

УДК 533.6

© 2000 г. С.В. Головин

О ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ АДИАБАТЫ

В рамках программы ПОДМОДЕЛИ [1] исследуется инвариантная подмодель двумерных уравнений газовой динамики, построенная на операторе, являющемся комбинацией операторов сдвига по времени, вращения и проективного. Построена каноническая форма подмодели, проведен ее предварительный анализ (групповое свойство, область гиперболичности, первые интегралы). Подробно изучено автомодельное решение подмодели. Оно определяет решения рассматриваемой подмодели с замкнутыми инвариантными линиями тока. На основе иерархии подмоделей получены первые интегралы в подмодели "второго уровня". Дано качественное описание характера движения (контактные характеристики, траектории частиц). Показано, что решение обладает дискретной симметрией – инвариантностью относительно поворота вокруг начала координат на угол, кратный $2\pi/N$ с некоторым натуральным N . Отмечено, что при некоторых значениях параметров решения этого типа описывают движение газа с областями вакуума. Особенности полученных течений иллюстрируются на примерах – точных решениях уравнений газовой динамики, описывающих растекание газа до вакуума за бесконечное время.

Другая подмодель, при построении которой также существенно используется проективная симметрия, подробно рассматривалась ранее [2].

1. Предварительные сведения. В полярной системе координат рассматриваются двумерные уравнения газовой динамики (УГД) для политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$

$$\begin{aligned} D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p &= r^{-1}(v^2, -uv), \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad DS = 0 \\ p &= S\rho^2, \quad D = \partial_t + u\partial_r + r^{-1}v\partial_\theta \\ \nabla &= (\partial_r, r^{-1}\partial_\theta), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = u_r + r^{-1}u + r^{-1}v_\theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u – радиальная и v – тангенциальная компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$, ρ – плотность, p – давление, S – энтропия. Перечисленные функции зависят от полярных координат (r, θ) и времени t .

Известно [3, 4], что уравнения (1.1) допускают 10-мерную алгебру Ли L_{10} , являющуюся расширением алгебры Галилея двумя растяжениями и проективным оператором. Необходимо отметить, что проективный оператор допускается УГД только для выбранного показателя адиабаты. Следуя А.А. Никольскому [5], такой показатель адиабаты ($\gamma = 2$ для двумерных и $\gamma = 3$ для одномерных движений) называется специальным.

Исследуется инвариантная подмодель уравнений (1.1), построенная по оператору

$$X = (t^2 + 1)\partial_t + tr\partial_r + a\partial_\theta + (r - tu)\partial_u - tv\partial_v - 4tp\partial_p - 2tr\partial_\rho$$

($a \geq 0$ – произвольный вещественный параметр, при разных значениях a оператор X

порождает несопряженные в L_{10} подалгебры). В соответствии с описанным ранее алгоритмом¹ представление инвариантного решения записывается в виде

$$u = \frac{\bar{u}(\lambda, \varphi) + t\lambda}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad v = \frac{(\bar{v}(\lambda, \varphi) + a)\lambda}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad p = \frac{\bar{p}(\lambda, \varphi)}{(t^2 + 1)^2}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}(\lambda, \varphi)}{t^2 + 1} \quad (1.2)$$

$$S = \bar{S}(\lambda, \varphi), \quad \lambda = r / \sqrt{t^2 + 1}, \quad \varphi = \theta - a \operatorname{arctg} t$$

Подстановка представления решения (1.2) в систему (1.1) дает каноническую форму подмодели

$$\bar{D}\bar{u} + \bar{p}_\lambda / \bar{\rho} = ((a + \bar{v})^2 - 1)\lambda, \quad \bar{D}\bar{v} + \bar{p}_\varphi / (\bar{\rho}\lambda^2) = -2(a + \bar{v})\bar{u} / \lambda \quad (1.3)$$

$$\bar{D}\bar{\rho} + \bar{\rho}(\bar{u}_\lambda + \bar{v}_\varphi) = -\bar{\rho}\bar{u} / \lambda, \quad \bar{D}\bar{S} = 0, \quad \bar{p} = \bar{S}\bar{\rho}^2, \quad \bar{D} = \bar{u}\partial_\lambda + \bar{v}\partial_\varphi$$

2. Анализ подмодели. Первые интегралы. Третье уравнение (1.3) позволяет ввести инвариантную функцию тока $\psi(\lambda, \varphi)$ соотношениями

$$\psi_\lambda = -\lambda\bar{v}\bar{\rho}, \quad \psi_\varphi = \lambda\bar{u}\bar{\rho} \quad (2.1)$$

Тогда из уравнений для компонент скорости стандартной процедурой получаем инвариантные интегралы Бернулли и энтропии

$$\bar{u}^2 + \lambda^2\bar{v}^2 + (1 - a^2)\lambda^2 + 4\bar{S}\bar{\rho} = F(\psi), \quad \bar{S} = S(\psi) \quad (2.2)$$

с произвольными функциями F и S . Завихренность ω для УГД в полярной системе координат записывается в виде

$$\omega = -r^{-1}u_\theta + v_r + r^{-1}v$$

Вводится инвариантная завихренность

$$\bar{\omega} = \lambda\bar{v}_\lambda + 2(\bar{v} + a) - \lambda^{-1}\bar{u}_\varphi, \quad \omega = \bar{\omega} / (t^2 + 1)$$

Справедлив инвариантный интеграл завихренности

$$\bar{\omega} - S'\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}G(\psi) \quad (S' = dS / d\psi) \quad (2.3)$$

(G – произвольная функция).

Система (1.3) имеет смешанный эллиптико-гиперболический тип. Характеристики отыскиваются в виде $h(\lambda, \varphi) = \text{const}$. Оказывается, что всегда есть двукратная характеристика $\bar{u}h_\lambda + \bar{v}h_\varphi = 0$ и возможны еще две характеристики, определяемые равенством

$$(\bar{u}h_\lambda + \bar{v}h_\varphi)^2 - \bar{c}^2(h_\lambda^2 + \lambda^{-2}h_\varphi^2) = 0 \quad (2.4)$$

(здесь $\bar{c}^2 = 2\bar{p}/\bar{\rho}$ – квадрат инвариантной скорости звука). Для того чтобы квадратичная форма по h_λ и h_φ в левой части (2.4) не была знакоопределена, необходимо, чтобы определитель матрицы этой квадратичной формы был отрицателен. Проверка этого требования приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. Система (1.3) гиперболична в области, определяемой неравенством

$$\bar{c}^2 < \bar{u}^2 + \bar{v}^2\lambda^2 \quad (2.5)$$

¹ Овсянников Л.В. Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики: Препринт № 3-97. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1997. 41 с.

3. Групповое свойство. Автомодельное решение. Групповая классификация подмодели (1.3) по параметру a показывает, что при всех значениях параметра допускаемая алгебра Ли изоморфна факторалгебре $\text{Nor}_{L_{10}}\{X\}/\{X\}$ (здесь запись $\{X\}$ обозначает алгебру Ли, порожденную оператором X). А именно при $a \neq 1$ подмодель (1.1) допускает операторы

$$H_1 = \partial_\varphi, \quad H_2 = \lambda \partial_\lambda + \bar{u} \partial_{\bar{u}} - 2\bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}}, \quad H_3 = \bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}}$$

а при $a = 1$ еще и

$$H_4 = \cos \varphi \partial_\lambda - \lambda^{-1} \sin \varphi \partial_\varphi - \bar{v} \sin \varphi \partial_{\bar{u}} + (\lambda^{-2} \bar{u} \sin \varphi - \lambda^{-1} \bar{v} \cos \varphi) \partial_{\bar{v}}$$

$$H_5 = \sin \varphi \partial_\lambda + \lambda^{-1} \cos \varphi \partial_\varphi + \bar{v} \cos \varphi \partial_{\bar{u}} - (\lambda^{-2} \bar{u} \cos \varphi + \lambda^{-1} \bar{v} \sin \varphi) \partial_{\bar{v}}$$

Далее рассматривается автомодельная подмодель подмодели (1.3), порожденная оператором растяжения

$$\bar{H} = \lambda \partial_\lambda + \bar{u} \partial_{\bar{u}} + k \bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}} + (k-2) \bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}}$$

(k – произвольный вещественный параметр). Подстановка представления решения

$$\begin{aligned} \bar{u} &= U(\varphi) \lambda, \quad \bar{v} = V(\varphi), \quad \rho = P(\varphi) \lambda^k \\ \bar{\rho} &= R(\varphi) \lambda^{k-2}, \quad \bar{S} = s(\varphi) \lambda^{-k+4} \end{aligned} \quad (3.1)$$

в уравнения (1.3) дает уравнения подмодели:

$$\begin{aligned} VV' + P'/R &= -2(V+a)U, \quad VU' = (V+a)^2 - 1 - U^2 - kP/R \\ (VR)' &= -kRU, \quad Vs' = (k-4)Us \end{aligned} \quad (3.2)$$

Замечание 1. Можно проверить, что "двухшаговую" подмодель (3.2) (подмодель для подмодели (1.3)) можно получить непосредственно из УГД как "одношаговую", рассматривая инвариантное решение уравнений (1.1) по подалгебре, порождаемой операторами X и H , где

$$H = r \partial_r + u \partial_u + v \partial_v + k \rho \partial_\rho + (k-2) \rho \partial_\rho$$

Этот факт является иллюстрацией леммы Ли–Овсянникова–Талышева [6] об иерархии инвариантных подмоделей. Оказывается, что, помимо классификационной, он обладает и практической ценностью, а именно имеется возможность "унаследовать" первые интегралы подмодели (1.3).

Рассмотрим уравнения для функции тока (2.1). Подстановка представления решения (3.1) дает

$$\psi_\lambda = -\lambda^{k-1} V(\varphi) R(\varphi), \quad \psi_\varphi = \lambda^k U(\varphi) R(\varphi) \quad (3.3)$$

В случае $k \neq 0$ в силу третьего уравнения (3.2) отсюда получим с точностью до несущественных постоянных

$$\psi = \lambda^k |VR| \quad (3.4)$$

В случае $k = 0$ интегрируя первое уравнение (3.3) по λ , находим

$$\psi = -\ln |\lambda| V(\varphi) R(\varphi) + \psi_0(\varphi)$$

Подстановка во второе уравнение (3.3) дает

$$-\ln |\lambda| (VR)' + \psi'_0 = UR$$

Но так как при $k = 0$ из уравнений подмодели (3.2) следует $(VR)' = 0$, то

$$\psi_0 = \int U(\varphi) R(\varphi) d\varphi$$

Из последнего уравнения (3.2) имеем $UR = -VRs'/(4s)$. Тогда в силу $(VR)' = 0$ с точно-

стью до несущественной аддитивной постоянной

$$\psi_0 = -\frac{1}{4} VR \ln s$$

а значит, в качестве функции тока можно выбрать

$$\psi = \ln(s\lambda^4) \quad (3.5)$$

Имея представление для функции тока, можно определить конкретный вид произвольных функций S и F , входящих в первые интегралы системы (1.3). Получаем энтропийный интеграл

$$s^k = S_0 |VR|^{4-k}$$

и интеграл Бернулли (α – произвольная постоянная)

$$U^2 + V^2 + 4sR + (1 - a^2) = \begin{cases} \alpha |VR|^{2/k}, & k \neq 0 \\ \alpha \sqrt{s}, & k = 0 \end{cases}$$

Удобно ввести в рассмотрение квадрат инвариантной скорости звука $Z(\varphi)$

$$c^2 = Zr^2/(t^2 + 1)^2, \quad Z(\varphi) = 2P/R$$

При этом уравнения подмодели (3.2) таковы:

$$\begin{aligned} (Z - V^2)V' &= -(k/2 + 2)ZU + 2(V + a)UV \\ VU' &= (V + a)^2 - 1 - U^2 - kZ/2 \\ (Z - V^2)Z' &= (k - 4)Z^2U/(2V) + 2(V - a)UZ \\ Vs' &= (k - 4)Us \end{aligned} \quad (3.6)$$

Последнее уравнение отщепляется и может решаться независимо после того, как U и V определены из первых трех уравнений.

С использованием функции $Z(\varphi)$ можно переписать найденные интегралы в виде

$$s = S_0 |VZ|^{1-k/4} \quad (3.7)$$

$$U^2 + V^2 + 2Z + (1 - a^2) = \alpha \sqrt{|VZ|} \quad (3.8)$$

Из последнего интеграла видно существенное различие характера описываемого течения при $a^2 \geq 1$ и $a^2 < 1$. При $a^2 < 1$ поверхность (3.8) в пространстве (U, V, Z) всегда лежит в полупространстве $Z > 0$, причем отделена от плоскости $Z = 0$. Таким образом, во всей области течения функция Z , а вместе с ней и инвариантная плотность R являются положительными. В то же время при $a = 1$ поверхность (3.8) проходит через точку $(U, V, Z) = (0, 0, 0)$, а при $a > 1$ может пересекать плоскость $Z = 0$, что означает появление областей вакуума в области течения газа.

4. Контактные характеристики. Описание движения. Уравнение $\psi = \text{const}$ определяет инвариантные линии тока для подмодели (1.3). Стандартная линия тока задается уравнением

$$\lambda = |V(\varphi)Z(\varphi)|^{-1/4} \quad (4.1)$$

все остальные ей гомотетичны. Заметим, что в силу определения переменной φ функции Z и V должны быть периодичны с полупериодом $T = \pi/N$ (N – целое число), иначе решение не будет непрерывным на всей плоскости (r, θ) . А отсюда и из (4.1) немедленно получаем, что при $V \neq 0$ подмодель (3.2) определит решения (1.3) с замкнутыми инвариантными линиями тока. Аналогичные течения с замкнутыми линиями тока для уравнений газовой динамики и идеальной несжимаемой жидкости

были получены ранее [7, 8]. Очевидно, что и само решение (3.2) и линия тока (4.1) обладают дискретной симметрией – инвариантностью относительно поворота в плоскости (λ, φ) на угол $2\pi/N$ относительно начала координат. Далее покажем, чему соответствуют инвариантные линии тока (4.1) в "физическом" пространстве.

Уравнения траектории частицы, стартующей в начальный момент $t = 0$ из положения (r_0, θ_0) , находятся как решение задачи Коши (использована подстановка представления решения)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(U+t)r}{t^2+1}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{t^2+1}, \quad r(0) = r_0, \quad \varphi(0) = \theta_0 \quad (4.2)$$

Замечание 2. Для дифференцируемой функции $V(\varphi)$ имеем: если $V(\varphi_*) = 0$ для некоторого $\varphi = \varphi_*$, то и вдоль всей мировой линии, проведенной через точку (t, r, φ_*) , выполнено равенство $V(\varphi) = 0$. И наоборот, если для некоторого $\varphi = \varphi_*$ имеем $V(\varphi_*) \neq 0$, то $V(\varphi) \neq 0$ вдоль всей мировой линии, проведенной через точку (t, r, φ_*) . Более того, плоскость $\varphi = \varphi_*$: $V(\varphi_*) = 0$ является контактной характеристикой. Доказательство следует из теоремы единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Интегралом первого уравнения (4.2) является уравнение $\psi = \text{const}$, которое в силу равенства

$$D\psi = 0, \quad D = \partial_t + u\partial_r + r^{-1}\partial_\theta$$

является контактной характеристикой на решениях, описываемых данной подмоделью. Переписывая уравнение $\psi = \text{const}$ в исходных переменных, получаем

$$r = \frac{A\sqrt{t^2+1}}{|VZ|^{1/4}}, \quad A = r_0 |V(\theta_0)Z(\theta_0)|^{1/4} \quad (4.3)$$

Таким образом, инвариантным линиям тока $\psi = \text{const}$ в "физическом" пространстве $R^3(t, r, \theta)$ соответствует семейство поверхностей, являющихся контактными характеристиками УГД на решениях подмодели (3.2). Поверхности этого семейства получаются из одной стандартной с $A = 1$ преобразованием растяжения $r \rightarrow Ar$ с надлежащим параметром A .

Для того чтобы получить ее линию уровня $t = t_0$, нужно линию тока (4.1) повернуть на угол $a \arctg t_0$ против часовой стрелки и растянуть в $\sqrt{t_0^2+1}$ раз относительно начала координат. В частности, линия уровня $t_0 = 0$ в точности совпадает с линией тока (4.1).

Второе уравнение (4.2) интегрируется в квадратурах:

$$t = \text{tg } \tau(\varphi, \theta_0), \quad \tau(\varphi, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\varphi} \frac{d\xi}{V(\xi)} \quad (4.4)$$

В силу замечания 2 $\tau(\varphi, \theta_0)$ – монотонная функция от φ , а значит, функция $\varphi(t, \theta_0)$, получаемая обращением равенства (4.4), также будет монотонной и, как можно заметить, ограниченной по t . Возвращаясь в силу (1.2) к физическим переменным, находим уравнение поверхностей – контактных характеристик УГД, общего положения по отношению к семейству (4.3):

$$\theta(t, \theta_0) = \varphi(t, \theta_0) + a \arctg t \quad (4.5)$$

Поверхности этого семейства заматаются лучом, вершина которого равномерно движется по оси t , а сам он поворачивается по закону $\theta = \theta(t, \theta_0)$, оставаясь параллельным плоскости $t = 0$. В частности, отсюда следует, что если в какой-нибудь

момент времени частицы находятся на одном луче, выпущенном из начала координат, то и при любом t они также находятся на одном луче.

Мировая линия каждой частицы получается как пересечение соответствующих контактных характеристик (4.3) и (4.5). А значит, движение каждой частицы складывается из двух составляющих – движение вдоль луча и вращение вместе со своим лучом. За первую часть отвечает формула (4.3), за вторую – формула (4.5).

В силу леммы о плотности ([9], с. 157) в непрерывном движении линия, на которой $\rho = 0$ (линия вакуума) является контактной характеристикой. Таким образом, если в точке (t_0, r_0, θ_0) плотность отлична от нуля, то и на всей мировой линии, проведенной из этой точки, плотность, давление и скорость звука не могут обратиться в нуль. А отсюда, из замечания 2 и формулы (4.3) следует, что частицы уходят на бесконечное расстояние от начала координат за бесконечное время.

Инвариантная завихренность $\Omega(\varphi)$ вводится соотношениями

$$\omega = \Omega/(t^2 + 1), \quad \Omega = 2(V + a) - U'$$

С использованием второго уравнения (3.6) и интеграла Бернулли (3.8) получаем

$$\Omega = \frac{\alpha\sqrt{VZ} + (k/2 - 2)Z}{V} \quad (4.6)$$

Далее, из уравнений (3.6) находим

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{(k-4)Z^2 + 4(V-a)VZ}{4(V+a)V^2 - (k+4)VZ} \quad (4.7)$$

При $a = 0$ это уравнение интегрируется в виде

$$V^{k-4}Z^{3k+4} = \beta(-4V^2 + (3k+4)Z)^{2k}, \quad \beta = \text{const}$$

а в противном случае заменой $h = Z/(aV)$ сводится к уравнению Бернулли, решение которого выражается через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + 1/k, \frac{1}{2}; kh/2)$. При частном значении параметра $k = 4$ решение уравнения (4.7) можно выразить через элементарные функции:

$$4Z^2 + \beta V^2 - 4aVZ - 4\beta Z + 2a\beta V + a^2\beta = 0, \quad \beta = \text{const} \quad (4.8)$$

Замечание 3. Разумеется, возможны и другие значения параметров, при которых решение уравнения (4.7) выражается в элементарных функциях. Например, при $k = -4$ его интеграл имеет вид

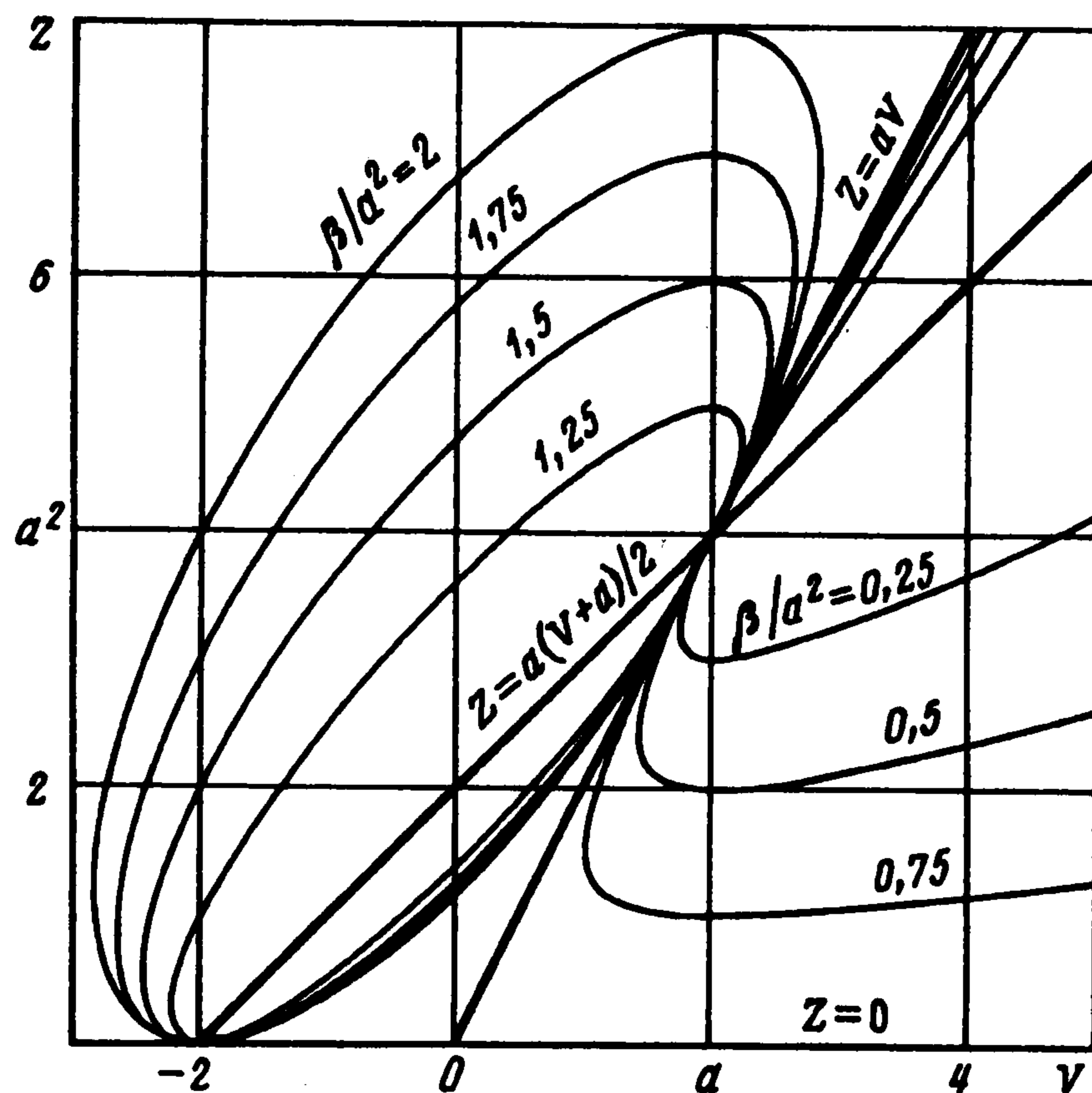
$$V^2Z = \beta(2VZ + aZ + V(V-a)^2), \quad \beta = \text{const}$$

Однако в рамках данной работы они не рассматриваются.

5. Частные решения. Метод дальнейшего изучения системы (3.6) иллюстрируется при частном значении параметра $k = 4$. Этот случай отвечает изэнтропическим течениям газа. Интеграл (4.8) при разных значениях параметра β дает семейство кривых второго порядка на фазовой плоскости (V, Z) : при $\beta > a^2$ имеем семейство эллипсов, при $\beta < a^2$ в случае $\beta \neq 0$ – гиперболы, при $\beta = 0$ – пара прямых $Z = 0$ и $Z = aV$. И наконец, при $\beta = a^2$ уравнение (4.8) вырождается и дает прямую

$$Z = a(V + a)/2 \quad (5.1)$$

Центр гипербол и эллипсов, получаемых при $\beta \neq a^2$, находится в точке $(V_0, Z_0) = (0, \beta/2)$. Кроме того, кривая (4.8) может иметь пересечения с осью $Z = 0$ только в тех случаях, когда она вырождается в прямую. Картина интегральных кривых (4.8) при разных значениях отношения β/a^2 приведена на фиг. 1.



Фиг. 1

В случаях, когда кривая (4.8) вырождается в прямую, возможно явное построение решения системы (3.6).

Случай $\beta = a^2$. Из уравнения (4.8) получаем зависимость (5.1) между квадратом инвариантной скорости звука Z и окружной компонентой скорости V . По определению $Z \geq 0$, т.е. $V \geq -a$ в силу $a \geq 0$. Подставляя выражения для z из (5.1) и для U из (3.8) в первое уравнение (3.6) и учитывая наложенные ранее ограничения на параметры, получаем уравнение для V

$$(V')^2 = \frac{2(V+a)^2 f(V)}{(V+a/2)^2}, \quad f(V) = \alpha \sqrt{|V(V+a)|} - V^2 - aV - 1 \quad (5.2)$$

Для существования периодического решения уравнения (5.2) необходимо подобрать параметры задачи так, чтобы существовал промежуток $[V_l, V_r]$, на концах которого функция $f(V)$ имеет простые корни, а внутри – положительна. Необходимо выполнение требования $Z \geq 0$, т.е. $V_l \geq -a$. Кроме того, отрезок (V_l, V_r) не должен содержать точку $V = -a/2$, так как в ней производная $V''(\varphi)$ обращается в бесконечность.

Лемма 2. Искомый отрезок $[V_l, V_r]$ строится по следующему алгоритму: левая граница V_l выбирается произвольно из промежутка $(0, V_+)$ ($V_{\pm} = (-a \pm \sqrt{a^2 + 4})/2$). При этом постоянная α определяется из уравнения $f(V_l) = 0$. Правая граница V_r находится как единственный корень уравнения $f(V_r) = 0$, лежащий на полуоси $(V_+, +\infty)$.

Доказательство. Вычисление производной $f'(V)$ и исключение параметра α при помощи уравнения $f(V) = 0$ дают

$$f'(V)|_{f(V)=0} = -\frac{(V+a/2)(V-V_-)(V-V_+)}{V(V+a)} \quad (5.3)$$

Заметим, что $V_- < -a$, т.е. этот корень не лежит в допустимой области изменения V . Кроме того, $V_+ > 0$ при любых значениях a . Знак производной $f'(V)$ в точках $f(V) = 0$ определяется из соотношения (5.3) и оказывается таким:

$$\begin{aligned} f'(V)|_{f(V)=0} &> 0 \quad \text{при } V \in (-a, -a/2) \cup (0, V_+) \\ f'(V)|_{f(V)=0} &< 0 \quad \text{при } V \in (-a/2, 0) \cup (V_+, +\infty) \end{aligned}$$

Заметим, что $f(-a) = f(0) = -1 < 0$ и $f(V) \rightarrow -\infty$ при $V \rightarrow +\infty$. Таким образом, выбрав левую границу V_l из промежутков $(-a, -a/2)$ либо $(0, V_+)$ и определив постоянную α из уравнения $f(V_l) = 0$, можем гарантировать существование точки V_r в интервалах $(-a/2, 0)$ либо $(V_+, +\infty)$ соответственно. Но в первом случае отрезок $[V_l, V_r]$ обязательно содержит точку $V = -a/2$, а значит, не удовлетворяет упомянутым выше требованиям. Остается вторая возможность, которая и указана в формулировке леммы.

Процесс построения периодического решения уравнения (5.2) сводится к следующему. Для заданного $a \neq 0$ выбирается произвольное значение V_l из оговоренного в лемме 2 промежутка. По ним, в силу леммы 2, определяются значения констант α и V_r . Функция $\varphi(V)$ на промежутке $[V_l, V_r]$ является монотонной и вычисляется квадратурой

$$\varphi(V) = \int_{V_l}^V \frac{(V + a/2)dV}{2(V + a)\sqrt{f(V)}}$$

Обратная функция $V(\varphi)$ продолжается на все значения φ как четная периодическая с полупериодом $T = \varphi(V_r)$.

Для непрерывности полученного решения на всей плоскости (r, θ) нужно потребовать, чтобы функция $V(\varphi)$ была периодичной по φ с периодом 2π , что эквивалентно равенству

$$NT = \pi \quad (5.4)$$

с некоторым натуральным числом N . Равенство (5.4) проверялось численно. Оказалось, что подбором параметров a и V_l ему можно удовлетворить с $N = 1, 2, 3, \dots$

Картина течения газа на полученном решении иллюстрируется фиг. 2. Для параметра $a = 4$ левую границу V_l можно выбирать произвольно из интервала $(0; 0.236)$. Выбор $V_l = 0.110$ обеспечивает непрерывность на плоскости решения с $N = 8$. Инвариантная линия тока приведена на фиг. 2, а. Видно, что она инвариантна относительно поворота на угол, кратный $\pi/4$. Контактные характеристики двух семейств (4.3) и (4.5) выстраиваются в соответствии с указанным ранее алгоритмом. Их пересечение дает мировую линию частицы, проекция которой на плоскость (r, θ) (траектория) дается на фиг. 2, б.

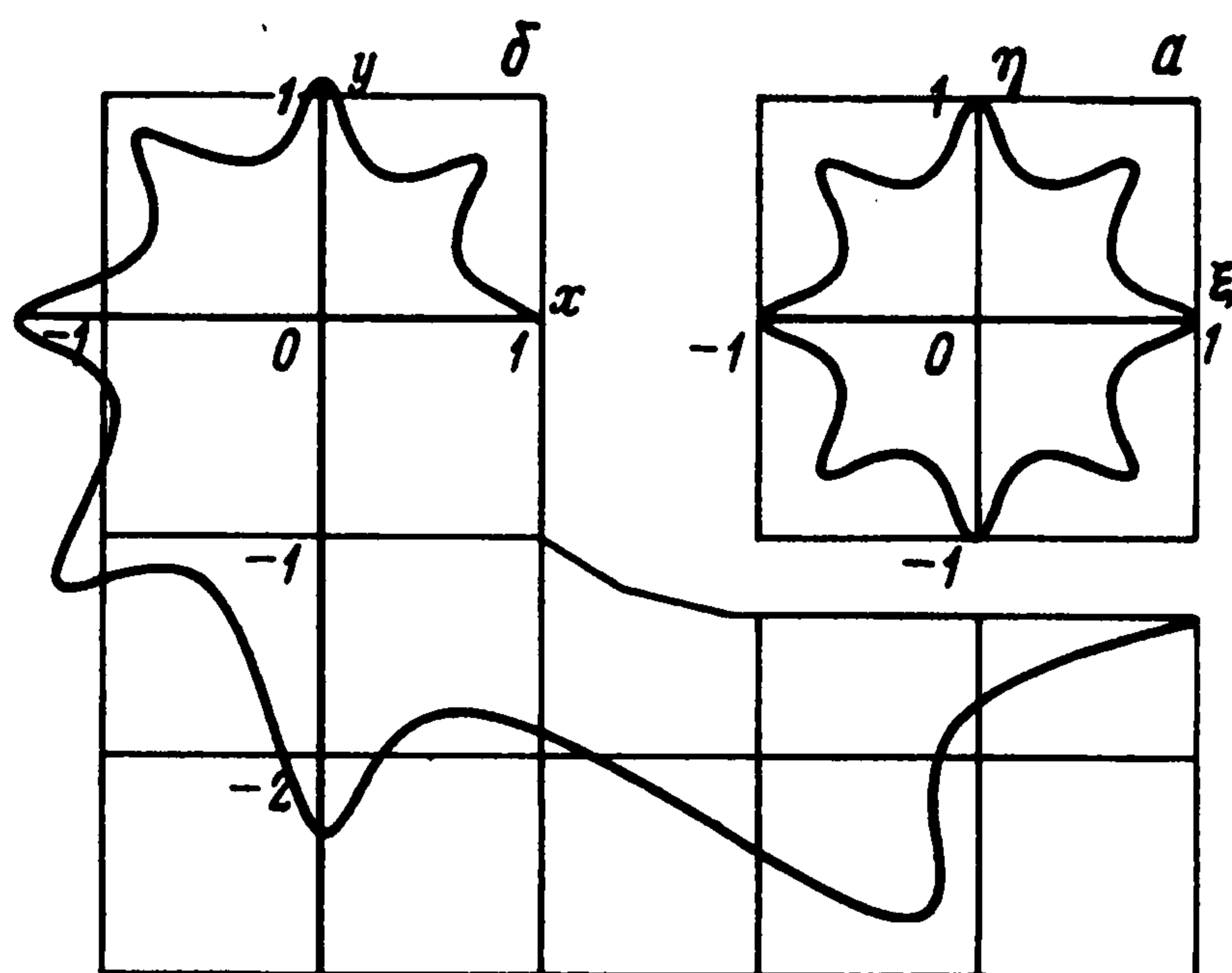
Случай $\beta = 0$. Как показано выше, в этом случае интеграл (4.8) вырождается в пару прямых $Z = 0$ и $Z = aV$. Первая из них дает состояние вакуума и неинтересна. Подстановка второй в оставшееся уравнение (3.6) дает уравнение, решение которого выражается явно. Таким образом, получаем явное решение системы (3.6), описывающее в силу (4.6) движение газа с постоянной инвариантной завихренностью

$$\begin{aligned} U &= \chi \sin 2\varphi, & V &= \alpha + \chi \cos 2\varphi \\ Z &= a(\alpha + \chi \cos 2\varphi), & \chi &= \sqrt{\alpha^2 - 1 + a^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

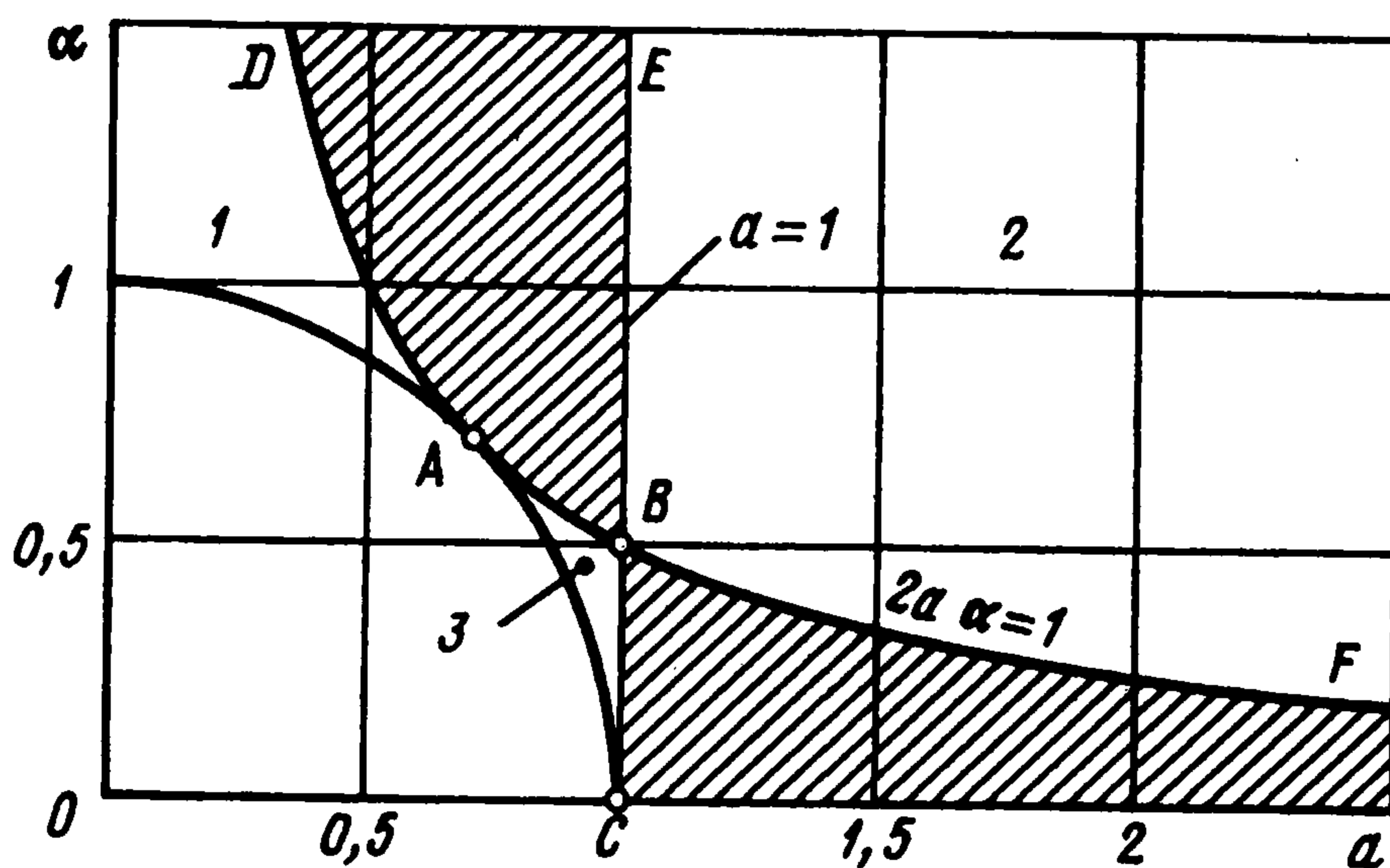
Решение существует при $a^2 + \alpha^2 \geq 1$. На нем хорошо прослеживается различие в характере течения при $a > 1$, $a < 1$ и $a = 1$, о котором упоминалось ранее. Действительно, при $a < 1$ для любого φ получаем $Z > 0$, а значит, решение (5.5) "физично" на всей плоскости. При $a = 1$ имеется выделенное значение $\varphi_{vac} = \pi/2 + \pi k$, (k – целое число), при котором $Z = 0$. Таким образом, в течении имеется линия вакуума $\varphi = \varphi_{vac}$. В исходных переменных линии вакуума соответствует прямая $x + ty = 0$. И наконец, в случае $a > 1$ функция z положительна только в секторах

$$S_+ = \{-\varphi_{vac} < \varphi < \varphi_{vac}, \quad \pi - \varphi_{vac} < \varphi < \pi + \varphi_{vac}\}$$

$$\varphi_{vac} = \arctg((\alpha + \chi) / \sqrt{a^2 - 1})$$



Фиг. 2



Фиг. 3

На границе этих секторов она обращается в нуль, а вне их – отрицательна. Продолжая по непрерывности функцию Z нулем вне S_+ , получим непрерывное на всей плоскости решение, описывающее течение газа с областями вакуума. Переход к исходным переменным осуществляется заменой $\theta = \varphi + a \operatorname{arctg} t$.

В декартовых координатах $\xi = \lambda \cos \varphi$, $\eta = \lambda \sin \varphi$ уравнение инвариантной линии тока (4.1) на решении (5.5) имеет вид

$$(\alpha + \chi)\xi^2 + (\alpha - \chi)\eta^2 = 1/\sqrt{a} \quad (5.6)$$

При $a < 1$ линия тока (5.6) – эллипс, при $a = 1$ – пара прямых и при $a > 1$ – гипербола. При $a > 1$ асимптоты гиперболы (5.6) совпадают с границами зоны вакуума.

Условие гиперболичности (2.5) на решениях вида (3.1) переписывается в виде:

$$Z < Q^2 = U^2 + V^2 \quad (5.7)$$

Течение вида (3.1), для которого неравенство (5.7) выполнено на всей плоскости (λ, φ) , далее будем условно называть "сверхзвуковым". Соответственно, если на всей плоскости (λ, φ) выполнено обратное неравенство $Z > Q^2$, то такое течение назовем "дозвуковым". Наконец, если на одной части плоскости выполнено $Z < Q^2$, а на другой – $Z > Q^2$, то такое течение назовем "трансзвуковым". При этом линия перехода от "дозвукового" к "сверхзвуковому" течению есть "звуковая линия".

Проверка неравенств (5.7) для решения (5.5) показывает, что на плоскости параметров (a, α) область "трансзвуковых" течений определяется неравенством $(1 - a^2) \cdot (1 - 2a\alpha) < 0$ (на фиг. 3 она заштрихована). При этом "звуковой линией" будет линия

$$\varphi = \varphi_c, \quad \cos 2\varphi_c = (2\alpha^2 - a\alpha + a^2 - 1)\chi^{-1}(a - 2\alpha)^{-1}$$

На границе "трансзвуковой" области имеем: кривым AD , BE и BF (фиг. 3) соответствуют течения газа, "сверхзвуковые" во всей плоскости (λ, φ) , за исключением прямых $\varphi_c = \pi/2$ для AD и BE , $\varphi_c = 0$ для BF , на которых достигается скорость звука. Кривым AB и BC соответствует "дозвуковое" течение газа во всей плоскости, за исключением прямых $\varphi_c = 0$ для AB и $\varphi_c = \pi/2$ для BC , которые также являются "звуковыми линиями". Для случаев, когда параметры (a, α) выбираются с BC или BE , "звуковая линия" совпадает с линией вакуума, которая имеет место при $a = 1$. Точкам A , B и C соответствует "звуковое" во всей плоскости (λ, φ) течение, когда $Z = Q^2$. И наконец, областям, помеченным на фиг. 3 цифрами 1 и 2, соответствует "сверхзвуковое" течение, а области 3 – "дозвуковое".

Отметим, что на решении (5.5) инвариантные давления $\bar{p}$ и плотность $\bar{\rho}$ постоянны вдоль инвариантной линии тока (5.6). Возвращаясь к "физическим" переменным, получаем, что на решении (5.5) давление p и плотность ρ вдоль контактной характеристики (4.3) зависят только от времени.

6. Простое решение. Ниже рассматривается одно из возможных инвариантных решений ранга 0 для системы (1.3). Оно строится на двумерной подалгебре $\{H_1, H_2 + kH_3\}$, а значит, совпадает с $\{\partial_\varphi\}$ -инвариантным решением уравнений (3.2). Кроме того, это решение может быть получено и непосредственно из УГД (1.1) как "одношаговое". Таким образом, имеем дело с подмоделью, которая в силу леммы ЛОТ может одновременно рассматриваться как "одно-", "двух-" и "трехшаговая".

Для получения этого решения надо считать функции U, V, P, R и s из (3.1), не зависящими от φ . В результате подстановки в (3.1) получаем решение

$$u = \frac{tr}{t^2 + 1}, \quad v = \frac{Vr}{t^2 + 1}, \quad p = \frac{Pr^k}{(t^2 + 1)^{2+k/2}}, \quad \rho = \frac{Rr^{k-2}}{(t^2 + 1)^{k/2}}$$

$$S = \frac{S_0 r^{4-k}}{(t^2 + 1)^{2-k/2}}, \quad c^2 = \frac{Zr^2}{(t^2 + 1)^2} \quad (6.1)$$

в котором постоянные V, P, R, S_0 и Z связаны соотношениями

$$V^2 = 1 + kP/R, \quad Z = 2P/R, \quad P = S_0 R^2$$

В силу соотношения (4.6) инвариантная завихренность Ω на этом решении постоянна.

Траектория частицы, стартующей при $t = 0$ из положения (r_0, θ_0) , задается формулами

$$r = r_0 \sqrt{t^2 + 1}, \quad \theta = \theta_0 + V \arctg t$$

Таким образом, траектория произвольной частицы получается из одной стандартной с $r_0 = 1, \theta_0 = 0$ преобразованием гомотетии с коэффициентом r_0 и поворотом против часовой стрелки на угол θ_0 .

Для отыскания звуковых характеристик $C^\pm$ уравнений (1.1) в виде $h(t, r, \theta) = \text{const}$ необходимо решить уравнение

$$h_t + uh_r + r^{-1}h_\theta \pm c\sqrt{h_r^2 + r^{-2}h_\theta^2} = 0 \quad (6.2)$$

Характеристический коноид является геометрическим местом характеристик уравнений (6.2) (бихарактеристик УГД), выходящих из точки $(t, r, \theta) = (0, r_0, \theta_0)$. На ре-

шении (6.1) его уравнение таково:

$$\left(\ln \frac{r}{r_0 \sqrt{t^2 + 1}} \right)^2 + (\theta - \theta_0 - V \operatorname{arctg} t)^2 = Z \operatorname{arctg}^2 t$$

А уравнения звуковых характеристик $C^\pm$ на решении (6.1), проходящих при $t = 0$ через кривую $r_0 = f(\theta_0)$, задаются параметрически формулами

$$r = f(\theta_0) \sqrt{t^2 + 1} e^{k_1 \operatorname{arctg} t}, \quad \theta = \theta_0 + (V - k_2) \operatorname{arctg} t$$

$$k_1 = \pm \sqrt{Z} f / \sqrt{f^2 + f'^2}, \quad k_2 = \pm \sqrt{Z} f' / \sqrt{f^2 + f'^2}$$

Особенностью решения является существование "мертвой зоны" в окрестности начала координат, в которую не проникают звуковые возмущения ни при каком значении времени. Размер "мертвой зоны" зависит от первоначального положения источника звуковых возмущений.

Автор благодарит Л.В. Овсянникова за замечания и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00523) и Совета ведущих научных школ (95-15-96283).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. Хабиров С.В. Нестационарное инвариантное решение уравнений газовой динамики, описывающее растекание газа до вакуума // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 967–975.
3. Овсянников Л.В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118. № 3. С. 439–442.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. Никольский А.А. Инвариантные преобразования уравнений движения идеального газа для специальных случаев // Инж. журн. 1963. Т. 3. № 1. С. 140–142.
6. Овсянников Л.В. Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 740–742.
7. Овсянников Л.В. Плоские течения газа с замкнутыми линиями тока // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 1. С. 51–53.
8. Черный Г.Г. Плоские установившиеся автомодельные вихревые течения идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 4. С. 39–53.
9. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

Новосибирск
e-mail: sergey@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
7.X.1999