

УДК 533.6

© 2000 г. В.А. Кукушкин

ОЦЕНКИ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ НЕОГРАНИЧЕННОГО СЖАТИЯ ГАЗА

Рассматриваются процессы неограниченного безударного сжатия идеального газа (неограниченный рост плотности, отсутствуют ударные волны), когда в начальный момент времени газ покоился внутри цилиндра, сферы [1], тетраэдра [2] и тела вращения с треугольной образующей [3–4]. Доказано, что в этих процессах величина оптической толщины растет неограниченно, найдена асимптотика ее роста для моментов времени, близких к моменту схлопывания газа в точку. Приведены оценки отношения величины оптической толщины к величине энергии, затраченной при соответствующем режиме сжатия.

Задача о нахождении оптической толщины [5] связана с вопросом о возможности использования процессов сильного сжатия для инициирования термоядерного синтеза (оптическая толщина должна достигать некоторого порогового значения).

1. Введение. Постановка задачи. Исследуются свойства известных процессов сжатия, описанных ранее [1–4], поэтому далее излагаются только те сведения, которые понадобятся при проведении качественного анализа.

В рассматриваемых процессах в начальный момент времени газ покоится в некотором объеме, который образован неподвижными стенками и подвижными поршнями. Поршни начинают движение с нулевой скоростью и за конечный промежуток времени сжимают газ в точку или в линию. При этом ударная волна возникает только в момент коллапса.

Газ считаем однородным, невязким и нетеплопроводным, процессы сжатия – адиабатические, уравнение состояния $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, в случае сжатия тетраэдров и тел конической формы рассматриваются $\gamma \in (1, 2)$. Без ограничения общности полагаем плотность и скорость звука покоящегося газа равными единице.

Определение оптической толщины (ОТ). Введем функцию

$$H(S, T) = \int_{ST} \rho ds$$

где точка T находится на границе области, занятой газом. Точку S назовем оптическим центром (ОЦ), закон ее движения выбирается так, чтобы в каждый момент времени достигался максимум величины

$$\min_T H(S, T) \tag{1.1}$$

ОТ в момент времени τ :

$$l(\tau) = \max_{S(\tau)} \min_T \int_{ST} \rho ds$$

ОТ вдоль направления $\mathbf{n}$ ($\|\mathbf{n}\| \neq 0$) назовем величину

$$l_n(\tau) = \min_{ST \parallel \mathbf{n}} \int_{ST} \rho ds$$

где $ST \parallel n$ означает, что отрезок ST должен быть параллелен вектору n . Ранее оценки ОТ для фиксированных направлений были получены для процессов согласованного сжатия призм [5, 6].

В многомерном случае (две или три пространственные координаты) задача о нахождении закона движения ОЦ и величины ОТ является трудоемкой, поэтому интересно получить хотя бы асимптотические оценки ОТ для моментов времени, близких к моменту коллапса.

В случае сжатия тел конической формы [3] точное решение уравнения для потенциала скорости известно только для части сжимаемого объема, для нее уравнения движения частиц решаются в явном виде. Однако постоянные интегрирования находятся из условия непрерывного примыкания к той части газа, для которой известно лишь численное решение. При проведении качественного анализа учитывается только та область, в которой формируется мощная кумулятивная струя (и для которой есть точное решение). Такое упрощение оправдано тем, что именно в этой струе наблюдается наибольший порядок роста газодинамических величин. Утверждение, что учет остального объема газа не изменяет полученных оценок, не доказано и используется лишь как правдоподобная гипотеза. Строго говоря, в этом случае получены только оценки снизу, а вопрос об оценках сверху остается открытым.

Краткий алгоритм получения оценок для многомерных процессов. Вместо того чтобы находить закон $S(\tau)$, доставляющий максимум величины (1.1), будем задавать функцию $S(\tau)$. Потом будут получены оценки снизу для величины ОТ в предположении, что был правильно угадан закон движения ОЦ. Далее доказывается, что порядок роста ОТ не может быть больше того, который наблюдается при заданном законе $S(\tau)$.

2. Одномерные процессы сжатия. Можно легко найти порядок роста ОТ для одномерных (газодинамические величины зависят от одной автомодельной переменной) процессов сжатия. Известны степени кумуляции газодинамических величин при сжатии цилиндра и шара [1]

$$r \sim (-\tau)^\eta, \quad p \sim (-\tau)^{-v\eta}, \quad \rho \sim (-\tau)^{-v\eta} \quad (2.1)$$

$$\eta = \frac{2}{v(\gamma - 1) + 2}$$

($v = 2$ для цилиндра, $v = 3$ для шара, r – расстояние до центра шара или оси симметрии цилиндра). Из определения ОТ и формул (2.1) следует, что

$$l \sim \rho r \sim (-\tau)^{n_v}$$

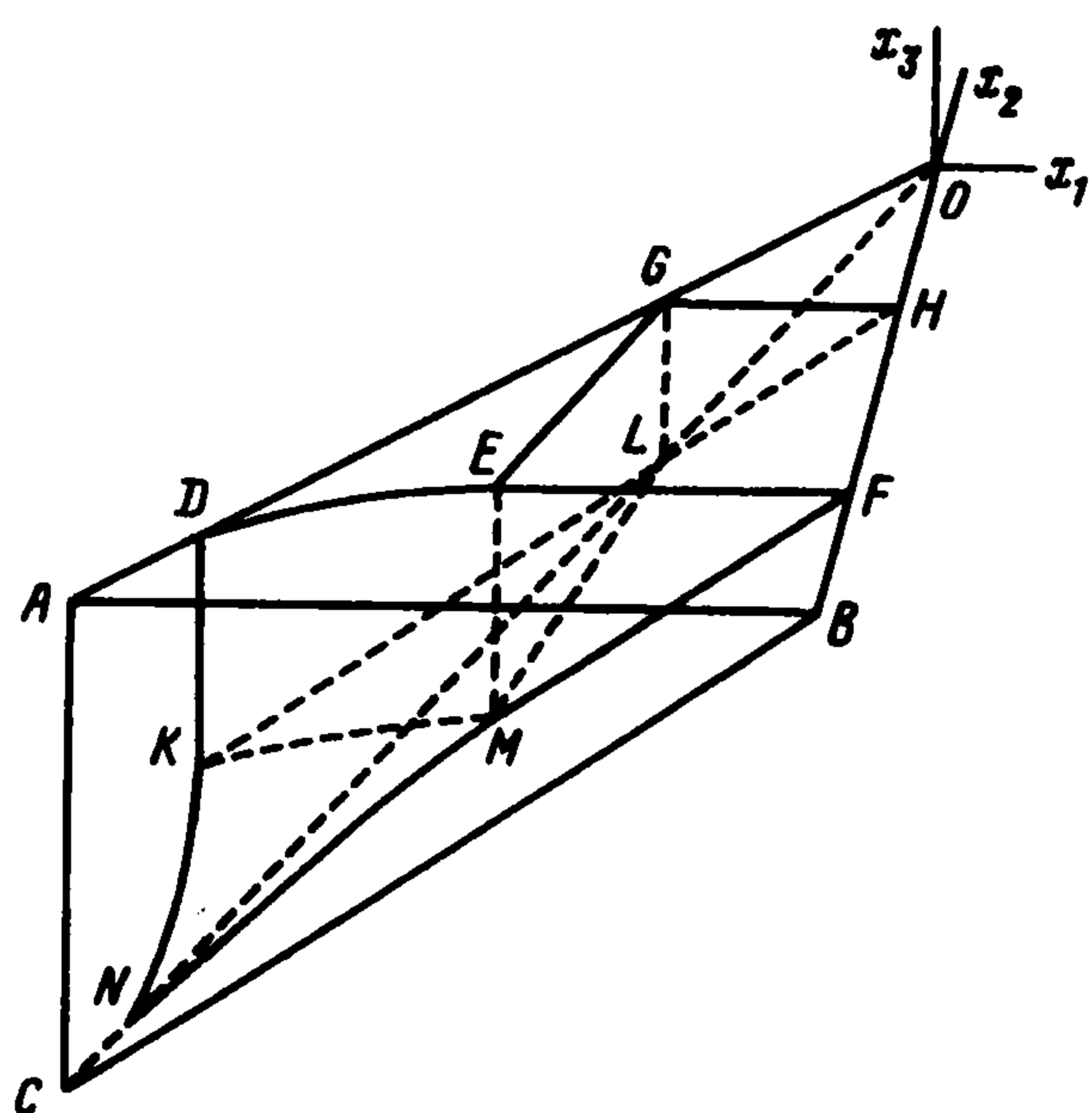
$$n_2 = -\frac{1}{\gamma}, \quad n_3 = -\frac{4}{3\gamma - 1}$$

Замечание. Необходимо уточнить формулы (2.1). Для фиксированной частицы газа имеем

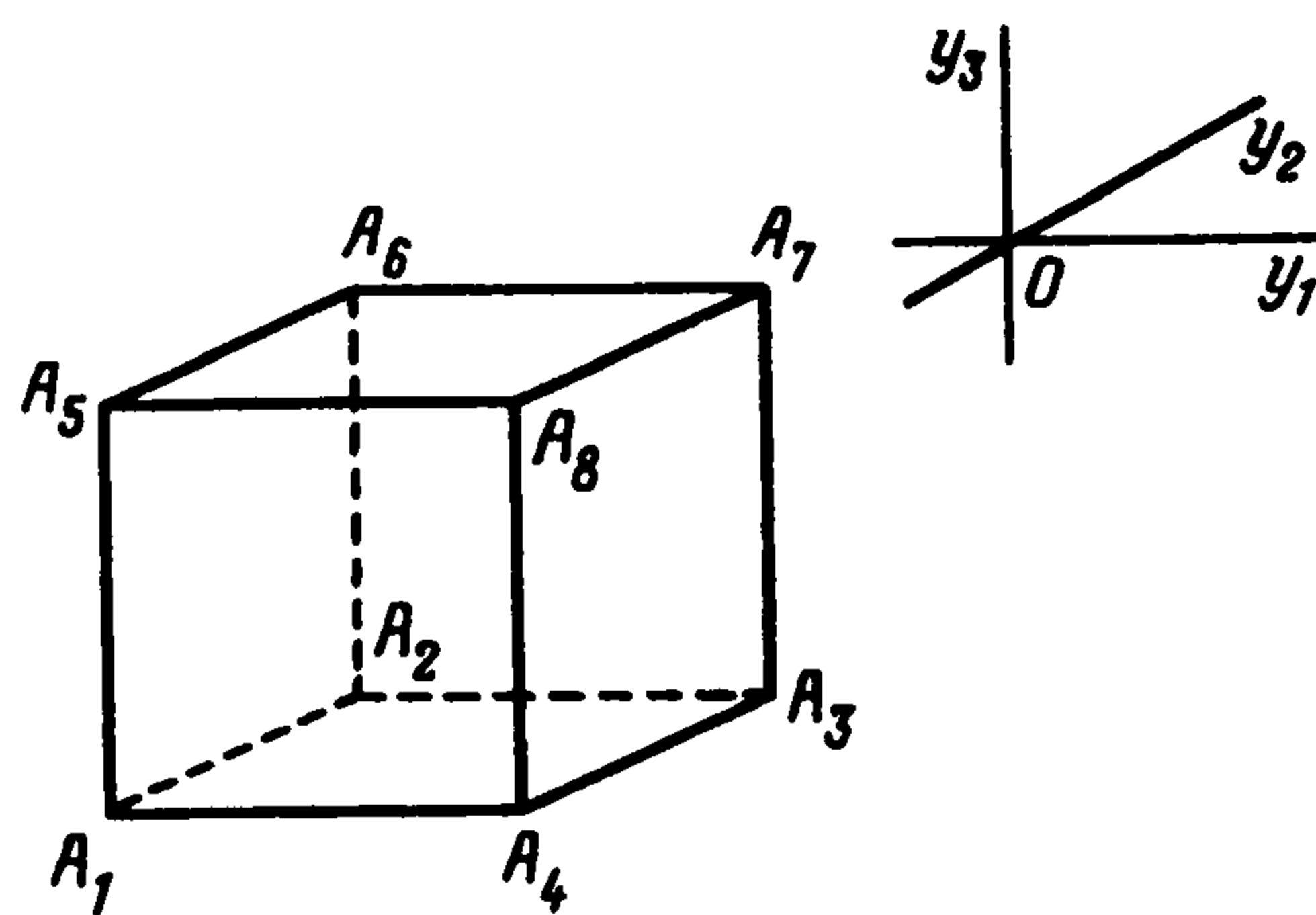
$$r \sim R(-\tau)^\eta, \quad \rho \sim D(-\tau)^{-v\eta}, \quad R, D = \text{const}$$

причем $0 \leq R \leq R_{\max}$. Если $r(\tau) \equiv 0$ (частица находится на оси или центре симметрии), то $\rho \equiv \rho_0$. Таким образом, видно, что сжатие газа сильно неравномерное. Можно показать, что учет неравномерности сжатия не изменяет приведенную оценку величины ОТ.

3. Автомодельное сжатие тетраэдра. В начальный момент времени $\tau = -1$ газ покоится внутри тетраэдра $ABCO$ (фиг. 1), грань ABC – начальное положение сжимающего поршня, остальные грани – неподвижные стенки, на которых выполняется условие непротекания. Геометрические параметры тетраэдра определяются величинами



Фиг. 1



Фиг. 2

ной показателя адиабаты ("согласованный" случай). Введем обозначения

$$g = \sqrt{\frac{\gamma+1}{3-\gamma}}, \quad h = \sqrt{\frac{\gamma+1}{(2-\gamma)(3-\gamma)}}$$

Треугольники ABC , AOC и BOC лежат в плоскостях $x_2 = -1$, $x_1 = gx_2$ и $hx_1 = gx_3$ соответственно. Уравнение ребра CO имеет вид $x_1 = gx_2 = (g/h)x_3$. Конфигурация сжимаемого объема в некоторый момент времени показана на фиг. 1. В тетраэдре $GHLO$ находится невозмущенный газ. В областях $EFMGHL$, $DGEKLM$ и $KLMN$ течения газа представляют собой простую, двойную и тройную автомодельные волны. В финальный момент времени ($\tau = 0$) газ сжимается в точку O . Точное решение задачи приведено ранее [2]. (Сжимаемый объем на фиг. 1 для наглядности сжат по оси Ox_3 , отрезок OC может быть существенно длиннее отрезка AB , так как длина OC неограниченно растет при $\gamma \rightarrow 2$.)

Траектории частиц. Для радиус-вектора частицы газа и ее вектора скорости введем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$. В тройной волне величины компонент вектора скорости определяют значение скорости звука

$$c = 1 + \mathbf{c}_u \mathbf{u} \quad (3.1)$$

(здесь имеется в виду произведение вектора-строки $\mathbf{c}_u = \sigma^{-1} (g, 1, h)$ на вектор-столбец $\mathbf{u}$, $\sigma = 2(\gamma - 1)^{-1}$). Течение газа определяется по неявным формулам

$$x_i/\tau = u_i + \sigma c \partial c / \partial u_i$$

которые можно записать в матричной форме

$$\mathbf{x}/\tau + \mathbf{x}^0 = A\mathbf{u} \quad (3.2)$$

где $\mathbf{x}^0$ – вектор-столбец, A – матрица 3×3 с постоянными коэффициентами. Матрица A подобна диагональной матрице B , т.е. существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$. В качестве преобразующей матрицы можно взять

$$T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2-\gamma} & -g^{-1} & \sqrt{2-\gamma} \\ 0 & 1 & h^{-1} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы матрицы B обозначим b_1, b_2, b_3 (это собственные числа матрицы A).

Перейдем к новой системе координат $Oy_1y_2y_3$, сделав линейную замену $y = T^{-1}x$, тогда соотношение (3.2) принимает вид

$$y/\tau + y^0 = Bv \quad (3.3)$$

$$v = \frac{dy}{d\tau}, \quad y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)^T = T^{-1}x^0$$

Траектории частиц определяются из системы

$$\frac{dy_i}{d\tau} = \frac{1}{b_i} \left(\frac{y_i}{\tau} + y_i^0 \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

$$b_1 = b_2 = 1, \quad b_3 = \frac{\gamma + 1}{2(2 - \gamma)}, \quad y_1^0 = y_2^0 = 0, \quad y_3^0 = h$$

Общее решение системы (3.4) имеет вид

$$y_i = k_i \tau, \quad k_i = \frac{y_i(\tau_0)}{\tau_0}, \quad i = 1, 2; \quad y_3 = \frac{y_3(\tau_0) - k\tau_0}{(-\tau_0)^b} (-\tau)^b + k\tau \quad (3.5)$$

$$k = \frac{y_3^0}{b_3 - 1}, \quad b = \frac{1}{b_3} \in (0, 1), \quad \tau_0 = \text{const}$$

Легко проверить, что ось Oy_3 совпадает с прямой CO . (Начало координат остается в точке O , а точка $C = (-g, -1, -h)$ в новой системе имеет координаты $(0, 0, -h)$.)

При проведении качественного анализа учитываются только те частицы, которые находятся в области тройной волны. (Будет показано, что учет остального объема газа не влияет на полученные оценки.)

Оценка плотности. В системе координат $Oy_1y_2y_3$ формула (3.1) принимает более компактный вид. Введем автомодельные переменные $\eta_i = y_i/\tau$, тогда

$$c = 1 + c_u T v = 1 + c_v v_3 = c_1 + c_\eta \eta_3 \quad (3.6)$$

$$c_v = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{3 - \gamma}{(\gamma + 1)(2 - \gamma)}}, \quad c_1 = 1 + c_v b h, \quad c_\eta = c_v b$$

Отсюда следует оценка для плотности

$$\rho = c^\sigma = D(\eta_3) \eta_3^\sigma, \quad D(\eta_3) = (c_1 / \eta_3 + c_\eta)^\sigma \quad (3.7)$$

$$0 < D_l \leq D(\eta_3) \leq D_g, \quad D_l, D_g = \text{const}$$

Оценка снизу для величины OT .

Утверждение 1. В момент τ_0 возьмем две частицы, координаты которых будем обозначать (y_{11}, y_{12}, y_{13}) и (y_{21}, y_{22}, y_{23}) . Если $y_{1i}(\tau_0) = y_{2i}(\tau_0)$, то при $\tau > \tau_0$ выполняется равенство $y_{1i}(\tau) = y_{2i}(\tau)$.

Доказательство очевидно.

Рассмотрим некоторый момент времени τ_0 . В области тройной волны выделим индивидуальный объем газа, имеющий форму куба $A_1 \dots A_8$ (фиг. 2), в котором расстояние между параллельными гранями равно r_0 , грани $A_1A_2A_3A_4$ и $A_5A_6A_7A_8$ параллельны плоскости Oy_1y_2 , грани $A_1A_5A_8A_4$ и $A_2A_6A_7A_3$ – плоскости Oy_1y_3 , грани $A_1A_5A_6A_2$ и $A_4A_8A_7A_3$ – плоскости Oy_2y_3 . Согласно формулам (3.5) и утверждению 1, в процессе сжатия этот объем будет принимать форму параллелепипеда, причем минимальное расстояние между двумя противоположными гранями будет равно $\tau r_0 / \tau_0$, здесь r_0 ,

$\tau_0 = \text{const}$. Согласно формулам (3.5), грань $A_5A_6A_7A_8$ движется по закону

$$y_3(\tau) = f(\tau) = \frac{y_3(\tau_0) - k\tau_0}{(-\tau_0)^b} (-\tau)^b + k\tau$$

Тогда для рассматриваемого объема

$$y_3(\tau) < f(\tau), \quad \eta_3(\tau) > f(\tau)/\tau$$

из оценки (3.7) следует, что в этом объеме

$$\rho \geq R_0(-\tau)^{\sigma(b-1)}, \quad R_0 = \text{const} > 0 \quad (3.8)$$

В качестве ОЦ возьмем центр параллелепипеда, расстояние от ОЦ до границы объема

$$r \geq r_0(2\tau_0)^{-1}\tau$$

На границе параллелепипеда возьмем точку T . Справедливо неравенство

$$\int_{ST} \rho ds \geq R_0(-\tau)^{\sigma(b-1)} \frac{r_0}{2\tau_0} \tau$$

Отсюда следует оценка снизу для величины ОТ

$$l \geq L_1(-\tau)^{n_1} \quad (3.9)$$

$$L_1 = \frac{R_0 r_0}{2\tau_0} = \text{const} > 0, \quad n_1 = \sigma(b-1) + 1 = \frac{\gamma-5}{\gamma+1} < -1$$

Используя оценку плотности (3.8), можно показать, что величина ОТ вдоль оси Oy_3 будет $O(\tau^{-2})$, $\tau \rightarrow 0$ (при данном выборе закона $S(\tau)$).

Оценки сверху для величины ОТ. Докажем, что в области тройной волны в направлении, перпендикулярном оси Oy_3 , наибольший возможный порядок роста ОТ равен $O(-\tau)^{n_1}$.

Замечание. В области $KLMN$ рассмотрим подобласть

$$y_3 > (h + 2\varepsilon)\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0 \quad (3.10)$$

которая примыкает к границе тройной волны. Из соотношения (3.6) следует, что существует постоянная $m > 0$ такая, что для любых y_1, y_2, y_3, τ если $y_3 > (h + 2\varepsilon)\tau$, то

$$\rho(y_1, y_2, y_3, \tau) = c^\sigma(y_1, y_2, y_3, \tau) < m$$

так как $\eta_3 = y_3/\tau < h + 2\varepsilon$. Таким образом, ОЦ не может находиться в области (3.10).

Рассмотрим сечение сжимаемого объема плоскостью, параллельной плоскости Oy_1y_2 , обозначим его P . В фиксированный момент времени плотность газа в этом сечении постоянна, ее величину обозначим ρ .

Утверждение 2. Пусть r_m – наибольший радиус окружности, находящейся в сечении P (т.е. все точки, находящиеся внутри окружности, принадлежат P). Тогда

$$l = \max_{S \in P} \min_{T \in \partial P} H(S, T) = \rho r_m$$

(∂P – граница сечения).

Доказательство. Если существует окружность, обладающая вышеуказанными свойствами, то очевидно, что $l \geq \rho r_m$. Предположим, что можно выбрать точку S_0 так, что

$$\min_{T \in \partial P} H(S_0, T) > \rho r_m$$

Рассмотрим окружность радиуса r_m с центром в точке S_0 . Согласно определению r_m , эта окружность в некоторой точке T_0 касается границы сечения, тогда $H(S_0, T_0) = \rho r_m$. Получили противоречие.

Пусть закон движения ОЦ

$$S(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau), z(\tau)), \quad z(\tau) = -q(\tau)(-\tau)^b < (h + 2\varepsilon)\tau$$

Введем обозначения: $P(\tau)$ – сечение, параллельное плоскости Oy_1y_2 , проходящее через точку $S(\tau)$, $r_m(\tau)$ – наибольший радиус окружности, находящейся в сечении $P(\tau)$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} l_P(\tau) &= \min_{T \in \partial P(\tau)} H(S(\tau), T) \leq -r_1(\tau)\tau D_g(q(\tau)(-\tau)^{b-1})^\sigma = \\ &= -D_g r_1(\tau) q^\sigma(\tau)(-\tau)^{n_t}, \quad r_1(\tau) = -r_m(\tau)/\tau \end{aligned}$$

Если существует $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$ такое, что $q(\tau) > \varepsilon_1$, то величина $r_1(\tau)$ ограничена.

Докажем, что если $\lim_{\tau \rightarrow 0} q(\tau) = 0$, то $\lim_{\tau \rightarrow 0} r_1(\tau) q^\sigma(\tau) = 0$. Тогда будет доказано, что в направлении, перпендикулярном оси Oz , наибольший возможный порядок роста ОТ равен $O((-\tau)^{n_t})$.

Рассмотрим следующий подвижный объем (который обозначим $\Omega_0(\tau)$): конус, основание которого – окружность радиуса $r_m(\tau)$ с центром в точке $S(\tau)$, а вершина конуса – точка $(0, 0, z_0)$, где $z_0 = h\tau$. Через $\Omega(\tau)$ обозначим усеченный конус, который получается из $\Omega_0(\tau)$ при введении сечения плоскостью, параллельной плоскости Oy_1y_2 , проходящей через точку $(0, 0, z_1)$, где $z_1 = (h + \varepsilon)\tau$. Масса газа, находящегося в области $\Omega(\tau)$, равна

$$m(\tau) = \iiint_{\Omega(\tau)} \rho dy_1 dy_2 dy_3 = \pi m_1, \quad m_1 = \int_z^{z_1} \rho \left(\frac{y_3}{\tau} \right) R^2(y_3, \tau) dy_3, \quad R(y_3, \tau) = \frac{r_m(\tau)}{z - z_0} (y_3 - z_0)$$

Определим

$$m_2 = D_l \int_z^{z_1} \left(\frac{y_3}{\tau} \right)^\sigma \left(\frac{r_m(\tau)}{z - z_0} (y_3 - z_0) \right)^2 dy_3 \leq m_1$$

Величина m_2 ограничена при любых τ . Далее,

$$\begin{aligned} m_2 &= D_l \int_z^{z_1} \left(\frac{y_3}{\tau} \right)^\sigma \left(\frac{r_m(\tau)}{z - z_0} (y_3 - z_0) \right)^2 dy_3 = \\ &= D_l (-\tau)^{2-\sigma} \left(\frac{r_1(\tau)}{z - z_0} \right)^2 \int_z^{z_1} (-y_3)^\sigma (y_3 - z_0)^2 dy_3 = \\ &= D_l (-\tau)^{2-\sigma} r_1^2(\tau) (-z)^{-2} \left(\frac{z_0}{z} - 1 \right)^{-2} \int_z^{z_1} (-y_3)^{\sigma+2} \left(\frac{z_0}{y_3} - 1 \right)^2 dy_3 \end{aligned}$$

Заметим, что для $y_3 \in [z, z_1]$ выполняются неравенства

$$\frac{z_0}{y_3} - 1 \leq \frac{z_0}{z_1} - 1 < \frac{h}{h + \varepsilon} - 1 < 0$$

Отсюда следует, что величина

$$\begin{aligned} m_3 &= (-\tau)^{2-\sigma} r_1^2(\tau)(-z)^{-2} \int_z^{z_1} (-y_3)^{\sigma+2} dy_3 = \\ &= (-\tau)^{2-\sigma} r_1^2(\tau)(-z)^{-2} \frac{1}{\sigma+3} ((-z)^{\sigma+3} - (-z_1)^{\sigma+3}) = \\ &= \frac{1}{\sigma+3} (-\tau)^{2-\sigma} r_1^2(\tau)(-z)^{\sigma+1} \left(1 - \left(\frac{z_1}{z} \right)^{\sigma+3} \right) \end{aligned}$$

ограничена.

Аналогично

$$\frac{z_1}{z} < \frac{h+\varepsilon}{h+2\varepsilon} < 1$$

Следовательно, величина

$$m_4 = (-\tau)^{2-\sigma} r_1^2(\tau)(-z)^{\sigma+1} = (-\tau)^{2-\sigma+b(\sigma+1)} r_1^2(\tau) q^{\sigma+1}(\tau) \quad (3.11)$$

ограничена. Показатель степени при $(-\tau)$ в формуле (3.11) равен нулю. Таким образом, получаем, что при любых τ величина $r_1^2(\tau) q^{\sigma+1}(\tau)$, а значит, и величина $r_1(\tau) q^{(\sigma+1)/2}(\tau)$ ограничены.

Учитывая соотношения

$$\frac{\sigma+1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} < \frac{2}{\gamma-1} = \sigma$$

делаем вывод, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} r_1(\tau) q^{\sigma}(\tau) = 0$$

Учет влияния области двойной волны на величину ОТ. Сначала предположим, что ОЦ находится в области тройной волны. Обозначим через r_2 расстояние от выбранной частицы газа до начала координат. В области двойной волны при $\tau \rightarrow 0$ выполняется асимптотическое соотношение [2]

$$r_2 \sim (-\tau)^{-n_p}, \quad n_p = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}$$

Для того чтобы область двойной волны оказала влияние на величину ОТ в направлении, перпендикулярном оси Oy_3 , необходимо, чтобы величина r_2/z была ограничена (здесь z – координата y_3 точки $S(\tau)$). Предположим, что это требование выполнено. Найдем оценку сверху для величины ОТ в направлении, параллельном оси Oy_3 .

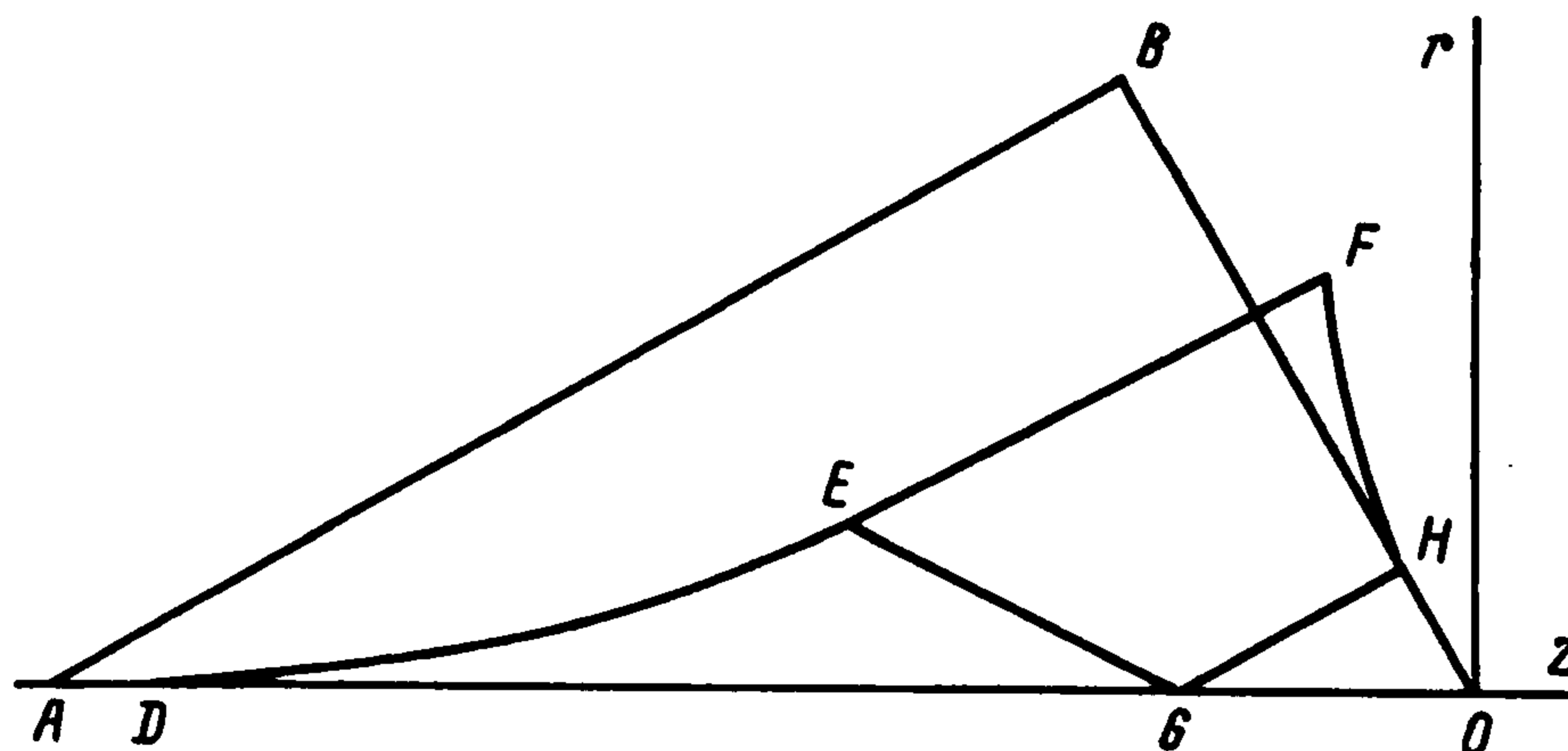
Предположим, что при $\tau \rightarrow 0$ справедливо соотношение $z \sim (-\tau)^{-n_p}$, тогда

$$\eta_3 = z/\tau \sim (-\tau)^{-n_p-1}, \quad \rho \sim c_{\eta}^{\sigma} (-\tau)^{(-n_p-1)\sigma}$$

Получаем оценку ОТ

$$l \sim \rho z \sim c_{\eta}^{\sigma} (-\tau)^{(-n_p-1)\sigma-n_p} = c_{\eta}^{\sigma} (-\tau)^{-1}$$

Если предположить, что ОЦ находится в области двойной волны, проводя аналогичные рассуждения, получаем, что наибольший порядок роста ОТ для направлений, параллельных плоскости ABO , равен $O((-\tau)^{-1})$.



Фиг. 3

Таким образом, в случае сжатия тетраэдра ОТ подчиняется оценке

$$l = L(\tau)(-\tau)^{n_l}, \quad 0 < L_1 \leq L(\tau) \leq L_2 \quad (3.12)$$

$$L_1, L_2 = \text{const}, \quad -2 < n_l < -1$$

4. Процесс конического сжатия. В начальный момент времени $\tau = -1$ газ находится внутри тела вращения, образующая которого – прямоугольный треугольник ABO (фиг. 3), угол $ABO = \pi/2$. Течение газа симметрично относительно оси Oz , причем "окружная" компонента скорости равна нулю. Будет рассмотрен только "согласованный" случай, когда показатель адиабаты определяет начальную геометрию сжимаемого объема. Величину угла OAB обозначим α , причем [4] $\text{tg}^2 \alpha = (2 - \gamma)/(\gamma + 1)$. Линия ABO – начальное положение сжимающего поршня, который в некоторый момент времени $\tau \in (-1, 0)$ принимает вид $DEFHO$. В это время в треугольнике GHO находится невозмущенный газ. Длину отрезка BO выбираем равной единице; таким образом, в момент $\tau = 0$ звуковое возмущение приходит в точку O , и в это время весь газ сжимается в точку O . Потенциал скорости был найден [3, 4] в классе автомодельных решений

$$\Phi(z, r, \tau) = (\tau + 1)K - \tau\Psi(\xi, \eta), \quad K = \text{const} > 0$$

(автомодельные переменные $\xi = z/\tau$, $\eta = r/\tau$). Компоненты вектора скорости $u_1 = \Phi_z = -\Psi_\xi$, $u_2 = \Phi_r = -\Psi_\eta$, квадрат скорости звука равен

$$c^2 = (\gamma - 1)(\Psi - \xi\Psi_\xi - \eta\Psi_\eta - (\Psi_\xi^2 + \Psi_\eta^2)/2) \quad (4.1)$$

В области DEG (EG – характеристика, фиг. 3) построено точное решение

$$\Psi = \Gamma - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2); \quad \Gamma = \mu^2 A(\lambda), \quad A(\lambda) = \frac{3}{4} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 + \cos 2\lambda)$$

$$\xi + \xi_0 = \mu \cos \lambda, \quad \eta = \mu \sin \lambda$$

$$\xi_0 = ((\gamma - 1)A(0)(1 - 2A(0)))^{-1/2} - (\sin \alpha)^{-1}$$

где μ, λ – полярные координаты.

В области $EFHG$ численно решается краевая задача с данными на характеристиках EG и GH . Далее учитывается только область DEG .

Функцию Ψ представим в виде

$$\Psi = (\zeta^2 + \eta^2)A\left(\arctg \frac{\eta}{\zeta}\right) - \frac{1}{2}((\zeta - \xi_0)^2 + \eta^2)$$

$$\zeta = \xi + \xi_0 = (z + \tau\xi_0)\tau^{-1}$$

и вычислим ее частные производные

$$\Psi_{\xi} = (2A - 1)\xi - \frac{dA}{d\lambda}\eta + \xi_0, \quad \Psi_{\eta} = (2A - 1)\eta + \frac{dA}{d\lambda}\xi \quad (4.2)$$

Найдем траектории частиц как функции от τ , τ_0 , z_0 , r_0 (времени, начального момента времени, начального положения). Из соотношений (4.2) следуют уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{bz}{\tau} + (b - 1)\xi_0, \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{r}{\tau} \quad (4.3)$$

решая которые, находим

$$z(\tau) = C_1(-\tau)^b - \tau\xi_0, \quad r = C_2\tau, \quad C_1, C_2 = \text{const} \quad (4.4)$$

Постоянные интегрирования определяются из условия непрерывного примыкания к области $EFHG$, для которой известно только численное решение.

Оценка плотности и ОТ. Используя соотношения (4.1) и (4.3), получаем представление для квадрата скорости звука

$$c^2 = (\gamma - 1) \left(A\xi^2 + A\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2 + b\xi^2 - \frac{1}{2}b^2\xi^2 \right) = B(\lambda)\xi^2$$

$$B(\lambda) = A(\lambda)\text{tg}^2 \lambda + A(\lambda) + b - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b^2 = \frac{3(\gamma - 1)(2 - \gamma)}{(\gamma + 1)^2} > 0$$

Скорость звука и плотность зависят только от переменной ξ :

$$\rho(\xi, \eta) = c^\sigma = (\xi B)^\sigma \quad (4.5)$$

Формулы для траекторий частиц газа (4.4) и оценка для плотности (4.5) аналогичны соответствующим формулам (3.5) и (3.7). Далее процедура получения асимптотических оценок практически дословно повторяет способ, изложенный в разделе о сжатии тетраэдра.

Таким образом, в случае сжатия тел конической формы ОТ подчиняется оценке (3.12); при этом предполагается, что учет части сжимаемого объема, для которой известно только численное решение, не изменит указанную оценку.

Ранее аналогичные оценки были получены для сжатия цилиндра, сферы, а также для автотомельного и неавтотомельного сжатия призмы [5, 6], отличающиеся значением показателя степени при $-\tau$ (для разных режимов сжатия, вообще говоря, различные значения n_v). Далее вместо равенства (3.12) будем использовать сокращенную запись

$$l \sim (-\tau)^{n_v} \quad (4.6)$$

При $1 < \gamma < 2$ выполняются неравенства

$$n_t = n_c < n_3 < n_2 < n_p = \frac{\gamma - 3}{\gamma + 1} < 0$$

где n_t , n_c , n_3 , n_2 , n_p – показатели степени в формуле (4.6), соответствующие сжатию тетраэдра, конуса, сферы, цилиндра и призмы.

5. Сравнение энергетических затрат при получении больших величин ОТ. В предыдущем разделе было показано, что процессы сжатия конуса и тетраэдра обладают наибольшим порядком роста величины ОТ (l). Однако порядок затрат энергии (E) при таком сжатии тоже больше, чем при других рассмотренных режимах сжатия, поэтому интересно получить оценку для величины l/E , которая будет характеризовать экономичность получения больших величин ОТ.

Используя полученные ранее оценки затрат энергии для сжатия цилиндра и сферы [1] $E \sim (-\tau)^{-\eta(\gamma-1)}$, $\eta = 2/[v(\gamma-1) + 2]$, призмы [2, 6] $E \sim (-\tau)^{-4(\gamma-1)/(\gamma+1)}$, тетраэдра и конуса [3, 7] $E \sim (-\tau)^{-6(\gamma-1)/(\gamma+1)}$, проведем сравнение показателей a_v в формуле

$$l/E \sim (-\tau)^{a_v}$$

$$a_2 = \frac{2\gamma-3}{\gamma}, \quad a_3 = 2\frac{3\gamma-5}{3\gamma-1}, \quad a_c = a_t = \frac{7\gamma-11}{\gamma+1}, \quad a_p = \frac{5\gamma-7}{\gamma+1}$$

Индекс $v = 2, 3, c, t, p$ соответствует сжатию цилиндра, сферы, конуса, тетраэдра и призмы.

Чем меньше величина a_v , тем экономичнее режим сжатия. Справедливы следующие неравенства:

$$a_2 > a_3 \text{ при } \gamma < 3,$$

$$a_2 > a_c \text{ при } \gamma < 1 + \sqrt{2/5},$$

$$a_p > a_2$$

$$a_3 > a_c = a_t \text{ при } \gamma < 7/5,$$

$$a_p > a_c = a_t \text{ при } \gamma < 2.$$

Таким образом, процессы сжатия конуса и тетраэдра только для некоторых интервалов значений показателя адиабаты более экономичны (с точки зрения получения больших значений ОТ) по сравнению с процессами сжатия цилиндра и сферы.

Следует отметить ограниченность оценок, основанных только на асимптотических формулах, так как выход на асимптотику достаточно медленный [8, 9].

Автор благодарен А.Ф. Сидорову за постановку задачи и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00326, 99-01-00378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М: Наука, 1988. 172 с.
2. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // Докл. АН СССР 1991. Т. 318. № 3. С. 548–552.
3. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 81–92.
4. Сидоров А.Ф. Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 2. С. 199–202.
5. Сидоров А.Ф. Кумуляция энергии в двумерных процессах безударного сжатия идеального газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 1. С. 41–44.
6. Кукушкин В.А. О двумерном взаимодействии волн сжатия Римана // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 431–443.
7. Sidorov A.F. Mathematical modelling of the processes of unshocked gas compression // Russ. J. Numer. Analysis and Math. Modelling. 1995. V. 10. № 3. P. 255–276.
8. Крайко А.Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 1000–1007.
9. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // ТВТ. 1998. Т. 36. № 1. С. 120–128.

Екатеринбург
e-mail: kva@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
4. VIII. 1999