

УДК 533.72

© 2000 г. В.С. Галкин

УРАВНЕНИЯ БАРНЕТТА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

При помощи системы кинетических уравнений в квазиклассическом сферически-симметричном приближении получены уравнения Барнетта для многокомпонентной смеси газов при наличии внешних сил, не зависящих от скоростей и внутренних энергий молекул, для случая легких обменов поступательной и внутренней энергиями молекул в одножидкостном представлении, когда система газодинамических уравнений состоит из уравнений для концентраций химических компонентов, среднемассовой скорости и средней температуры. Найдены точные и приближенные формулы для барнеттовых коэффициентов переноса. Рассмотрены частные случаи, в том числе вопрос об общих уравнениях термо- и концентрационно-стрессовой конвекции.

Вывод уравнений Барнетта (см. обзор [1] и последние работы [2, 3]) в основном проводился для простого газа [4, 5]. Наиболее полный вывод выражений для барнеттовых переносных свойств многокомпонентных смесей одноатомных газов, т.е. газов из молекул с замороженными внутренними степенями свободы [6]¹, ниже уточняется и обобщается, результаты представлены в более эффективной форме, получены как точные, так и приближенные "рабочие" выражения.

1. Исходные соотношения. Используемая здесь система кинетических уравнений имеет вид [5, 7, 8]

$$\frac{\partial f_{\Omega}}{\partial t} + \xi_{i\alpha} \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial r_{\alpha}} + \frac{F_{i\alpha}}{m_i} \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial \xi_{i\alpha}} = L_{\Omega}(f f) \quad (1.1)$$

Здесь $f_{\Omega} = f(\xi_i, E_{\Omega}, \mathbf{r}, t)$ – число молекул i -го химического сорта во внутреннем состоянии Ω в момент времени t в элементе объема фазового пространства $(\mathbf{r}, \xi_i)$; ξ_i , m_i – скорость и масса молекулы, E_{Ω} – ее внутренняя энергия, $\Omega = i\omega$; L_{Ω} – оператор упругих и неупругих бинарных столкновений; $i, j = 1, 2, \dots, S$, где S – число химических компонентов; нижними индексами α, β, γ вводятся компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$, применяются обычные правила суммирования по повторяющимся индексам.

Метод Чепмена–Энскога дает разложение

$$f_{\Omega} = f_{\Omega}^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{\Omega}^{(m)} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_{\Omega}^{(m)}, \quad \Phi_{\Omega}^{(0)} = 1, \quad f_{\Omega}^{(0)} = Y_{\Omega} f_i^{(0)}$$

$$f_i^{(0)} = n x_i \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-w_i^2), \quad x_i = \frac{n_i}{n}, \quad w_i^2 = \frac{m_i c_i^2}{2kT} \quad (1.2)$$

$$Y_{\Omega}(T) = \frac{g_{\Omega}}{Q_i} \exp(-\epsilon_{\Omega}), \quad Q_i = \sum_{\omega} g_{\Omega} \exp(-\epsilon_{\Omega}), \quad \epsilon_{\Omega} = \frac{E_{\Omega}}{kT}$$

¹ См. также: Шавалиев М.Ш. Явления переноса в газовых смесях в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Новосибирск, 1978. 162 с.

В (1.2) собственные скорости молекул $c_i = \xi_i - u$, g_Ω – вырождение Ω -уровня. В дальнейшем используются следующие операции с $Y_\Omega(T)$:

$$\begin{aligned} \frac{dY_\Omega}{dT} &= \frac{Y_\Omega}{T} \Delta\epsilon_\Omega, \quad \Delta\epsilon_\Omega = \epsilon_\Omega - \langle \epsilon_\Omega \rangle_c, \quad \langle N \rangle_c = \sum_\omega N Y_\Omega \\ \sum_\omega \epsilon_\Omega \frac{dY_\Omega}{dT} &= \frac{c_v}{kT}, \quad \langle (\Delta\epsilon_\Omega)^2 \rangle_c = \frac{c_v}{k}, \quad \frac{d(\Delta\epsilon)^2}{dT} = -\frac{\Delta\epsilon_\Omega}{T} - \frac{c_v}{kT} \\ c_v^* &= 1 + \frac{2}{3k} c_v, \quad c_v = \sum_i x_i c_{vi}, \quad E_i^* = kT \left(\frac{3}{2} + \langle \epsilon_\Omega \rangle_c \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и ниже под N понимается любая величина, на которую действует рассматриваемый оператор, $\langle \epsilon_\Omega \rangle_c$ – средняя внутренняя энергия молекул i -го сорта, c_v – теплоемкость из-за внутренних степеней свободы при постоянном объеме.

Разложение (1.2) позволяет замкнуть систему газодинамических уравнений, имеющих в случае легких обменов вид [7, 8]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla u = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha}, \quad \nabla u = \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} \quad (1.4)$$

$$n \frac{Dx_i}{Dt} + \frac{\partial J_{i\alpha}}{\partial r_\alpha} - x_i \sum_{j=1}^S \frac{\partial J_{j\alpha}}{\partial r_\alpha} = 0, \quad n = \sum_{i=1}^S n_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^S m_i n_i \quad (1.5)$$

$$\rho \frac{Du_\alpha}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} = \sum_{i=1}^S n_i F_{i\alpha}, \quad \tau_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

$$\frac{3}{2} n k c_v^* \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} + (p\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} - \sum_{i=1}^S \left[J_{i\alpha} F_{i\alpha} + E_i^* \frac{\partial J_{i\alpha}}{\partial r_\alpha} \right] = 0, \quad p = nkT \quad (1.7)$$

В (1.7) использованы те же обозначения, что в (1.3). Система (1.5) содержит $S - 1$ уравнений. Газодинамические переменные вычисляются по формулам

$$n_i = (f_\Omega)_* = (f_\Omega^{(0)})_*, \quad (N)_* = \sum_\omega \int N dc_i \quad (1.8)$$

$$u = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^S (m_i \xi_i f_\Omega)_* = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^S (m_i \xi_i f_\Omega^{(0)})_* \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^S x_i \langle \epsilon_\Omega \rangle_c \right) kT = \frac{1}{n} \sum_i (U f_\Omega)_* = \frac{1}{n} \sum_i (U f_\Omega^{(0)})_*, \quad U = \frac{1}{2} m_i c_i^2 + E_\Omega \quad (1.10)$$

Формула (1.10) определяет среднюю температуру T . В силу (1.8)–(1.10) возмущения $\varphi^{(r)}$, $r \geq 1$ не дают вклада в плотности, среднемассовую скорость и среднюю энергию. Соответствующие вклады в переносные свойства, т.е. диффузионную скорость V_i , скалярную и бездивергентную составляющие напряжений Π и $\pi_{\alpha\beta}$, тепловой поток q , даются формулами

$$\begin{aligned} J_i^{(r)} &\equiv n_i V_i^{(r)} = (c_i f_\Omega^{(r)})_*, \quad q^{(r)} = \sum_{i=1}^S (c_i U f_\Omega^{(r)})_*, \quad r \geq 1 \\ \Pi^{(r)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^S (c_i^2 f_\Omega^{(r)})_*, \quad \pi_{\alpha\beta}^{(r)} = \sum_{i=1}^S \left(\left[c_{i\alpha} c_{i\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} c_i^2 \right] f_\Omega^{(r)} \right)_* \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.11) использованы обозначения из (1.2), (1.8), (1.10).

Поправка первого приближения, соответствующая приближению Навье – Стокса, ищется в виде

$$f_{\Omega}^{(1)} = -\frac{1}{n} f_{\Omega}^{(0)} \left(A_{\Omega} c_{i\alpha} \frac{\partial \ln T}{\partial r_{\alpha}} + B_{\Omega} c_{i\alpha} c_{i\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^S D_{\Omega}^j c_{i\alpha} d_{j\alpha} + \Gamma_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \right) \equiv \\ \equiv A'_{\Omega} c_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_{\alpha}} + B'_{\Omega} c_{i\alpha} c_{i\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^S D'^j_{\Omega} c_{i\alpha} d_{j\alpha} + \Gamma'_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \quad (1.12)$$

Для краткости под приближением Навье–Стокса понимаем линейные приближения для переносных свойств, а под уравнениями Навье–Стокса – соответствующую полную систему уравнений сохранения [1]. Структура решения (1.12) отличается от принятой ранее [6–8] третьим слагаемым, для определения которого применена более эффективная методика [5]. Используются обозначения

$$d_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial r_{\alpha}} + \left(x_i - \frac{\rho_i}{\rho} \right) \frac{\partial \ln p}{\partial r_{\alpha}} - \frac{x_i}{kT} \left(F_{i\alpha} - \frac{m_i}{\rho} \sum_{j=1}^S n_j F_{j\alpha} \right) \\ e_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} \right\rangle, \quad \langle N_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} N_{\gamma\gamma} \quad (1.13)$$

Функции A, B, D, Γ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{n} f_{\Omega}^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}(w_i^2) + \Delta \epsilon_{\Omega}) c_{i\alpha} = -R_{\Omega}(A c_{\alpha}) \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{n} f_{\Omega}^{(0)} 2 \langle w_{i\alpha} w_{i\beta} \rangle = -R_{\Omega}(B \langle c_{\alpha} c_{\beta} \rangle) \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{n} f_{\Omega}^{(0)} c_{i\alpha} \left(\delta_{ik} - \frac{\rho_i}{\rho} \right) = -R_{\Omega}(D^k c_{\alpha}) \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{n} f_{\Omega}^{(0)} \frac{2}{3 c_{vi}^*} \left(\frac{2}{3} \frac{c_{vi}}{k} S_{1/2}^{(1)}(w_i^2) + \Delta \epsilon_{\Omega} \right) = R_{\Omega}(\Gamma) \quad (1.17)$$

Здесь $i, j, k = 1, 2, \dots, S$, $R_{\Omega}(N)$ – отнесенный к n^2 линеаризованный оператор столкновений [5, 7, 8].

Из (1.14)–(1.17) видно, что A, B, D, Γ зависят от $w_i^2, \epsilon_{\Omega}, T, x_i$ и не зависят от n (последнее не было учтено ранее [6]).

Решения системы уравнений (1.14)–(1.17) обычно ищутся в виде рядов по полиномам Сонина $S_m^{(n)}(w_i^2)$ и по полиномам, обусловленным ϵ_{Ω} ,

$$A_{\Omega} = -\frac{2}{5} \frac{m_i}{k^2 T x_i} \left[-\frac{5}{2} k n_i D_{Ti} + \lambda'_{ii} S_{3/2}^{(1)}(w_i^2) - \frac{5}{2} \lambda_{vi} \frac{k}{c_{vi}} \Delta \epsilon_{\Omega} + \dots \right] \\ B_{\Omega} = \frac{m_i \eta_i}{(kT)^2 x_i} + \dots, \quad D_{\Omega}^j = \frac{m_i}{kT} \left[n D_{ij} + \gamma_i^j S_{3/2}^{(1)}(w_i^2) + \dots \right] \\ \Gamma_{\Omega} = -\zeta_i (x_i kT)^{-1} \left[S_{1/2}^{(1)}(w_i^2) + \sigma_i \Delta \epsilon_{\Omega} + \dots \right] \quad (1.18)$$

В (1.18) $\eta_i, \zeta_i, \lambda'_{ii}, \lambda_{vi}$ – парциальные коэффициенты сдвиговой (динамической) и объемной вязкости, поступательной и внутренней теплопроводности, D_{ij}, D_{Ti} – коэффициенты диффузии и термодиффузии многокомпонентной смеси многоатомных газов (например, коэффициент сдвиговой вязкости смеси $\eta = \sum_i \eta_i$).

Систему уравнений для определения барнеттовых возмущений $\phi_{\Omega}^{(2)}$ запишем в виде

$$M_{\Omega} = n^2 R_{\Omega}(\phi^{(2)}), \quad M_{\Omega} = \frac{\partial_1 f_{\Omega}^{(0)}}{\partial t} + H_{\Omega} - L_{\Omega}(f^{(1)} f^{(1)}) \quad (1.19)$$

Неоднородная часть интегрального уравнения (1.19) M_{Ω} включает группу членов H_{Ω} , содержащих производные от $f_{\Omega}^{(1)}$, которую удобно выразить через собственные скорости молекул [4, 5]

$$H_{\Omega} = \frac{D_0 f_{\Omega}^{(1)}}{Dt} + c_{i\alpha} \frac{\partial f_{\Omega}^{(1)}}{\partial r_{\alpha}} + Z_{i\alpha} \frac{\partial f_{\Omega}^{(1)}}{\partial c_{i\alpha}} - c_{i\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} \frac{\partial f_{\Omega}^{(1)}}{\partial c_{i\alpha}} \quad (1.20)$$

$$Z_{i\alpha} = \sum_{j=1}^s \left(\delta_{ij} - \frac{\rho_j}{\rho} \right) \frac{F_{j\alpha}}{m_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_{\alpha}}, \quad \frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial_0}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}}$$

В (1.19), (1.20) использовано разложение $\partial/\partial t = \partial_0/\partial t + \partial_1/\partial t + \dots$

Это разложение – принципиальная особенность метода Чепмена – Энскога, однако в ряде руководств по кинетической теории при описании общего алгоритма метода оно не упоминается [9, 10]. Более того, неточности при изложении общего алгоритма были допущены даже в известных руководствах [4, 5] для случая нестационарных внешних сил. В соответствующих разделах [4, 5] нужно было бы написать, что $f^{(m)}$ зависит от $\mathbf{r}, t$ не только через газодинамические переменные, но и через $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, t)$, начиная с $f^{(2)}$ для простого газа и $f^{(1)}$ для смеси газов. Можно показать, что требования метода удовлетворяются, если разлагаются частные производные по времени от газодинамических переменных и не разлагаются частные производные по времени от известных функций $F_{i\alpha}(\mathbf{r}, t)$, т.е. можно применять известный общий алгоритм метода Чепмена–Энскога с дополнительными определениями:

$$\frac{\partial_0 \mathbf{F}_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial_n \mathbf{F}_i}{\partial t} = 0, \quad n \geq 1$$

Тогда, например, получаем

$$\begin{aligned} \frac{D_0 d_{i\alpha}}{Dt} = & \left(x_i - \frac{m_i n}{\rho} \right) \frac{D_0}{Dt} \frac{\partial \ln p}{\partial r_{\alpha}} + \frac{x_i}{kT^2} \left(F_{i\alpha} - m_i \sum_{j=1}^s \frac{n_j}{\rho} F_{j\alpha} \right) \frac{D_0 T}{Dt} - \\ & - \frac{x_i}{kT} \left(\frac{DF_{i\alpha}}{Dt} - m_i \sum_{j=1}^s \frac{n_j}{\rho} \frac{DF_{j\alpha}}{Dt} \right) - \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \frac{\partial x_i}{\partial r_{\beta}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для вычисления рассматриваемых производных от газодинамических переменных из уравнений (1.4)–(1.7) находим

$$\begin{aligned} \frac{D_0 \rho}{Dt} = -\rho \nabla \mathbf{u}, \quad \frac{D_0 x_i}{Dt} = 0, \quad \frac{D_0 u_{\alpha}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial r_{\alpha}} + \sum_{i=1}^s n_i F_{i\alpha} \right) \\ \frac{D_0 T}{Dt} = -\frac{2T}{3c_v^*} \nabla \mathbf{u}, \quad \frac{\partial_1 \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial_1 x_i}{\partial t} = \frac{1}{n} \left(-\frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} J_{i\alpha}^{(1)} + x_i \sum_{j=1}^s \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} J_{j\alpha}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

и т.п. Аналогично [4] получаем D_0/Dt от различных комбинаций пространственных производных, в частности,

$$\frac{D_0 \nabla \mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^s n_j F_{j\alpha} - \frac{\partial p}{\partial r_{\alpha}} \right) - \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} \quad (1.23)$$

В итоге M_{Ω} выражаются через известные величины. Как известно, для барнеттовых переносных свойств знание $\phi_{\Omega}^{(2)}$ необязательно.

Используя свойства симметрии оператора $R_\Omega(\varphi)$, уравнения (1.14)–(1.17), условия отсутствия вкладов $\varphi_\Omega^{(2)}$ в (1.8)–(1.10), аналогично [4, 5] найдем следующую формулу для барнеттовых вкладов в переносные свойства:

$$(\pi_{\alpha\beta}^{(2)}; \Pi^{(2)}; V_{k\alpha}^{(2)}; h_\alpha^{(2)}) = -\frac{p}{n^2} \sum_\Omega \int \left(B_\Omega \langle c_{i\alpha} c_{i\beta} \rangle; \Gamma_\Omega; \frac{1}{p} D_\Omega^k c_{i\alpha}; A_\Omega c_{i\alpha} \right) M_\Omega d\mathbf{c}_i \quad (1.24)$$

Таким образом, каждое из переносных свойств выражается через суммы интегралов по $\mathbf{c}_i$ от M_Ω с соответствующим весом. Приведенный тепловой поток по определению равен

$$h_\alpha = q_\alpha - kT \sum_{i=1}^S \left(\frac{5}{2} + \langle \epsilon_\Omega \rangle_c \right) J_{i\alpha} \quad (1.25)$$

2. Вклады приближения Барнетта в переносные свойства. Для определения вкладов применяется методика [4], отличие обусловлено учетом x_i , Y_Ω (1.3). Используя формулы (1.12), (1.18)–(1.25), после проведения аналогичных [4] громоздких выкладок находим

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta}^{(2)} = & (\xi_1 + \xi_1^*) e_{\alpha\beta} \nabla \mathbf{u} + \xi_2 \left\langle \left[\frac{1}{\rho} \left(\sum_k n_k F_{k\beta} - p_{,\beta} \right) \right]_{,\alpha} - 2u_{\gamma,\alpha} e_{\gamma\beta} - u_{\gamma,\beta} u_{\alpha,\gamma} \right\rangle + \\ & + (\xi_3 + \xi_3^*) \langle e_{\alpha\gamma} e_{\gamma\beta} \rangle + \xi_4 \langle T_{,\alpha\beta} \rangle + (\xi_5 + \xi_5^*) \langle T_{,\alpha} T_{,\beta} \rangle + \sum_k \{ \xi_{6k} \langle Z_{k\alpha} T_{,\beta} \rangle + \xi_{7k} \langle d_{k\beta,\alpha} \rangle + \\ & + \langle T_{,\alpha} [\xi_{8k} x_{k,\beta} + (\xi_{9k} + \xi_{9k}^*) d_{k\beta}] \rangle + \sum_{kl} \langle d_{k\alpha} (\xi_{10kl} Z_{l\beta} + \xi_{11kl} x_{l,\beta} + \xi_{12kl}^* d_{l\beta}) \rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

В (2.1) использованы символы из (1.13), (1.20), суммирование по k, l проводится от 1 до S . Для сокращения объема здесь и ниже применяются следующие обозначения для пространственных производных:

$$u_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial r_\beta \partial r_\gamma}, \quad (T_{,\alpha} T_{,\beta})_{,\gamma} = \frac{\partial}{\partial r_\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \right) \quad (2.2)$$

и т.п. Коэффициенты со звездочкой определяются моментами от $L_\Omega(f^{(1)} f^{(1)})$, без звездочки – конвективной частью

$$\begin{aligned} \xi_1 = & -\frac{2}{3} \left\{ \frac{T}{c_v^*} \frac{\partial B'_\Omega}{\partial T} + c_i^2 \frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2} + 3 \frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial c_i^2} \right\}_\eta \approx \sum \frac{4}{3} \frac{\eta_i^2}{p_i} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{c_v^*} \partial_T \eta_i + \frac{3}{2} \frac{\zeta_i}{\eta_i} \right) \\ \xi_2 = & \{B'_\Omega\}_\eta \approx \sum \frac{2\eta_i^2}{p_i}, \quad \xi_3 = -\frac{8}{7} \left\{ c_i^2 \frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2} \right\}_\eta \approx 4\xi_2 \\ \xi_4 = & \{A'_\Omega\}_\eta \approx \sum \frac{4}{5} \frac{\eta_i}{p_i} \psi_i, \quad \xi_5 = \left\{ \frac{\partial A'_\Omega}{\partial T} \right\}_\eta \approx \sum \frac{4}{5} \frac{\eta_i}{p_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial T}, \quad \psi_i = \lambda'_{ii} + \frac{5}{2} n_i k D_{Ti} \\ \xi_{6k} = & 2 \left\{ \frac{\partial A'_\Omega}{\partial c_i^2} \delta_{ik} \right\}_\eta \approx -\sum \frac{2p_i \eta_i}{p_i T} D_{Ti} \delta_{ik} \\ \xi_{7k} = & \{D_\Omega'^k\}_\eta \approx \sum 2\eta_i \chi_{ik}, \quad \chi_{ik} = D_{ik} - \frac{1}{n} \gamma_i^k \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\xi_{8k} &= \left\{ \frac{\partial A'_\Omega}{\partial x_k} \right\}_\eta \approx \sum \frac{4}{5} \frac{\eta_i}{p_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \\ \xi_{9k} &= \left\{ \frac{\partial D'_\Omega}{\partial T} \right\}_\eta \approx \sum \frac{2\eta_i}{T} D_{ik} \left[1 + \partial_T D_{ik} - \frac{\gamma_i^k}{n D_{ik}} (1 + \partial_T \gamma_i^k) \right] \\ \xi_{10kl} &= 2 \left\{ \frac{\partial D'_\Omega}{\partial c_i^2} \delta_{il} \right\}_\eta \approx - \sum \frac{2m_i}{kT} \eta_i D_{ik} \delta_{il} \\ \xi_{11kl} &= \left\{ \frac{\partial D'_\Omega}{\partial x_l} \right\}_\eta \approx \sum \frac{2\eta_i}{n_i} \frac{\partial n_i \chi_{ik}}{\partial x_l}\end{aligned}$$

В (2.3) A'_Ω и т.п. введены формулой (1.12) аналогично [4], δ_{ik} — единичный тензор. По определению

$$\begin{aligned}\{N\}_\eta &\equiv - \sum_\Omega \frac{8}{15} \frac{(kT)^3}{m_i^2 n} \int B_\Omega N w_i^4 d\mathbf{c}_i \\ \partial_T N &= \frac{\partial \ln N}{\partial \ln T}, \quad \sum = \sum_{i=1}^S, \quad p_i = n_i kT\end{aligned}\tag{2.4}$$

Здесь и ниже первые выражения для коэффициентов (записанные через $\{N\}_\eta$ и т.д.) являются точными, вторые — приближенными, полученными с учетом приведенных в (1.18) слагаемых разложений по полиномам. Фигурирующие в (1.18) коэффициенты переноса можно считать точными или соответствующими данному приближению по полиномам. Окончательный выбор может быть сделан только после проведения сравнительных расчетов. В [6] удержано меньше членов разложений, чем в (1.18), что не дает возможности получать ненулевые приближенные выражения для всех коэффициентов переноса.

При записи переносных свойств сначала выписывается группа слагаемых, при $S = 1$ переходящих в слагаемые для простого газа (с коэффициентами $\xi_1 + \xi_6$), затем диффузионные члены, равные нулю при $S = 1$ ($\xi_{7k} + \xi_{12kl}^*$), после чего слагаемые, обусловленные только многоатомностью. В (2.1) последние отсутствуют, многоатомность непосредственно влияет лишь на ξ_1 , ξ_1^* . Вектор $\mathbf{Z}_i$ можно выразить [6] через $\mathbf{d}_i$ с помощью (1.13), (1.20), однако при этом нарушается описанная последовательность. Отметим, что при $S = 1$ $Z_{i\alpha} = \rho^{-1} p_{,\alpha}$. Используя свойства изотропных тензоров при проведении сверток, найдем

$$\begin{aligned}\xi_1^* &= \frac{1}{5} \{b_{\alpha\beta} \Gamma + \Gamma b_{\alpha\beta}\}_\eta^*, \quad \xi_3^* = \frac{12}{35} \left\{ \langle b_{\beta\gamma} b_{\gamma\alpha} + b_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \rangle \right\}_\eta^*, \quad \xi_5^* = \frac{1}{5} \left\{ \langle a_\alpha a_\beta \rangle \right\}_\eta^* \\ \xi_{9k}^* &= \frac{1}{5} \left\{ \langle a_\alpha d_\beta^k + d_\alpha^k a_\beta \rangle \right\}_\eta^*, \quad \xi_{12kl}^* = \frac{1}{5} \left\{ \langle d_\alpha^k d_\beta^l \rangle \right\}_\eta^*\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$a_{\Omega\alpha} \equiv A_\Omega c_{i\alpha}, \quad b_{\Omega\alpha\beta} \equiv B_\Omega \langle c_{i\alpha} c_{i\beta} \rangle, \quad d_{\Omega\alpha}^k \equiv D_\Omega^k c_{i\alpha}$$

В (2.5) применяется оператор

$$\{HN\}_\eta^* = \frac{kT}{n^3} \sum_\Omega \int b_{\Omega\alpha\beta} L_\Omega^* (HN) d\mathbf{c}_i, \quad L_\Omega^* (n\phi^{(1)} n\phi^{(1)}) = n^2 L_\Omega (f^{(1)} f^{(1)})\tag{2.6}$$

В (2.6) H относится к классу Ω -частиц, N — к другому классу Ψ -частиц, по индексу $\Psi = j\psi$ в L проводится суммирование. Приближенные выражения для ξ^* и т.д. получены ниже, в разд. 3.

Для вклада в скалярную часть тензора напряжений найдем

$$\begin{aligned}
\Pi^{(2)} &= (\omega_1 + \omega_1^*) e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} + \omega_2 \nabla^2 T + (\omega_3 + \omega_3^*) (\nabla T)^2 + (\omega_4 + \omega_4^*) (\nabla \mathbf{u})^2 + \\
&+ \omega_5 \frac{D_0 \nabla \mathbf{u}}{Dt} + \sum_k \{ [\omega_{6k} Z_{k\alpha} + \omega_{7k} x_{k,\alpha} + (\omega_{8k} + \omega_{8k}^*) d_{k\alpha}] T_{,\alpha} + \omega_{9k} \nabla \mathbf{d}_k \} + \\
&+ \sum_{kl} [\omega_{10kl} Z_{l\alpha} + \omega_{11kl} x_{l,\alpha} + \omega_{12kl}^* d_{l\alpha}] d_{k\alpha} \\
\omega_1 &= -2 \left\{ B'_\Omega + \frac{2}{5} c_i^2 \frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2} \right\}_\omega \approx \sum \frac{2}{p_i} \eta_i \zeta_i \\
\omega_2 &= \{A'_\Omega\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i}{p_i} (\lambda'_{ii} - \sigma_i \lambda_{vi} + n_i k D_{Ti}) \\
\omega_3 &= \left\{ \frac{\partial A'_\Omega}{\partial T} \right\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i}{p_i} \left\{ \frac{\partial \lambda'_{ii}}{\partial T} + n_i k T^{-3/2} \frac{\partial}{\partial T} (D_{Ti} T^{3/2}) - \right. \\
&\left. - \frac{\sigma_i}{T} c_{vi} \left[n_i D_{Ti} + T^3 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\lambda_{vi}}{c_{vi}} T^{-2} \right) \right] - \lambda_{vi} \frac{\sigma_i k}{c_{vi} T} \langle (\Delta \varepsilon_\Omega)^3 \rangle_c \right\} \\
\omega_4 &= -2 \left\{ \frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial c_i^2} + \frac{T}{c_v^* c_i^2} \frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial T} \right\}_\omega \approx \\
&\approx \sum \frac{\zeta_i^2}{p_i} \left\{ \frac{5}{2} + \sigma_i^2 \frac{c_{vi}}{k} - \frac{2}{3 c_v^*} \left[\frac{3}{2} \partial_T \zeta_i + \sigma_i^2 \frac{c_{vi}}{k} (\partial_T (\zeta_i \sigma_i) - 2) + \sigma_i^2 \langle (\Delta \varepsilon_\Omega)^3 \rangle_c \right] \right\} \\
\omega_5 &= \left\{ \frac{3}{c_i^2} \Gamma'_\Omega \right\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i^2}{p_i} \left(\frac{3}{2} + \sigma_i^2 \frac{c_{vi}}{k} \right) \\
\omega_{6k} &= 2 \left\{ \left(\frac{\partial A'_\Omega}{\partial c_i^2} + \frac{3}{2 c_i^2} A'_\Omega \right) \delta_{ik} \right\}_\omega \approx - \sum \frac{\rho_i \zeta_i}{p_i T} D_{Ti} \delta_{ik} \\
\omega_{7k} &= \left\{ \frac{\partial A'_\Omega}{\partial x_k} \right\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i}{p_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\lambda'_{ii} + n_i k D_{Ti}) - \sigma_i \frac{\partial \lambda_{vi}}{\partial x_k} \right] \\
\omega_{8k} &= \left\{ \frac{\partial D'_\Omega^k}{\partial T} \right\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i}{T} \left[D_{ik} \left(\frac{5}{2} + \partial_T D_{ik} - \sigma_i \frac{c_{vi}}{k} \right) - \frac{5}{2n} \gamma_i^k (1 + \partial_T \gamma_i^k) \right] \\
\omega_{9k} &= \{D'_\Omega^k\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i}{n_i} l_{ik}, \quad l_{ik} = n_i D_{ik} - \frac{5}{2} x_i \gamma_i^k \\
\omega_{10kl} &= 2 \left\{ \left(\frac{\partial D'_\Omega^k}{\partial c_i^2} + \frac{3}{2 c_i^2} D'_\Omega^k \right) \delta_{il} \right\}_\omega \approx - \sum \frac{\rho_i \zeta_i}{p_i} D_{ik} \delta_{il} \\
\omega_{11kl} &= \left\{ \frac{\partial D'_\Omega^k}{\partial x_l} \right\}_\omega \approx \sum \frac{\zeta_i}{n_i} \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_l} \\
\omega_1^* &= \frac{1}{5} \{b_{\alpha\beta} b_{\beta\alpha}\}_\omega^*, \quad \omega_3^* = \frac{1}{3} \{a_\alpha a_\alpha\}_\omega^*, \quad \omega_4^* = \{\Gamma \Gamma\}_\omega^* \\
\omega_{8k}^* &= \frac{1}{3} \{a_\alpha d_\alpha^k + d_\alpha^k a_\alpha\}_\omega^*, \quad \omega_{12kl}^* = \frac{1}{3} \{d_\alpha^k d_\alpha^l\}_\omega^*
\end{aligned}$$

Использованы обозначения из (2.5), вместо (2.4), (2.6) введены операторы

$$\{N\}_\omega = -\frac{2}{3n} k^2 T^2 \sum_\Omega \int \frac{N}{m_i} \Gamma_\Omega w_i^2 d\mathbf{c}_i, \quad \{HN\}_\omega^* = \frac{kT}{n^3} \sum_\Omega \int \Gamma_\Omega L_\Omega^* (HN) d\mathbf{c}_i \quad ($$

Вклад в приведенный тепловой поток имеет вид

$$\begin{aligned} h_\alpha^{(2)} = & (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} + \gamma_1^*) T_{,\alpha} \nabla \mathbf{u} + 2\gamma_2 \left[\left(\frac{T}{3c_v^*} \nabla \mathbf{u} \right)_{,\alpha} + u_{\beta,\alpha} T_{,\beta} \right] + \\ & + \left[\sum_k \gamma_{3k} Z_{k\beta} + (\gamma_4^{(1)} + \frac{6}{5} \gamma_1^{(2)} + \gamma_4^*) T_{,\beta} \right] e_{\beta\alpha} + \gamma_5 e_{\alpha\beta,\beta} + \\ & + \sum_k \left\{ (\gamma_{6k}^{(1)} + \gamma_{6k}^{(2)} + \gamma_{6k}^*) d_{k\alpha} \nabla \mathbf{u} + \gamma_{7k} \left(\frac{D_0 d_{k\alpha}}{Dt} - u_{\beta,\alpha} d_{k\beta} \right) + \right. \\ & + \left. \left[\gamma_{8k} x_{k,\beta} + \left(\frac{6}{5} \gamma_{6k}^{(2)} + \gamma_{9k}^* \right) d_{k\beta} \right] e_{\alpha\beta} \right\} + \\ & + \sum_k \left\{ \gamma_{10k} Z_{k\alpha} + \gamma_{11k} x_{k,\alpha} \right\} \nabla \mathbf{u} + \gamma_{12} (\nabla \mathbf{u})_{,\alpha} \end{aligned} \quad ($$

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(1)} = & \left\{ -\frac{2T}{3c_v^*} \frac{\partial A'_\Omega}{\partial T} + \frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial T} \right\}_\gamma \approx \sum \frac{2}{5p_i} \left\{ \frac{2m_i}{3kc_v^*} \left[b_i^{(0)} n_i k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{D_{Ti}}{T} \right) - \right. \right. \\ & - b_i^{(1)} \left(T \frac{\partial \lambda'_{ii}}{\partial T} + \frac{5}{2} n_i k D_{Ti} \right) + \\ & + b_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{k} \left(n_i k D_{Ti} + T^3 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{k \lambda_{vi}}{T^2 c_{vi}} \right) + \lambda_{vi} \frac{k^2}{c_{vi}^2} \langle (\Delta \varepsilon_\Omega)^3 \rangle_c \right) \left. \right] + \\ & + \zeta_i \left[-b_i^{(0)} \partial_T \zeta_i + \frac{5}{2} b_i^{(1)} \partial_T (\zeta_i T^2) + b_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{k} (-1 + \sigma_i \partial_T (\zeta_i \sigma_i T^{-1})) + b_i^{(2)} \sigma_i \langle (\Delta \varepsilon_\Omega)^3 \rangle_c \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\gamma_1^{(2)} = -\frac{2}{3} \left\{ c_i^2 \frac{\partial A'_\Omega}{\partial c_i^2} \right\}_\gamma \approx \sum \frac{2m_i}{3kp_i} \left[\frac{7}{5} b_i^{(1)} \lambda'_{ii} - (b_i^{(0)} - b_i^{(1)}) n_i k D_{Ti} - b_i^{(2)} \lambda_{vi} \right]$$

$$\gamma_2 = -\{A'_\Omega\}_\gamma \approx -\sum \frac{2m_i}{5kp_i} (b_i^{(1)} \lambda'_{ii} - b_i^{(0)} n_i k D_{Ti} - b_i^{(2)} \lambda_{vi})$$

$$\gamma_{3k} = \left\{ \left(2B'_\Omega + \frac{4}{5} c_i^2 \frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2} \right) \delta_{ik} \right\}_\gamma \approx -\sum \frac{4m_i \eta_i}{5kp_i} b_i^{(1)} \delta_{ik}$$

$$\gamma_4^{(1)} = \frac{2}{5} \left\{ c_i^2 \frac{\partial B'_\Omega}{\partial T} \right\}_\gamma \approx \sum \frac{4\eta_i}{5p_i} \left[b_i^{(1)} \partial_T (T^{1/2} \eta_i) - b_i^{(0)} \partial_T \eta_i - b_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{k} \right]$$

$$\gamma_5 = \frac{2}{5} \{c_i^2 B'_\Omega\}_\gamma \approx \sum \frac{4\eta_i}{5kn_i} (b_i^{(1)} - b_i^{(0)})$$

$$\gamma_{6k}^{(1)} = -\frac{2}{3} \left\{ \frac{T}{c_v^*} \frac{\partial D'_\Omega}{\partial T} \right\}_\gamma \approx$$

$$\approx \sum \frac{4m_i}{15kc_v^*} \left[D_{ik} \left(b_i^{(0)} \partial_T D_{ik} - \frac{5}{2} b_i^{(1)} + b_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{k} \right) + \frac{5}{2n} b_i^{(1)} \gamma_i^k \partial_T (T \gamma_i^k) \right]$$

$$\gamma_{6k}^{(2)} = -\frac{2}{3} \left\{ c_i^2 \frac{\partial D_{\Omega}^{'k}}{\partial c_i^2} \right\}_{\gamma} \approx \sum \frac{2m_i}{3k} \left[D_{ik} (b_i^{(1)} - b_i^{(0)}) - \frac{7}{2n} b_i^{(1)} \gamma_i^k \right] \quad (2.12)$$

$$\gamma_{7k} = \{D_{\Omega}^{'k}\}_{\gamma} \approx -\sum \frac{m_i}{k} \left(\frac{2}{5} b_i^{(0)} D_{ik} + b_i^{(1)} \frac{1}{n} \gamma_i^k \right)$$

$$\gamma_{8k} = \frac{2}{5} \left\{ c_i^2 \frac{\partial B_{\Omega}^{'k}}{\partial x_k} \right\}_{\gamma} \approx \sum \frac{4}{5kn_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} (b_i^{(1)} - b_i^{(0)})$$

$$\gamma_{10k} = 2 \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial \Gamma_{\Omega}^{'k}}{\partial c_i^2} \right\}_{\gamma} \approx -\sum \frac{m_i \zeta_i}{kp_i} \left(b_i^{(1)} + \frac{2}{5} b_i^{(2)} \sigma_i \frac{c_{vi}}{k} \right) \delta_{ik}$$

$$\gamma_{11k} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{\Omega}^{'k}}{\partial x_k} \right\}_{\gamma} \approx \sum \frac{2}{5n_i k} \left[\left(\frac{5}{2} b_i^{(1)} - b_i^{(0)} \right) \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_k} + b_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_i \zeta_i) \right]$$

$$\gamma_{12} = \{\Gamma_{\Omega}^{'k}\}_{\gamma} \approx \sum \frac{2\zeta_i}{5n_i k} \left(\frac{5}{2} b_i^{(1)} - b_i^{(0)} + b_i^{(2)} \sigma_i \frac{c_{vi}}{k} \right)$$

$$\gamma_1^* = \frac{1}{3} \{a_{\alpha} \Gamma + \Gamma a_{\alpha}\}_{\gamma}^*, \quad \gamma_4^* = \frac{1}{5} \{b_{\alpha\beta} a_{\beta} + a_{\beta} b_{\beta\alpha}\}_{\gamma}^* \quad (2.13)$$

$$\gamma_{6k}^* = \frac{1}{3} \{d_{\alpha}^k \Gamma + \Gamma d_{\alpha}^k\}_{\gamma}^*, \quad \gamma_{9k}^* = \frac{1}{5} \{b_{\alpha\beta} d_{\beta}^k + d_{\beta}^k b_{\beta\alpha}\}_{\gamma}^*$$

В данном случае при учете (2.5), (2.6) введены операторы

$$\{N\}_{\gamma} = -\frac{2}{3n} k^2 T^2 \sum_{\Omega} \int \frac{N}{m_i} A_{\Omega} w_i^2 d\mathbf{c}_i, \quad \{HN\}_{\gamma}^* = \frac{kT}{n^3} \sum_{\Omega} \int a_{\Omega\alpha} L_{\Omega}^* (HN) d\mathbf{c}_i \quad (2.14)$$

В (2.12) принято

$$b_i^{(0)} = -\frac{5}{2} n_i k D_{Ti}, \quad b_i^{(1)} = \lambda_{ii}', \quad b_i^{(2)} = -\frac{5}{2} \lambda_{vi} \frac{k}{c_{vi}} \quad (2.15)$$

Выражение для $V_{j\alpha}^{(2)}$ получается из (2.11)–(2.13) заменой γ на δ . При вычислении коэффициентов δ операторы (2.14) заменяются на (2.16), а соотношения (2.15) – на (2.17)

$$\{N\}_{\delta} = -\frac{2}{3n^2} kT \sum_{\Omega} \int \frac{N}{m_i} D_{\Omega}^j N w_i^2 d\mathbf{c}_i, \quad \{HN\}_{\delta}^* = \frac{1}{n^4} \sum_{\Omega} \int d_{\Omega\alpha}^j L_{\Omega}^* (HN) d\mathbf{c}_i \quad (2.16)$$

$$b_i^{(0)} = -\frac{5}{2T} x_i D_{ij}, \quad b_i^{(1)} = -\frac{5}{2nT} x_i \gamma_i^j, \quad b_i^{(2)} = 0 \quad (2.17)$$

3. Приближение слабой неупругости. При проведении газодинамических расчетов обычно пользуются формулами для переносных свойств в приближении Навье–Стокса, справедливыми при предположениях, что вклады интегралов неупругих столкновений в A_{Ω} , B_{Ω} , D_{Ω}^k пренебрежимо малы, а сечения упругих столкновений осреднены по внутренним переменным. Для общего случая неравновесного возбуждения

внутренних степеней свободы молекул тогда имеем [11, 12]

$$f_{\Omega}^{(1)} = Y_{\Omega} f_i^{(0)} \varphi_{\Omega}^{(1)}, \quad \varphi_{\Omega}^{(1)} = \varphi_i^{(1)} - W_i c_{i\alpha} \frac{\partial \ln Y_{\Omega}}{\partial r_{\alpha}} + X_{\Omega}(w^2, \epsilon) \quad (3.1)$$

Здесь $Y_{\Omega} = n_{\Omega}/n_i$, n_{Ω} – заселенность (плотность Ω -частиц), $\varphi_i^{(1)}$ и W_i рассчитываются по сечениям упругих столкновений и не зависят от неупругих процессов, так что $\varphi_i^{(1)}$ дается известной формулой для смеси одноатомных газов [5].

Приближение (3.1) названо обобщенным неравновесным приближением Эйкена [11, 12]. Когда распределение по внутренним энергиям близко к больцманову, то Y_{Ω} заменяется на равновесную функцию (1.2), величина X_{Ω} становится пропорциональной ∇u , $\varphi_i^{(1)}$ преобразуется к виду (1.12), но теперь

$$B_{\Omega} = B_i, \quad D_{\Omega}^j = D_i^j, \quad A_{\Omega} = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \Delta \epsilon_{\Omega}, \quad A_i^{(2)} = n W_i \approx \frac{n m_i}{k T} \left(\sum_{j=1}^s \frac{x_j}{\mathcal{D}_{ij}(1)} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

В (3.2) величины B_i , D_i^j , $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ не зависят от E_{Ω} и рассчитываются при помощи сечений упругих столкновений, выражение для W_i дано в первом приближении по полиномам Сонина [12], $\mathcal{D}_{ij}(1)$ – коэффициент бинарной диффузии в этом приближении. Отличие (3.2) от случая одноатомного газа состоит в появлении слагаемого с коэффициентом $A_i^{(2)}$. Ближайшая цель – показать, какие именно барнеттовы коэффициенты переноса рассчитываются как в одноатомном случае, какие – с учетом $A_i^{(2)}$, c_{vi} . Конечно, коэффициенты, выраженные через Γ_{Ω} , определяются неупругими процессами.

Используя соотношения (3.2), будем учитывать, что

$$\sum_{\omega} Y_{i\omega} = 1, \quad \sum_{\omega} Y_{i\omega} \Delta \epsilon_{i\omega} = 0, \quad \frac{\partial Y_{i\omega}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

и т.п. и что операторы $\{ \}^*$ определены теперь на интегралах упругих столкновений

$$L_{\Omega}(f^{(1)} f^{(1)}) = \sum_{\Psi} \int Y_{\Omega} Y_{\Psi} f_i^{(0)} f_j^{(0)} (\varphi_{\Omega}^{(1)'} \varphi_{\Psi}^{(1)'} - \varphi_{\Omega}^{(1)} \varphi_{\Psi}^{(1)}) g_{ij} d\sigma_{ij} dc_j \quad (3.4)$$

где $\Psi = j\psi$, сечения столкновений не зависят от "внутренних" индексов ω , ψ , суммирование по которым проводится независимо, так как при упругих столкновениях Ω -частиц с Ψ -частицами их внутренние энергии не изменяются. Для Y_{Ψ} справедливы свойства (3.3). В силу (3.2) можно ввести обозначения

$$(B'_{\Omega}, D'_{\Omega}^j, A'_{\Omega}^{(1)}, A'_{\Omega}^{(2)}) = Y_{\Omega} (B'_i, D'_i^j, A'_i^{(1)}, A'_i^{(2)})$$

Рассмотрим сначала соотношения (2.3)–(2.6). За исключением ξ_1 , ξ_1^* во всех операторах $\{ \}_{\eta}$, $\{ \}_{\eta}^*$ функции B'_{Ω} , D'_{Ω}^j , A'_{Ω} заменяются на "одноатомные" B'_i , D'_i^j , $A'_i^{(1)}$, а суммы по Ω , Ψ – на суммы по i, j (после суммирования по ω , ψ – соответственно). Например, для ξ_5 имеем

$$\frac{\partial A'_{\Omega}}{\partial T} = \frac{\partial Y_{\Omega}}{\partial T} (A'_i^{(1)} + A'_i^{(2)} \Delta \epsilon_{\Omega}) + Y_{\Omega} \left(\frac{\partial A'_i^{(1)}}{\partial T} + \frac{\partial A'_i^{(2)}}{\partial T} \Delta \epsilon_{\Omega} + A'_i^{(2)} \frac{\partial \Delta \epsilon_{\Omega}}{\partial T} \right) \quad (3.5)$$

Так как $B_{\Omega} = B_i$, то суммируется по ω именно это выражение. После суммирования с учетом (1.3), (3.3) из (3.5) остается

$$A'_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{kT} + \frac{\partial A'_i^{(1)}}{\partial T} - A'_i^{(2)} \frac{c_{vi}}{kT} = \frac{\partial A'_i^{(1)}}{\partial T}$$

От c_v^* и Γ_{Ω} зависит ξ_1 , от Γ_{Ω} – ξ_1^* . Сделанные выводы непосредственно переносятся

на коэффициенты δ в $V_j^{(2)}$ (ибо $D_\Omega^j = D_i^j$), за исключением $\delta_1^{(1)}$, $\delta_{10} - \delta_{12}$, δ_1^* , δ_{6k}^* . Кроме того, в $\delta_{6k}^{(1)}$ входит c_v^* .

Анализ коэффициентов γ несколько сложнее, так как $A_\Omega \neq A_i$. При учете только $A_i^{(1)}$ получим качественно те же результаты, что и для коэффициентов δ . Вклад "неодноатомного" слагаемого $A_i^{(2)} \Delta \epsilon_\Omega$ отличен от нуля, когда в $\{N\}_\gamma$ величина N содержит A'_Ω или $(B'_i, D_i'^j) \partial Y_\Omega / \partial T$. Вместо оператора $\{N\}_\gamma$ удобно ввести операторы $\{N\}_\gamma^{(1)}$, $\{N\}_\gamma^{(2)}$, получаемые из первой формулы (2.14) заменой A_Ω на $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ соответственно, а суммы по Ω — на суммы по i . Тогда

$$\{A'_\Omega\}_\gamma = \{A_i'^{(1)}\}_\gamma^{(1)} + \left\{ A_i'^{(2)} \frac{c_{vi}}{k} \right\}_\gamma^{(2)}, \quad \left\{ B'_i \frac{\partial Y_\Omega}{\partial T} \right\}_\gamma = \left\{ B'_i \frac{c_{vi}}{kT} \right\}_\gamma^{(2)}$$

и т.д. Коэффициенты ω выражаются через Γ_Ω , хотя, конечно, выражения для них упрощаются при учете (3.2). Подчеркнем, что при использовании приближенных выражений для барнеттовых коэффициентов, приведенных в (2.3), (2.8), (2.12), (2.15) и (2.16), нужно помнить, что в данном случае η_i , D_{ij} , D_{Ti} , γ_i^j , $\lambda_{ii}' = \lambda_i'$ рассчитываются по формулам для смеси одноатомных газов; в то же время [12]

$$\lambda_{vi} \approx n_i c_{vi} \left(\sum_j \frac{x_j}{\mathcal{D}_{ij}(1)} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

Слабее всего многоатомность влияет на тензор бездивергентных напряжений $\pi_{\alpha\beta}^{(2)}$, причем те его слагаемые $\pi_{\alpha\beta}^*$, которые обусловлены пространственными производными температуры и концентраций, даются "одноатомными" формулами. Этот результат справедлив и при произвольной неравновесности внутренних степеней свободы [13].

Рассматриваемые упрощения позволяют завершить вычисления коэффициентов ξ^* , ω^* , γ^* , δ^* . В общем случае выражения для них носят формальный характер в силу недостаточности сведений о неупругих столкновениях. При учете только упругих столкновений даже в рамках главных приближений по полиномам Сонина получаются очень громоздкие формулы, причем они являются точными только в случае максвелловских молекул. Поэтому сразу рассмотрим случай максвелловских молекул, а результаты запишем в виде, пригодном для произвольных межмолекулярных потенциалов [6]. Для простого газа коэффициенты ξ^* , γ^* оказываются равными нулю, и в общем случае ими пренебрегают [4]. Для смесей большинство коэффициентов ξ^* , ω^* , γ^* , δ^* также оказываются равными нулю, и аналогично [4–6] ими пренебрегаем. Отличны от нуля только следующие:

$$\xi_{12kl}^* = \sum_{ij} \frac{2\eta_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}(1)} (M_i - M_j + 3A_{ij} M_j) D_{ki} D_{lj} \quad (3.7)$$

$$\omega_{12kl}^* = \sum_{ij} \frac{\zeta_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}(1)} (M_i - M_j) D_{ki} D_{lj} \quad (3.8)$$

$$\gamma_{6k}^* = \sum_{ij} \frac{D_{ki} \zeta_j x_i}{kn \mathcal{D}_{ij}(1)} \left\{ 2M_i (M_i - M_j + 2A_{ij} M_j) \frac{\lambda_i}{x_i} + \left[(M_i - M_j)^2 + 4A_{ij} M_i M_j \right] \frac{\lambda_j}{x_j} - \frac{\lambda_{vj} \sigma_j}{x_j} \right\} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{9k}^* = \sum_{ij} \frac{4}{5} \frac{D_{ki} \eta_j x_i}{kn \mathcal{D}_{ij}(1)} \left\{ (M_i - M_j) \left[(M_i - M_j) \frac{\lambda_j}{x_j} + 2M_i \frac{\lambda_i}{x_i} \right] + \right. \\ \left. + A_{ij} M_i (M_j - 3M_i) \left(\frac{\lambda_j}{x_j} + \frac{\lambda_i}{x_i} \right) \right\} \quad (3.10)$$

При выводе формул (3.7)–(3.10) использованы формулы (1.18), (2.5), (2.6), (2.9), (2.10), (2.13), (2.14), (2.16), (3.4) и обозначения

$$(M_i, M_j) = \frac{(m_i, m_j)}{m_i + m_j}, \quad A_{ij} = \frac{1}{5} \frac{\Omega_{ij}^{(2)}(2)}{\Omega_{ij}^{(1)}(1)}, \quad \mathcal{D}_{ij}(1) = \frac{3kT}{16nm_i M_j \Omega_{ij}^{(1)}(1)} \quad (3.11)$$

Величины Ω определены в [4], коэффициенты η_i , λ_i , D_{ij} рассчитываются по формулам для смеси одноатомных газов [5], λ_{vi} – по формуле (3.6).

4. Приближенные формулы для бинарной смеси одноатомных газов. Пренебрежем внешними силами, термо- и бародиффузией, тогда

$$D_{Ti} = 0, \quad \gamma_i^j = 0, \quad d_{i\alpha} = x_{i,\alpha}, \quad \frac{D_0 d_{i\alpha}}{Dt} = -u_{\beta,\alpha} x_{i,\beta}, \quad c_v^* = 1, \quad \lambda'_{ii} = \lambda_i \quad (4.1)$$

$$Z_{i\alpha} = \rho^{-1} p_{,\alpha}, \quad \mathcal{D}_{ij}(1) = \mathcal{D}_{ij}$$

Из (2.3), (2.12) с учетом соотношений (2.4), (4.1) получаем

$$\xi_1 \approx \sum \frac{4}{3} \frac{\eta_i^2}{p_i} \left(\frac{7}{2} - \partial_T \eta_i \right), \quad \xi_2 \approx \sum 2 \frac{\eta_i^2}{p_i} = \frac{1}{4} \xi_3 \\ \xi_4 \approx \sum \frac{4}{5} \frac{\eta_i}{p_i} \lambda_i = \frac{\gamma_5}{T}, \quad \xi_5 \approx \sum \frac{4}{5} \frac{\eta_i}{p_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial T}, \quad \xi_6 = 0 \\ \gamma_1 \approx \sum \frac{4}{15} \frac{m_i}{kp_i} \lambda_i^2 \left(\frac{7}{2} - \partial_T \lambda_i \right), \quad \gamma_2 \approx -\sum \frac{2}{5} \frac{m_i}{kp_i} \lambda_i^2 \\ \gamma_3 \approx -\sum \frac{4}{5} \frac{m_i \eta_i \lambda_i}{kp_i}, \quad \gamma_4 \approx \sum \frac{4}{5} \frac{\lambda_i}{p_i} \left[\eta_i \left(\frac{7}{2} + \partial_T \eta_i \right) + \frac{7}{5} \frac{m_i}{k} \lambda_i \right] \quad (4.2)$$

(суммирование по i от 1 до 2).

Слагаемые, в которые входят другие коэффициенты ξ , γ , можно объединить, используя (4.1), представление D_{ij} через коэффициент бинарной диффузии $\mathcal{D}_{12}$ [5], обратно пропорциональный n , и равенство $x_{1,\alpha} = -x_{2,\alpha}$. В итоге эти слагаемые $\pi_{\alpha\beta}^{(2)}$, $h_{\alpha}^{(2)}$ примут вид

$$\delta \pi_{\alpha\beta}^{(2)} = \alpha_1 \langle x_{1,\alpha\beta} \rangle + \left[\frac{\alpha_1}{T} (1 + \partial_T \mathcal{D}_{12}) + \sum \frac{8}{5} \frac{\eta_i}{p_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} \right] \langle T_{,\alpha} x_{1,\beta} \rangle - \\ - \frac{\alpha_1^* m_1 m_2}{\rho k T} (\eta_1 n_2 - \eta_2 n_1) \langle p_{,\alpha} x_{1,\beta} \rangle + \left\{ 2\alpha_1 \frac{n}{\rho} (m_2 - m_1) + \delta \xi_{12}^* \right\} \langle x_{1,\alpha} x_{1,\beta} \rangle \\ \delta h_{\alpha}^{(2)} = \frac{2}{5k} \left[\alpha_1^* m_1 m_2 (\lambda_1 n_2 - \lambda_2 n_1) + \sum 4 \frac{\lambda_i}{n_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} + \delta \gamma_9^* \right] e_{\alpha\beta} x_{1,\beta} \\ \alpha_1 = \alpha_1^* (\eta_1 \rho_2 - \eta_2 \rho_1), \quad \alpha_1^* = \frac{2\mathcal{D}_{12}}{x_1 x_2 \rho} \quad (4.3)$$

Входящие в (4.3) коэффициенты $\delta \xi_{12}^*$ и $\delta \gamma_9^*$ получаются соответствующим объеди-

нением коэффициентов (3.7), (3.10). С учетом (3.11) имеем

$$\begin{aligned}\delta\xi_{12}^* &= 2\left(\frac{n}{\rho}\right)^2 \mathcal{D}_{12} m_1 m_2 \sum' \frac{\eta_i}{x_i} \left[3A_{ii} \frac{\mathcal{D}_{12}}{\mathcal{D}_{ii}} M_j - M_i + M_j - 3A_{12} M_j \right] \\ \delta\gamma_9^* &= \frac{8}{5} \frac{m_1 m_2}{k\rho} \sum' \frac{\eta_i}{m_j} (-1)^i \left\{ 4A_{ii} \frac{\mathcal{D}_{12}}{\mathcal{D}_{ii}} M_1 M_2 \frac{\lambda_i}{x_i} + \left[(M_j - M_i) \frac{\lambda_i}{x_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2M_j \frac{\lambda_j}{x_j} \right] (M_j - M_i) + A_{12} M_j (M_i - 3M_j) \left(\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} \right) \right\}\end{aligned}\quad (4.4)$$

В (4.4) под $\sum'$ понимается сумма по i от 1 до 2 при $j \neq i$, $\mathcal{D}_{ii}$ — коэффициент само-диффузии i -го компонента.

Наибольшие упрощения имеют место для диффузионной скорости

$$\begin{aligned}V_{1\alpha}^{(2)} &= \alpha_2 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial T} \rho_2 - \frac{\partial \eta_2}{\partial T} \rho_1 \right) T_{,\beta} e_{\alpha\beta} + \alpha_1 \frac{\rho_2}{\rho p} e_{\alpha\beta,\beta} + \frac{5}{3} \alpha_3 \left(1 - \frac{2}{5} \partial_T \mathcal{D}_{12} \right) x_{1,\alpha} \nabla \mathbf{u} - \\ &\quad - 2\alpha_3 u_{\beta,\alpha} x_{1,\beta} + 2 \left\{ \alpha_3 + \alpha_2 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \rho_2 - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \rho_1 \right) \right\} e_{\beta\alpha} x_{1,\beta} \\ \alpha_2 &= \frac{2m_2 n \mathcal{D}_{12}}{\rho_1 \rho^2}, \quad \alpha_3 = \frac{m_1^2 m_2^2 n^4 \mathcal{D}_{12}^2}{\rho \rho^3} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)\end{aligned}\quad (4.5)$$

Входящие в (4.2)–(4.5) парциальные величины η_i , λ_i вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\eta_i &= x_i \left(x_i H_{jj}^{00} - x_j H_{ij}^{00} \right) \left(H_{ii}^{00} H_{jj}^{00} - H_{ij}^{00} H_{ji}^{00} \right)^{-1} \\ \lambda_i &= x_i \left(x_i \Lambda_{jj}^{11} - x_j \Lambda_{ij}^{11} \right) \left(\Lambda_{ii}^{11} \Lambda_{jj}^{11} - \Lambda_{ij}^{11} \Lambda_{ji}^{11} \right)^{-1}\end{aligned}$$

Здесь, как и в (4.4), $i, j = 1, 2, j \neq i$. Функции H , Λ определены в [5].

5. Уравнения термо- и концентрационно-стрессовой конвекции. Для медленных течений, по определению, справедливы следующие оценки:

$$u \sim \text{Kn}, \quad D/Dt \sim \text{Kn}, \quad p = p_0(1 + \delta p), \quad p_0 = nkT = \text{const}$$

$$\text{Kn} \approx M \text{Re}^{-1} \rightarrow 0, \quad \text{Re} = O(1), \quad \delta p = O(\text{Kn}^2) \quad (5.1)$$

где Kn , M , Re — числа Кнудсена, Маха и Рейнольдса, δp — безразмерная переменная часть давления. Если при этом обусловленные граничными условиями характерные относительные перепады температуры и концентраций порядка единицы, то в уравнении импульса и в выражении для местной силы, действующей на элемент поверхности обтекаемого тела, необходим учет $\pi_{\alpha\beta}^*$, т.е. тех членов тензора напряжений, которые содержат производные от температуры и концентраций. Следовательно, уравнения Навье–Стокса в данном сплошнородном пределе несправедливы, напряжения $\pi_{\alpha\beta}^*$ вызывают новые эффекты, в частности новые типы свободной конвекции в отсутствие внешних сил (см. обзор [1]).

Анализ этих эффектов для простоты и наглядности ограничивался медленными стационарными течениями простого газа [14] и изотермической бинарной смесью одноатомных газов [15].

Рассмотрим более общий случай, исходя из уравнений (1.4)–(1.7), с учетом всех напряжений, обусловленных переменностью T и x_i . Предполагается, естественно, что эффекты нестационарности и действия внешних сил не изменяют определяющих оценок (5.1). Тогда уравнения сохранения упрощаются аналогично описанному ранее [14,

15]: в коэффициентах уравнений полагается $p = p_0$, уравнения (1.4), (1.5), (1.7) упрощаются в рамках приближения Навье–Стокса, в уравнении энергии опускаются слагаемые с внешними силами и вязкими напряжениями, т.е. $(p\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta})u_{\alpha,\beta} \approx p_0 \nabla u$. (Напомним, что в рассматриваемом случае коэффициенты динамической η и объемной ζ вязкости соизмеримы; для пространственных производных применяем обозначения (2.2).)

Переменная часть полного тензора напряжений будет фигурировать только в уравнении импульса и выражении для местной силы. Пользуясь малостью δp , аналогично описанному ранее подходу [14, 15] запишем ее в виде

$$p_0 \delta p \delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \equiv X \delta_{\alpha\beta} + R \pi_{\alpha\beta}, \quad X = p_0 \delta p + \Pi + \Theta$$

$$R \pi_{\alpha\beta} \equiv \pi_{\alpha\beta} - \Theta \delta_{\alpha\beta} = R \pi_{\alpha\beta}^{(1)} + R \pi_{\alpha\beta}^* + \dots, \quad \Theta = \frac{2}{3} \eta \nabla u + \dots$$

Таким образом, X включает, в частности, объемную вязкость и барнеттовы слагаемые скаляра Π , обусловленного многоатомностью, и те слагаемые тензора $\pi_{\alpha\beta}$, которые содержат $\delta_{\alpha\beta}$ и которые не учитываются в $R \pi_{\alpha\beta}$. Специфика задачи такова, что X можно считать новой газодинамической переменной, структуру которой знать не нужно.

После этого из входящих в уравнение импульса производных $(R \pi_{\alpha\beta}^*)_{,\beta}$ выделяем третьи производные от T , x_i и объединяем их с ∇X , что приводит к понижению порядка системы уравнений. Например,

$$(\xi_4 T_{,\alpha\beta})_{,\beta} = (\xi_4 T_{,\beta})_{,\alpha\beta} - (\xi_{4,\alpha} T_{,\beta})_{,\beta}$$

В итоге, пренебрегая величиной $O(Kn^2)$ по сравнению с единицей, приведем входящую в уравнение импульса (1.6) дивергенцию полного тензора напряжений к виду

$$(p \delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta})_{,\beta} = \Lambda_{,\alpha} - \left[\eta (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \right]_{,\beta} + W_{\alpha\beta,\beta}$$

$$\Lambda = X + \nabla(\xi_4 \nabla T) + \sum_j \nabla(\xi_{7j} \nabla x_j) \quad (5.2)$$

$$W_{\alpha\beta} = -\xi_{4,\alpha} T_{,\beta} + (\xi_5 + \xi_5^*) T_{,\alpha} T_{,\beta} +$$

$$+ \sum_k \left\{ -\xi_{7k,\alpha} x_{k,\beta} + \frac{1}{2} (\xi_{8k} + \xi_{9k} + \xi_{9k}^*) (T_{,\alpha} x_{k,\beta} + T_{,\beta} x_{k,\alpha}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_l (\xi_{11kl} + \xi_{12kl}^*) (x_{k,\alpha} x_{l,\beta} + x_{k,\beta} x_{l,\alpha}) \right\} \quad (5.3)$$

Величина Λ – новая зависимая переменная системы уравнений сохранения. В рассмотренных ранее случаях [14, 15] удастся произвести дальнейшее упрощение выражений (5.2), (5.3). В приближении, рассмотренном в разд. 3, коэффициенты ξ , входящие в (5.2), (5.3), рассчитываются как для смеси одноатомных газов.

6. Заключение. Выражения для барнеттовых коэффициентов переноса являются операторами от скалярных функций скоростей и внутренних энергий молекул A , B , D , G , даваемых первым приближением метода Чепмена–Энскога. В общем случае эти выражения носят формальный характер, что обусловлено недостаточностью знаний сечений неупругих столкновений и чисто математическими трудностями. Однако последние не являются очень серьезным препятствием при нынешнем состоянии вычислительной техники, по меньшей мере для случая смеси одноатомных газов. Результаты соответствующего численного решения были бы очень важными для анализа применимости приближенных аналитических выражений для барнеттовых коэффи-

циентов, получаемых представлением функций A, B, D, Γ отрезками рядов по полиномам. Сходимость рядов для барнеттовых коэффициентов даже в случае простого газа гораздо более медленная, вообще говоря, чем для навье-стоксовских коэффициентов переноса. Тем более это должно быть справедливым для смеси одноатомных газов, когда имеются только отдельные результаты [1, 6], достаточно полный анализ не проводился, однако "спасает" тот факт, что приближенные выражения являются точными для максвелловских молекул и, следовательно, применимы в случае "мягких" межмолекулярных потенциалов.

Автор благодарит В.А. Жарова за помощь в работе и М.Ш. Шавалиева за замечания по рукописи статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-60409) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (96-15-96063).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В.С., Шавалиев М.Ш. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена-Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.
2. Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Ерофеев А.И., Носик В.И. Макроскопическая модель структуры сильной ударной волны // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 125–135.
3. Шавалиев М.Ш. Исследование структуры слабой ударной волны и распространения малых возмущений в смесях газов при помощи уравнений Барнетта // ПММ. 1999. № 3. С. 444–456.
4. Chapman S., Cowling T.Y. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge: Univ. Press, 1952. = Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
5. Ferziger J.H., Kaper H.Y. Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam; London: North-Holland, 1972. = Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
6. Шавалиев М.Ш. Явления переноса в барнеттовском приближении в многокомпонентных газовых смесях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 126–137.
7. Monchick L., Yun K.S., Mason E.A. Formal kinetic theory of transport phenomena in polyatomic gas mixtures // J. Chem. Phys. 1963. V. 39. № 3. P. 654–669.
8. Andersen H.C. Derivation of hydrodynamic equations from the Boltzmann equation // Kinetic Processes in Gases and Plasmas. N.Y., London: Acad. Press, 1969. P. 25–52. = Андерсен Г. Вывод уравнений гидродинамики из уравнения Больцмана // Кинетические процессы в газах и плазме. М.: Атомиздат, 1972. С. 27–51.
9. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 10).
10. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971. 331 с.
11. Галкин В.С., Коган М.Н., Макашев Н.К. Обобщенный метод Чепмена-Энскога. Ч. 1. Уравнения неравновесной газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 5. С. 66–76.
12. Галкин В.С. О переносных свойствах неравновесных смесей многоатомных газов // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 183–189.
13. Галкин В.С. О переносных свойствах смесей многоатомных газов в приближениях Навье-Стокса и Барнетта // Тр. ЦАГИ. 1976. Вып. 1742. С. 7–17.
14. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлендер О.Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 13–21.
15. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлендер О.Г. О концентрационно-стрессовой конвекции и некоторых свойствах медленных течений смесей газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 113–118.

Жуковский

Поступила в редакцию
28.XII.1999