(r_k / r_0)$. Примем его за контур основания конического тела длины x_k , продольный контур которого $\varphi(x) = t_k x$, где $t_k = t^* / r_k$. Функция $\psi_2(x, \theta) = \varphi(x) R(\theta)$ задает его поверхность и на гладких участках удовлетворяет уравнению (1.9). Поверхность тела состоит из участков плоскостей, касающихся конуса (2.4), и на них выполнено условие (1.7). Минимальный радиус его основания равен $r_0 (S_b / \pi)^{1/2}$.

Сдвинем тело по оси Ox , переместив его основание в точку $x = x_k^*$ (см. фиг. 3). Вершина тела переместится в точку $x = x_0 = (x_k^* - x_k)$, а окружность минимального радиуса основания при $r_0 = 1$ совпадет с контуром основания конуса (2.4). При этом, как показано на фиг. 3, поверхности конуса 1 и звездообразного тела 2 пересекутся по некоторым пространственным кривым.

Рассмотрим новое тело длины x_k , поверхность которого при $x \in [x_0, x_k^*]$ для каждого $\theta \in [0, 2\pi]$ определяется функцией $\psi(x, \theta) = \min(\psi_1(x, \theta), \psi_2(x - x_0, \theta))$. На гладких участках его поверхности выполнено условие оптимальности (1.7), а контур основания – окружность радиуса $(S_b / \pi)^{1/2}$. Поверхность построенного тела удовлетворяет



Фиг. 3

всем заданным условиям и, следовательно, оно является искомым АОТ. Пример его формы для $r_0 = 1$ дан на фиг. 3 в виде конфигурации 3. Вблизи вершины поверхность тела задается функцией $\psi_2(x - x_0, \theta)$. Это означает, что носик тела имеет звездообразную форму и на отрезке при вершине длины $\Delta x_1 = x_k(1 - r_k)/(r_f - r_k)$, где $r_f = r_k/\cos(\pi/N - \theta_1)$, его поперечный контур состоит только из отрезков прямых. При удалении от вершины у поперечного контура появляются дуги окружности, принадлежащие конусу 1. При $r_0 > 1$ у основания на отрезке длины $\Delta x_2 = x_k(r_0 - 1)/(r_0 - r_k)$ тело будет иметь осесимметричный участок, полностью принадлежащий поверхности конуса (2.4). Учитывая, что при заданных S_b и L существует произвол в выборе значений x_k , r_0 и N , то, меняя их, получим бесконечное множество АОТ, контур основания которых – окружность.

На практике АОТ с круговым основанием могут быть головной частью заданной длины некоторого тела вращения. Как известно, при движении тела в плотных средах, типа грунтов и металлов, действия напряжений на его поверхности часто ведут к деформации и разрушению тела. Прочность АОТ с круговым основанием выше, чем у эквивалентных им по длине и площади основания конических АОТ. Поэтому для этих сред при выборе оптимальной конфигурации такие АОТ будут предпочтительнее конических.

Выше даны примеры построения неконических АОТ из двух конических тел, на поверхности которых выполнено условие оптимальности (1.7). Аналогичным способом могут быть построены АОТ, состоящие из участков поверхностей нескольких тел, удовлетворяющих (1.7).

Рассмотренные примеры демонстрируют возможности выбора оптимальной конфигурации класса АОТ при задании самых разных условий на геометрию тела. Среди них есть и несимметричные тела. Они могут быть коническими, и тогда их поверхность описывается соотношениями (1.10) – (1.15). Из участков поверхностей несимметричных АОТ, так же как из участков симметричных, могут составляться поверхности неконических тел по правилам, описанным выше. Так, например, форму АОТ, изображенную на фиг. 2, а, можно сделать несимметричной, если при ее построении

использовать в качестве второй поверхности коническую форму с поперечным контуром 1 или 2, приведенные на фиг. 1. Тогда в соответствии с правилом построения новой поверхности (2.6) в плоскости основания тела при $x = x_1$ поперечный контур АОТ кроме участков контуров 1 или 2 будет содержать дуги окружности 4 фиг. 1. Несимметричные АОТ, как и симметричные, при равной площади основания S_b , все будут иметь одинаковое сопротивление F_1^* . Исследуем их силовые характеристики в плоскости, перпендикулярной направлению движения.

3. Силовые характеристики несимметричных АОТ. Покажем, что в рамках модели локального взаимодействия при движении тела вдоль оси Ox , на поверхности которого выполнены условия (1.3) и (1.7), независимо от формы поперечного сечения и вида функций (1.4) сила, действующая на тело, не имеет составляющей в плоскости Oyz .

Предположим, что это не так и сила (1.1) в плоскости Oyz имеет ненулевую составляющую, направленную вдоль некоторого единичного вектора e . Тогда

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{x} + F_2 \mathbf{e} \quad (3.1)$$

Используя выражения (1.2) и (1.3), запишем разложения векторов $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ по базису $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ в виде

$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{x} + n_y \mathbf{y} + n_z \mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\tau} = \beta \mathbf{x} - t(n_y \mathbf{y} + n_z \mathbf{z})$$

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad t = \alpha / \beta$$

Здесь и далее звездочка у α опущена.

Так как $(\mathbf{x}e) = 0$, то отсюда следует, что

$$(\boldsymbol{\tau}e) = -t(\mathbf{n}e) \quad (3.2)$$

Рассмотрим компоненту F_2 в представлении (3.1), выражение для которой при учете соотношений (1.1), (1.7) и (3.2) запишем в виде

$$F_2 = (\mathbf{F}e) = q(c_p(\alpha) - tc_\tau(\alpha)) \iint_S (\mathbf{n}e) dS$$

Так как на перпендикулярном оси Ox основании тела $(\mathbf{n}e) = 0$, в последнем выражении интеграл по "наветренной" части тела S можно заменить интегралом по всей его поверхности. Применив к нему формулу Гаусса – Остроградского и учтя постоянство вектора e , найдем, что этот интеграл, а вместе с ним и компонента силы F_2 равны нулю.

Таким образом, если тело обладает кусочно-гладкой поверхностью, на которой выполнены условия (1.3), и α – постоянная величина, то в рамках модели локального взаимодействия, независимо от вида функций (1.4), сила, действующая на тело при его движении вдоль оси Ox , не имеет составляющей в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Полученный результат не зависит от конкретного значения α . Это, в частности, означает, что тела с любым коническим продольным контуром, поперечные сечения 1 и 2 которых изображены на фиг. 1, при движении вдоль оси Ox не испытывают подъемной и боковых сил.

4. Заключение. При заданных длине и площади основания тела с использованием условия оптимальности (1.7) развита методика построения пространственных форм минимального сопротивления, позволяющая строить оптимальные тела разной конфигурации, в том числе неконические и несимметричные. Она основана на непрерывном сопряжении участков поверхности нескольких конических тел, удовлетворяющих условию (1.7). Способ построения конических тел при задании разных условий на их геометрию известен [1], и их поверхность состоит из участков поверхности кругового конуса с углом раствора $\beta = 2 \arcsin(\alpha^*)$ и касающихся его плоскостей. В результате из таких же участков составляется поверхность нового тела, но оно может быть неконическим и несимметричным. Все построенные тела имеют одинаковое сопротивление

F_1^* , меньше которого при заданной площади основания получить нельзя. Как и ранее [1], класс таких тел назван абсолютно оптимальным (АОТ). Доказано, что сила, действующая на оптимальное тело, даже при отсутствии у него симметрии не имеет составляющей в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Рассмотрены примеры построения тел минимального сопротивления, демонстрирующие возможности методики получения оптимальных форм, когда на геометрию тела наложены дополнительные ограничения. Показано, что ее можно использовать для построения АОТ заданной длины, когда дана форма основания тела в виде круга.

На первый взгляд, весьма близки к решениям, полученным выше, были авторы более ранних работ [3, 4]. В предположении, что давление задается формулой Ньютона, а трение постоянно [3] или отсутствует [4], они искали поверхность тела минимального сопротивления $x = x(y, z)$, проходящую через заданный контур основания. При отсутствии трения [4] (см. также [5]) предполагалось, что площадь поверхности тела S ограничена некоторой постоянной S^* . При произвольной длине тела было найдено [3–5] условие для оптимальной поверхности, аналогичное условию оптимальности (1.7). Оно было дано в виде дифференциального уравнения в частных производных

$$x_y^2 + x_z^2 = \text{const} \quad (4.1)$$

Так как $\alpha = 1/[1 + x_y^2 + x_z^2]^{1/2}$, то уравнение (4.1) эквивалентно условию постоянства α (1.7). При вычислении постоянной в (4.1) были получены выражения (в обозначениях настоящей работы): $(1/t^*)^2$ [3] и $((S^*/S_b)^2 - 1)$ [4, 5]. Несмотря на это, результаты, полученные выше, а также в [1], с одной стороны, и результаты [3–5], – с другой, различаются принципиально.

Искомая интегральная поверхность [4, 5] уравнения (4.1) строилась как поверхность постоянного ската, а оптимальная поверхность в [3] дана в параметрическом виде как решение уравнения (4.1), полученное стандартным методом характеристических полос [6]. Этот метод при интегрировании уравнения (4.1) для получения замкнутой поверхности тела, проходящей через заданный контур основания, можно использовать для кусочно-гладкого контура, но только если в точках излома внутренний угол сопряжения дуг меньше 180° . В противном случае характеристические полосы расходятся и замкнутой поверхности не получается. Замкнуть ее можно, используя поверхность характеристического коноида с вершиной в точке излома, которым для уравнения (4.1) является круговой конус с $\beta = 2 \arcsin(\alpha^*)$, но длина тела при этом может стать много больше допустимой.

Сравнивая решения, полученные выше, с решением, предложенным в [3], заметим, что, используя последнее, можно построить конические звездообразные АОТ, если их контур основания выпуклый. Однако, если контур основания АОТ вогнутый, как, например, у тел, поперечные контуры которых изображены на фиг. 1 и 2, или как у звездообразных АОТ [1] при выполнении условия (2.3) в виде строгого неравенства, то построить коническое АОТ методом, который использовался в [3], нельзя.

Наиболее ярко разница в решениях видна при построении оптимального тела, имеющего форму основания в виде круга. В этом случае метод характеристических полос позволяет проинтегрировать уравнение (4.1) и получить единственное решение [7]. Это поверхность кругового конуса с углом при вершине $\beta = 2 \arcsin(\alpha^*)$. Построение оптимальной поверхности, как поверхности постоянного ската [4, 5], дает в этом случае тот же результат с $\alpha^* = S_b/S^*$. Однако, как показано выше, в классе кусочно-гладких функций $x = x(y, z)$ существует бесконечное множество решений, определяющих поверхность тела, на гладких участках которой выполнено условие (4.1). Пример такой поверхности дан на фиг. 3 в виде формы 3.

Таким образом, показано, что большинство решений задачи о форме тела минимального сопротивления, полученных выше и ранее [1], не могут быть построены

методом характеристических полос [6, 7], который использовался в [3], или как поверхности постоянного ската [4, 5]. Получить их удалось благодаря особым свойствам уравнения (4.1), для которого круговой конус с углом при вершине $\beta = 2 \arcsin(\alpha^*)$ и осью, направленной по Ox , является характеристическим коноидом. Все касающиеся его плоскости являются интегральными поверхностями уравнения (4.1), и это дало возможность использовать их участки для построения оптимальных тел. Выше данное свойство конуса и плоскостей положено в основу методики получения АОТ.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований уменьшения сопротивления поликлиновых и пирамидальных тел, среди которых есть формы по структуре, близкие к АОТ, и обзор которых дан [8] для разных сред, подтверждают целесообразность перехода к таким формам при скоростях движения тела в среде порядка 10^2 – 10^3 м/с. Однако следует заметить, что вывод [8] о том, что прерогатива решения задачи о пространственной форме тела минимального сопротивления в рамках локальных теорий принадлежит численным методам и получить его можно только путем сужения класса допустимых поверхностей, опровергается результатами настоящей работы. При заданных длине и площади основания тела методика получения АОТ позволяет строить пространственные конфигурации минимального сопротивления в классе кусочно-гладких поверхностей без использования численных методов.

В заключение отметим, что оптимизация формы тела и расчет силовых характеристик проведены выше в рамках модели локального взаимодействия, которая не учитывает вторичных столкновений частиц среды с телом и их взаимодействий друг с другом после отражения от его поверхности. Однако такие столкновения и взаимодействия обязательно будут, если поверхность тела имеет линии излома. В этом случае требуется дополнительное исследование силовых характеристик тел на основе эксперимента и более строгой теории [2].

Автор благодарит А.Н. Крайко за обсуждение результатов и замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01211 и 00-15-99039).

ЛИТЕРАТУРА

1. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 299–310.
2. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
3. Hall D.G., Miele A. Three-dimensional configurations of minimum total drag // Theory of Optimum Aerodynamic Shapes / Ed. Miele A. N.Y.: Academic, 1965. P. 316–333 = Miele A., Халл Д. Трехмерные тела минимального полного сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. Миеле А. М.: Мир, 1969. С. 326–347.
4. Бердичевский В.Л. О форме тела минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке газа // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1975. № 3. С. 90–96.
5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
6. Tricomi F.G. Lezioni sulle equazioni a derivate parziali. Editrice Gheroni Torino, 1954. = Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 443 с.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. 296 с.
8. Ведерников Ю.А., Щепановский В.А. Оптимизация реогазодинамических систем. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995. 238 с.

Москва
e-mail: galina_yakunina@mail.ru

Поступила в редакцию
17.II.2000