

УДК 532.526

© 2000 г. В.А. Батищев, Е.В. Хорошунова

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ПРИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ТЕЧЕНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЕ

Изучается ветвление решений, описывающих термокапиллярные течения неоднородной жидкости в горизонтальном слое конечной толщины при воздействии градиента температуры на свободную границу. В предположении осевой симметрии и отсутствия окружной компоненты скорости численно построены зависимости скорости точек свободной границы от толщины слоя и градиента температуры. Найдены области параметров, в которых задача или не имеет решений, или имеет одно или несколько различных решений, отличающихся друг от друга формой профиля скорости и числом зон тока и противотока. Для полученных решений показано, что в каждой точке ветвления возникает пара новых симметричных решений, отличающихся от основных решений наличием вращения вокруг оси симметрии. Расчет коэффициентов уравнения разветвления показывает наличие трех типов точек ветвления, для которых уравнение разветвления в главном приближении содержит только по два ненулевых коэффициента. Исследуется двумерный случай ветвления. Ответившиеся решения строятся асимптотически в окрестности точек ветвления и численно вне этих окрестностей.

Решения, описывающие термокапиллярные течения жидкости при действии градиента температуры вдоль свободной границы, изучались во многих работах (см., например, [1–6]). Анализ ветвления нестационарных режимов течений жидкости в тонком слое на основе уравнений Прандтля показал [1], что в результате ветвления возникает пара новых режимов с вращением вокруг оси симметрии. Возникновение "самовращения жидкости" для различных классов течений изучалось аналитически и экспериментально [7]. Эта до конца не изученная проблема связана с возникновением смерчей, торнадо и др. Ниже показано, что самовращение возможно в жидкости со свободной границей, к которой приложены только радиально направленные касательные напряжения, вызванные неравномерным нагревом.

1. Для уравнений Обербека – Буссинеска рассматривается задача о стационарном осесимметричном термокапиллярном течении жидкости в горизонтальном слое конечной толщины, ограниченном снизу твердой стенкой S , а сверху свободной границей Γ , на которой действует ненулевой продольный градиент температуры,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - g\beta T \\ \nu \nabla T &= \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} p &= 2\nu \rho \mathbf{n} \Pi \mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad (r, z, \theta) \in \Gamma \\ 2\nu \rho [\Pi \mathbf{n} - (\mathbf{n} \Pi \mathbf{n}) \mathbf{n}] &= \nabla_\Gamma \sigma, \quad T = T_\Gamma, \quad (r, z, \theta) \in \Gamma \\ \mathbf{v} \mathbf{n} &= 0, \quad (r, z, \theta) \in \Gamma; \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = T_S, \quad (r, z, \theta) \in S \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$; r, θ, z – цилиндрические координаты; $\mathbf{g} = (0, 0, -g_z)$, g_z – ускорение силы тяжести; $\mathbf{n}$ – единичный вектор к свободной границе Γ ; Π – тензор скоростей деформации; $\nabla_\Gamma = \nabla - (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{n}$ – градиент вдоль Γ ; k_1, k_2 – главные кривизны

свободной границы Γ ; T – температура; ν и χ – соответственно коэффициенты вязкости и температуропроводности; p_* и T_Γ – значения давления и температуры на свободной границе Γ , причем $p_* = \text{const}$; T_S – температура стенки. Коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейной функцией температуры: $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$, где σ_0 , σ_T , T_* – известные постоянные, β – коэффициент теплового расширения. Условия осевой симметрии означают, что ν , p , T не зависят от окружной координаты θ .

Построим решение задачи (1), (2) вблизи оси симметрии при условии, что область, занятая жидкостью, – это горизонтальный слой, ограниченный известными плоскостями: снизу – твердой стенкой $z = 0$, а сверху – свободной границей $z = H$. Давление постоянно на свободной границе. Рассмотрим случай, когда температура на обеих границах слоя зависит только от радиальной координаты по квадратичному закону

$$T_\Gamma = A_\Gamma r^2 / 2 + c_\Gamma, \quad T_S = A_S r^2 / 2 + c_S$$

где A_Γ , A_S , c_Γ , c_S постоянные. Это соответствует частному случаю, когда над свободной поверхностью находится слой неподвижного теплопроводного воздуха, температура которого удовлетворяет уравнению Лапласа [6]. Обозначив температуру воздуха при $z = H$ через $T_\Gamma(r)$, разложим функцию $T_\Gamma(r)$ в ряд Тейлора по степеням r . Учитывая, что ниже рассматривается течение жидкости только вблизи оси симметрии $r = 0$, ограничимся двумя членами разложения. Учитывая, что $\partial T / \partial r = 0$ при $r = 0$, получаем формулу $T_\Gamma = c_\Gamma + A_\Gamma r^2 / 2$ ($r \rightarrow 0$).

Решение системы (1.1), (1.2) представим в виде

$$v_r = rF'(s)\nu L^{-2}, \quad v_\theta = rG_1(s)\nu L^{-2}, \quad v_z = -2\nu L^{-1}F(s)$$

$$T = A_\Gamma(0,5r^2T_1(s) + L^2T_2(s)) \quad (1.3)$$

$$p = -p\nu^2L^{-4}(0,5r^2p_1(s) + L^2p_2(s))$$

$$s = z/L, \quad L = (p\nu^2|\sigma_TA_\Gamma|^{-1})^{1/3}$$

Здесь L – масштаб длины. Введем безразмерный параметр $h = H/L$. Функции (1.3) описывают осесимметричное термокапиллярное течение жидкости в горизонтальном слое с твердой нижней границей $z = 0$ и свободной поверхностью $z = H$. Отметим, что это решение описывает течение жидкости только вблизи оси симметрии Oz и не распространяется на случай больших значений координаты r .

Поместим начало системы координат на свободную поверхность, введя переменную $\xi = 1 - s/h$, и сделаем преобразование растяжения $F = h^2\Phi(\xi)$, $G_1 = hG(\xi)$. Подставляя соотношения (1.3) в систему (1.1), (1.2) и исключая давление, для функций Φ , G , T_1 выводим нелинейную краевую задачу

$$\Phi^{(4)} = 2h^3(\Phi\Phi''' + GG') + \gamma h^2T$$

$$G'' = 2h^3(\Phi G' - \Phi' G)$$

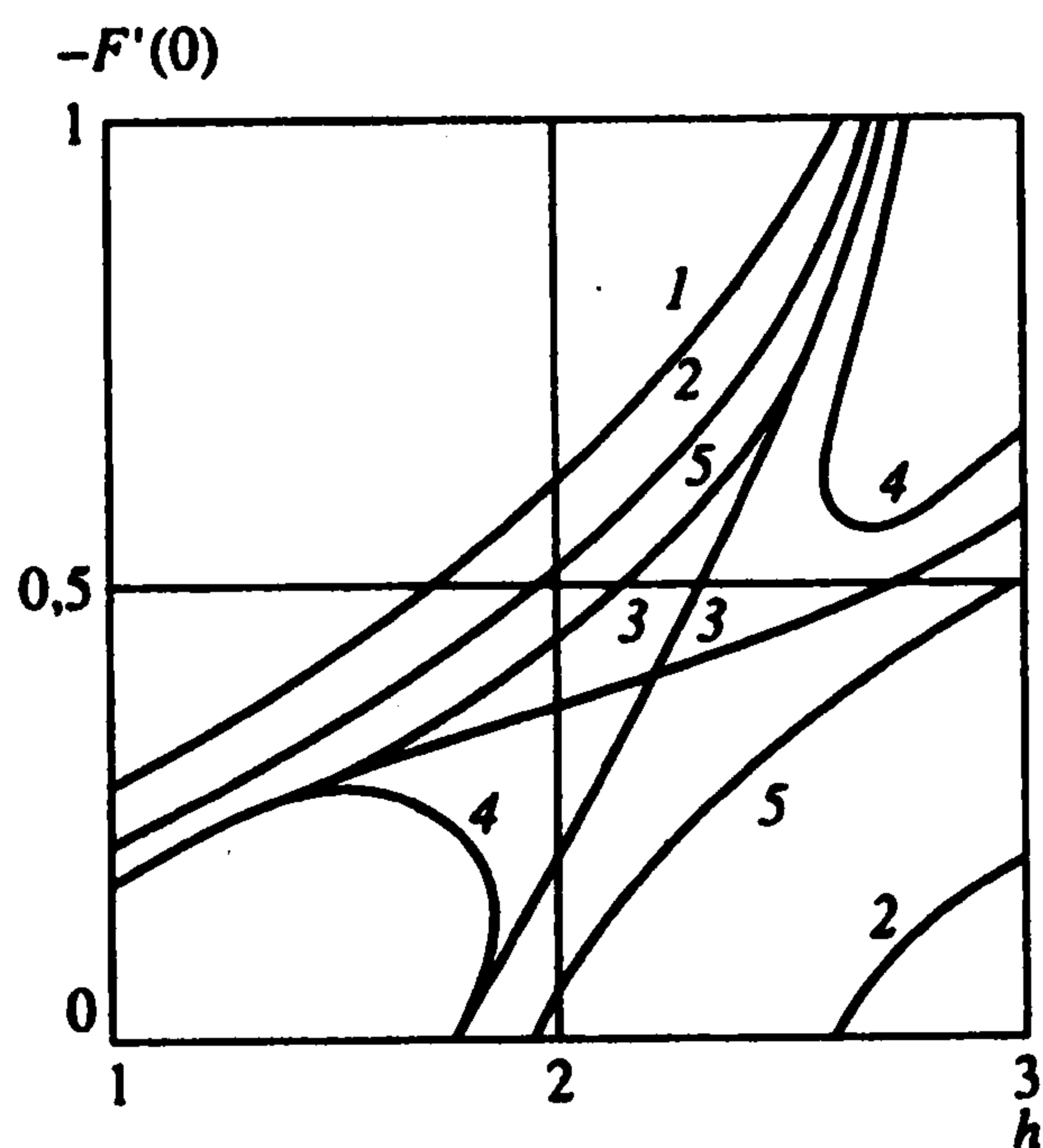
$$T_1'' = 2h^3 \text{Pr}(\Phi T_1' - \Phi' T_1) \quad (1.4)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi''(0) = -1, \quad T_1(0) = 1, \quad G'(0) = 0$$

$$\Phi(1) = \Phi'(1) = G(1) = 0, \quad T_1(1) = \tau$$

Здесь $\tau = A_S/A_\Gamma$, $\gamma = g\beta A_\Gamma L^5 \nu^{-2}$ – безразмерные параметры, которые считаются заданными. $\text{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля.

Ниже рассматривается только случай $A_\Gamma > 0$ ($\gamma > 0$), что соответствует направлению касательных напряжений на свободной границе к оси симметрии. Функции



Фиг. 1

ложения функций Φ_0, θ_0 в ряды по степеням параметра h . В частности,

$$\Phi'_0(0) = 1/4 + (2\tau + 3)\gamma h^2 / 240 + O(h^3) \quad (h \rightarrow 0)$$

Для конечных значений параметров h, τ, γ решения системы (1.4) получены при $\gamma = 0, 1; \text{Pr} = 7; h \in [0, 4]; \tau \in [-60, 60]$. На фиг. 1 приведены зависимости функции $-F'(0)$ от параметра h (отметим, что величина $-F'(0)$ пропорциональна радиальной компоненте скорости жидкости на свободной границе). Кривые 1, ..., 5 соответствуют значениям параметра τ , равным 50; 0; -41,6072; -50; -30. При каждом значении τ рассчитано по две ветви кривых (расположение кривых на фиг. 1 напоминает изображение фазовых траекторий вблизи особой точки типа "седло"). Каждая пара кривых не имеет общих точек, за исключением случая $\tau = -41,6072$.

Для каждого значения $\tau \in [-60; -41,6072]$ существует интервал (h_1, h_2) значений параметра h , в котором решения отсутствуют. Вне этого интервала рассчитано по два решения, а при $h = h_1$ и $h = h_2$ найдено только по одному решению. Например, $h_1 = 1,8195; h_2 = 2,4950$ при $\tau = -50$. При $\tau > -41,6072$ для каждого значения h рассчитано по два решения. Эти решения различаются формой профиля скорости. Так, при $\tau = 0$ для верхней ветви 2 профиль скорости имеет зону тока вблизи свободной границы Γ и зону противотока вблизи твердой стенки S . Для нижней ветви 2 при $h < h_0 = 2,7469$ профиль скорости имеет две зоны тока (одну вблизи Γ , а другую вблизи S) и зону противотока между ними. При $h = h_0$ скорость жидкости на Γ обращается в ноль и зона тока вблизи Γ исчезает. При $h > h_0$ зона тока жидкости находится вблизи S , а зона противотока вблизи Γ .

2. Покажем, что при определенных значениях параметров h, τ от решения Φ_0, θ_0 ответвляются по два симметричных решения с ненулевой окружной компонентой скорости $v_\theta \neq 0$. Для этого сначала рассмотрим задачу на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (1.4) вблизи решения Φ_0, θ_0

$$\begin{aligned} f_1^{(4)} &= 2h^3 (A_0 f_1''' + \Phi_0''' f_1) + \gamma h^2 t_1 \\ t_1'' &= 2h^3 \text{Pr} (\Phi_0 t_1' - \Phi_0' t_1 + f_1 \theta_0' - \theta_0 f_1') \\ g_1'' &= 2h^3 (\Phi_0 g_1' - \Phi_0' g_1) \\ \xi = 0: f_1 = f_1'' = t_1 = g_1' &= 0; \quad \xi = 1: f_1 = f_1' = t_1 = g_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полученная задача исследовалась численно при $h \in [0, 4]$. Обозначим через h_0 собственные значения параметра h . Очевидно, h_0 — это функция параметров задачи τ, Pr, γ .

p_1, p_2, T_2 определяются после решения краевой задачи (1.4), в частности p_1 находится по формуле

$$p_1 = \gamma h \int_0^\xi T_1 d\xi$$

Из последнего соотношения и формул (1.3) следует, что давление на свободной границе $\xi = 0$ для рассматриваемого решения постоянно.

Обозначим через $\Phi_0(\xi, h, \tau, \gamma), \theta_0(\xi, h, \tau, \gamma), G_0 = 0$ решения системы (1.4), которые описывают течения жидкости с нулевой окружной компонентой скорости (основное решение). При малых значениях h эти решения получены асимптотически, путем раз-

На фиг. 2 изображены две ветви графика функции $h_0(\tau)$ при $Pr = 7$, $\gamma = 0,1$. При $-52,3059 \leq \tau \leq 60$ рассчитано по два собственных числа h_0 . При $\tau = -52,3059$ собственное число $h_0 = 2,6089$ двукратное, а для остальных значений τ собственные числа простые. Собственные функции задачи (2.1) найдены в виде $g_1 = \varphi(\xi)$, $f_1 = 0$, $t_1 = 0$, причем $\varphi(0) = 1$.

Переходим к выводу уравнения разветвления для краевой задачи (1.4), используя методы работ [8, 9] и представив решение в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha f(\xi, h, \tau, \alpha) \quad (2.2)$$

$$G = \alpha g(\xi, h, \tau, \alpha), \quad \theta = \theta_0 + \alpha t(\xi, h, \tau, \alpha)$$

где f , g , t – новые неизвестные функции, α – параметр, который выбирается так, чтобы выполнялось условие $g = 1$ при $\xi = 0$. Введем линейные операторы

$$L = D^4 - 2h^3(\Phi_0 D^3 + \Phi_0'' I)$$

$$K = D^2 - 2h^3(\Phi_0 D - \Phi_0' I)$$

$$N = D^2 - 2h^3 Pr(\Phi_0 D - \Phi_0' I)$$

Здесь $D = d/d\xi$, I – единичный оператор.

Введем вектор $w = (f, g, t)$. Функции f , g , t определяются из нелинейной краевой задачи

$$L_1 w \equiv Lf - \gamma h^2 t - 2\alpha h^3 (ff''' + gg') = 0$$

$$K_1 w \equiv Kg - 2\alpha h^3 (fg' - f'g) = 0 \quad (2.3)$$

$$N_1 w \equiv Nt - 2h^3 Pr(f\theta_0' - \theta_0 f' - 2\alpha h^3 Pr(ft' - tf')) = 0$$

$$\xi = 0: f = f'' = g' = t = 0; \quad \xi = 1: f = f' = g = t = 0$$

Задача (2.3) при $\alpha = 0$, $h = h_0(\tau)$ имеет решение $g = \varphi(\xi)$, $f = 0$, $t = 0$, так как совпадает с задачей на собственные значения (2.1).

Рассмотрим задачу Коши

$$L_1 w = 0, \quad K_1 w = 0, \quad N_1 w = 0$$

$$\xi = 0: f = 0, \quad f' = p_1, \quad f'' = 0, \quad f''' = p_2, \quad t = 0, \quad t' = p_3, \quad g = 1, \quad g' = 0 \quad (2.4)$$

Параметры p_1 , p_2 , p_3 пока неизвестны и находятся при выполнении краевых условий в (2.3) на твердой стенке при $\xi = 1$.

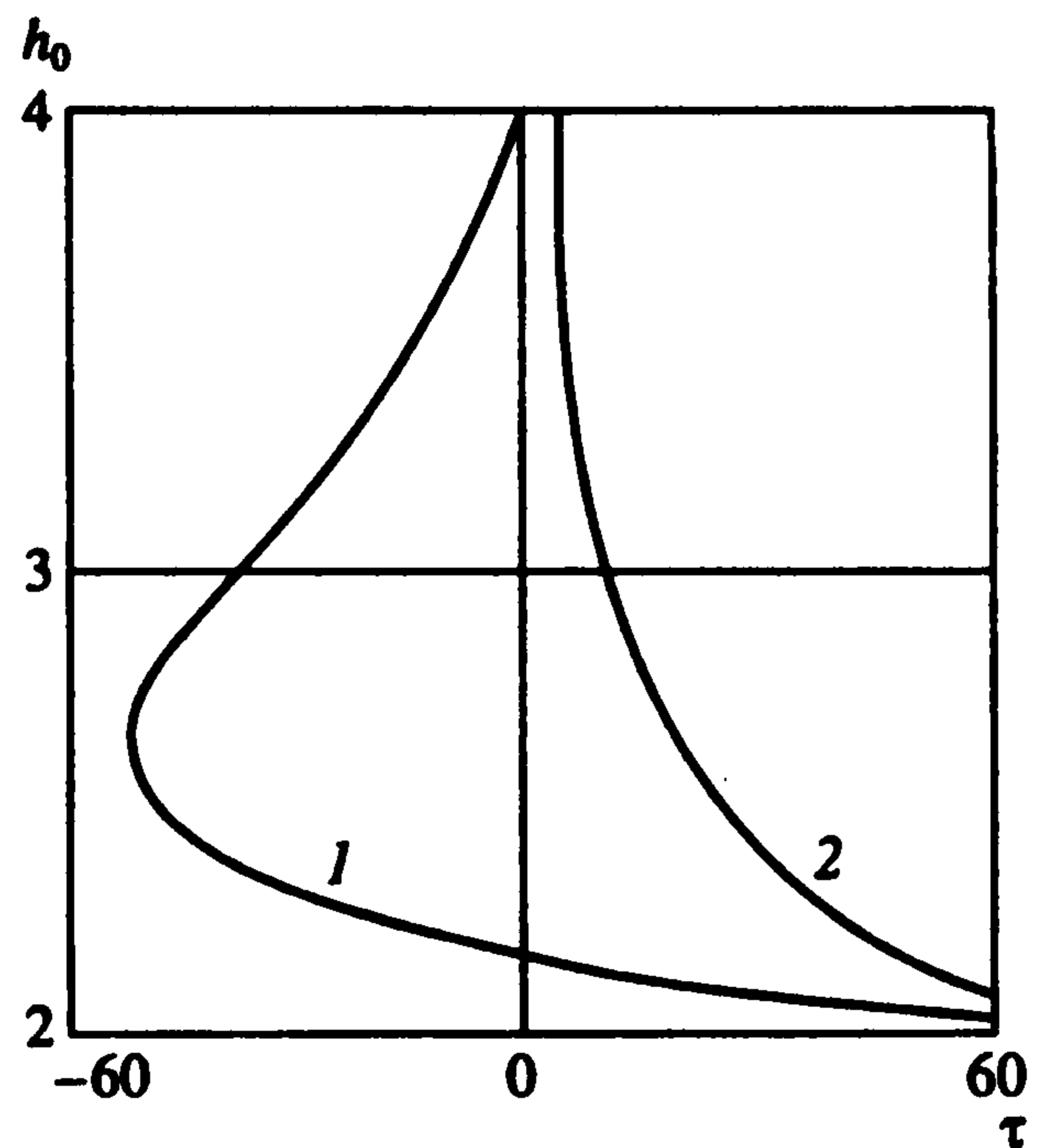
При $h = h_0$, $\alpha = 0$ задача Коши (2.4) имеет решение $g = \varphi(\xi)$, $f = 0$, $t = 0$, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

Исследуем решение этой задачи при значениях параметров (h, α) , близких к $(h_0, 0)$. Очевидно, что эти решения являются решением краевой задачи (2.3) тогда и только тогда, когда функции f , g , t удовлетворяют краевым условиям в (2.3) при $\xi = 1$

$$f(1, \alpha, h, p_1, p_2, p_3) = 0, \quad f'(1, \alpha, h, p_1, p_2, p_3) = 0$$

$$t(1, \alpha, h, p_1, p_2, p_3) = 0, \quad g(1, \alpha, h, p_1, p_2, p_3) = 0 \quad (2.5)$$

Параметры p_1 , p_2 , p_3 однозначно определяются из первых трех уравнений системы (2.5) только в случае, если функциональный определитель $D(f, f', t)/D(p_1, p_2, p_3)$



Фиг. 2

отличен от нуля. Численные расчеты показали, что так будет при всех h на отрезке $[0, 4]$, кроме точки $h = h_* = 2,4806$ и $\tau = \tau_* = -49,2231$, в которой этот определитель обращается в нуль.

Пусть $h \neq h_*$, $\tau \neq \tau_*$. Определив из первых трех уравнений системы (2.5) параметры p_1, p_2, p_3 и подставив их в четвертое уравнение, выводим уравнение разветвления

$$b(\alpha, h) \equiv g(1, \alpha, h, p_1(\alpha, h), p_2(\alpha, h), p_3(\alpha, h)) = 0 \quad (2.6)$$

Используя известный метод [8], разложим функцию $b(\alpha, h)$ в конечный ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha = 0, h = h_0$

$$b(\alpha, h) = b(0, h_0) + (h - h_0)b_h + \alpha b_\alpha + \alpha^2 b_{\alpha\alpha} / 2 + \dots = 0 \quad (2.7)$$

Через $b_h, b_\alpha, b_{\alpha\alpha}$ обозначены производные от функции $b(\alpha, h)$ по параметрам h, α , вычисленные в точке $\alpha = 0, h = h_0$.

Вычислим коэффициенты ряда (2.7). Сначала покажем, что $b(0, h_0) = 0$. Для этого переходим к пределу $\alpha \rightarrow 0, h \rightarrow h_0$ в уравнении (2.6), в задаче Коши (2.4) и учитываем условия $f = f' = t = g = 0$ при $\xi = 1$. Исследования полученных задач показывает, что $g = \varphi(\xi), p_1 = p_2 = p_3 = 0$ при $\alpha = 0$ и, следовательно, $b(0, h_0) = \varphi(1) = 0$.

Аналогично можно показать, что $b_\alpha = 0$ в (2.7).

Найдем коэффициент b_h в (2.7), используя соотношение

$$b_h = \frac{\partial g}{\partial h} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g / \partial p_k}{\partial p_k / \partial h} \quad (\alpha = 0, h = h_0)$$

Отметим, что $\partial g / \partial p_k = 0$ ($\alpha = 0, h = h_0$). Это следует из исследования задач Коши, полученных путем дифференцирования уравнений и краевых условий в (2.4) по параметрам p_k . Дифференцируя уравнения (2.4) по h и устремляя $\alpha \rightarrow 0, h \rightarrow h_0$, выводим задачу Коши для $g_h = \partial g / \partial h$

$$Kg_h = 2h_0^3 (g\Phi'_{0h} - g'\Phi_{0h}) + 6h_0^2 (\Phi_0 g' - \Phi'_{0h} g)$$

$$\xi = 0: g_h = 0, g'_h = 0$$

Функция Φ_{0h} определяется из краевой задачи

$$L\Phi_{0h} = \gamma h_0^2 \theta_{0h} + 6h_0^2 \Phi_0 \Phi''_{0h} + 2\gamma h_0 \theta_0$$

$$N\theta_{0h} = 2h_0^3 \text{Pr}(\Phi_{0h} \theta'_0 - \Phi'_{0h} \theta_0) + 6h_0^2 \text{Pr}(\Phi_0 \theta'_0 - \Phi'_{0h} \theta_0)$$

$$\xi = 0: \Phi_{0h} = \Phi''_{0h} = \theta_{0h} = 0; \quad \xi = 1: \Phi_{0h} = \Phi'_{0h} = \theta_{0h} = 0$$

Полученные задачи для $g_h, \Phi_{0h}, \theta_{0h}$ решены численно. На фиг. 3 сплошными линиями изображены зависимости коэффициента b_h от параметра h . Отметим, что $b_h \rightarrow \pm \infty$ при $h \rightarrow h_* = 2,4806$. Кроме того, $b_h = 0$ при $h = 2,6089$. В интервале $(2,4806; 2,6089)$ коэффициент b_h положителен, а вне этого интервала – отрицателен. Кривые 1 и 2 фиг. 3 соответствуют значениям τ, h , принадлежащим бифуркационной ветви 1 на фиг. 2. Для ветви 2 (фиг. 1) соответствующие значения коэффициента b_h строго положительны (не изображены на фиг. 3).

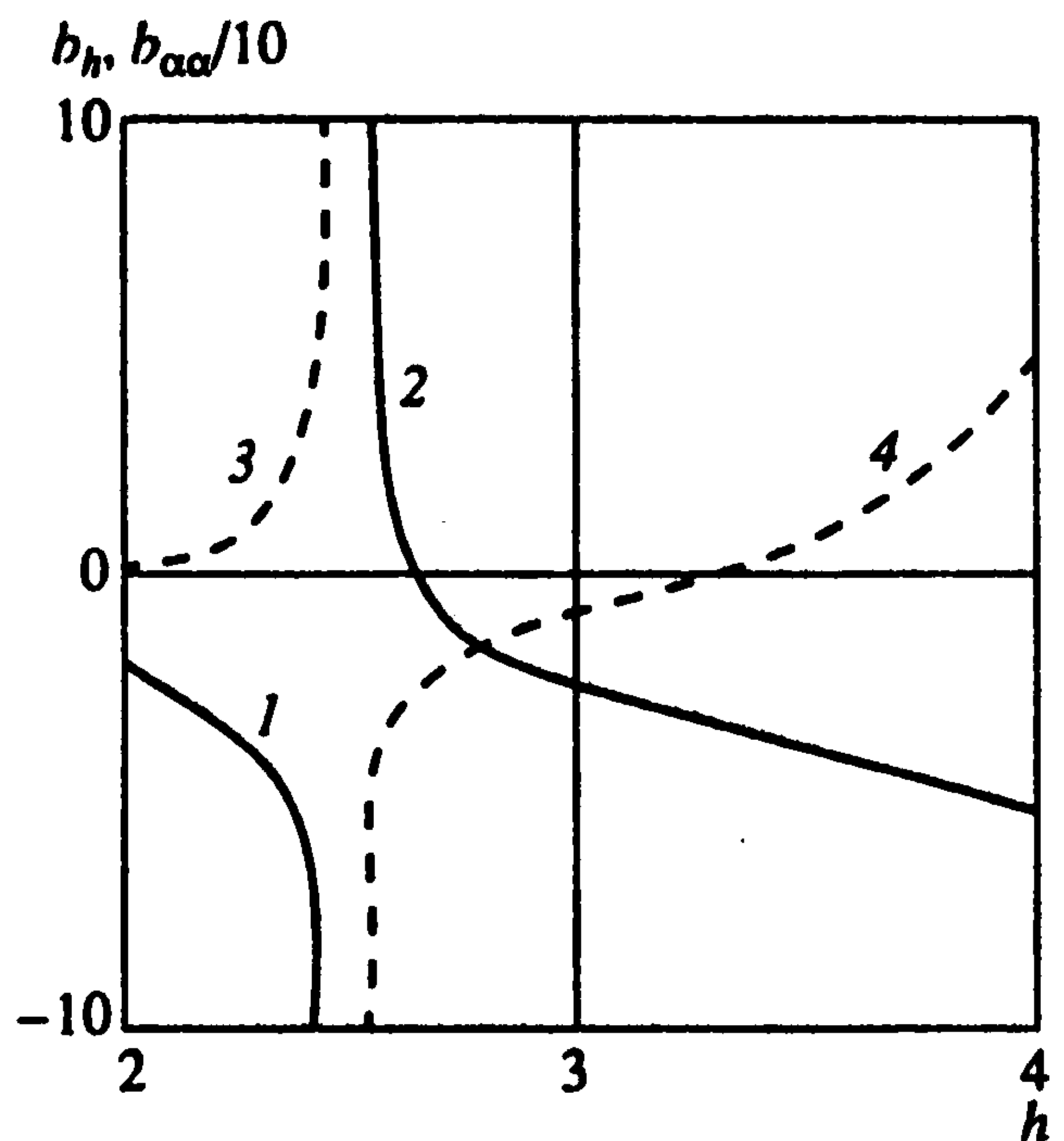
Теперь определим коэффициент $b_{\alpha\alpha}$ в соотношении (2.7), учитывая, что $b_{\alpha\alpha} = \partial^2 g / \partial \alpha^2$ при $\alpha = 0, h = h_0, \xi = 1$. Функция $g_{\alpha\alpha}$ находится при численном решении задачи Коши

$$Kg_{\alpha\alpha} = 4h_0^3 (f_\alpha g' - f'_\alpha g)$$

$$g_{\alpha\alpha} = 0, g'_{\alpha\alpha} = 0 \quad (\xi = 0)$$

Краевая задача для f_α получается заменой в (2.1) функций f_1, t_1, g_1 соответственно на $f_\alpha, t_\alpha, \varphi$ и прибавлением к правой части в первом уравнении слагаемого $2h_0^3 \varphi \varphi'$. Задача для $g_{\alpha\alpha}$ решена численно.

На фиг. 3 штриховыми линиями изображены графики функции $b_{\alpha\alpha}(h)/10$ (кривые 3 и 4) в зависимости от параметра h . Отметим, что $b_{\alpha\alpha} \rightarrow \pm \infty$ при $h \rightarrow h_* \mp 0$. Коэффициент $b_{\alpha\alpha} = 0$ при $h = 3,3419$ и $\tau = -20,831$. Отметим, что $b_{\alpha\alpha} < 0$ в интервале $(2,4806; 3,3419)$ и $b_{\alpha\alpha} > 0$ вне этого интервала. Кривые 3 и 4 (фиг. 3) рассчитаны для значений τ, h , принадлежащих бифуркационной ветви 1 (фиг. 2). Графики функции $b_{\alpha\alpha}(h)$ при τ, h , принадлежащих бифуркационной ветви 2 (фиг. 2), не изображены. Отметим, что соответствующие значения коэффициента $b_{\alpha\alpha}$ строго положительны.



Фиг. 3

Теперь, используя диаграмму Ньютона [9], из уравнения (2.7) находим параметр

$$\alpha = \pm \sqrt{2(h_0 - h)b_h / b_{\alpha\alpha}} + \dots \quad (h \rightarrow h_0) \quad (2.8)$$

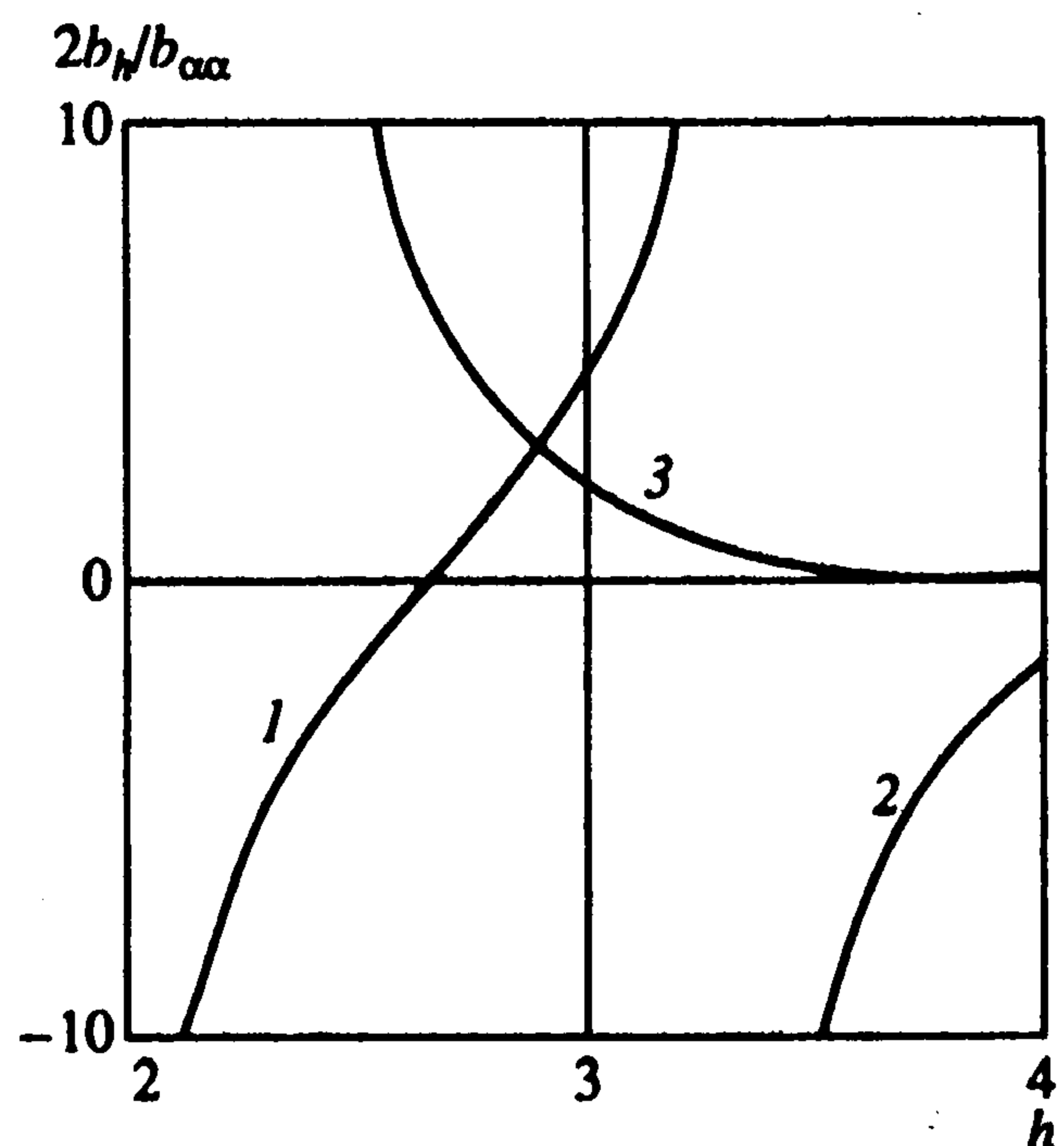
Коэффициент $2b_h/b_{\alpha\alpha}$ в формуле (2.8) рассчитан численно.

На фиг. 4 изображена зависимость коэффициента $2kb_h/b_{\alpha\alpha}$ от параметра h (здесь значения k равны 0,1; 1 и 10 для ветвей 1; 2 и 3 соответственно). Формула (2.8) не справедлива при $h = 3,3419$, где $b_{\alpha\alpha} = 0$. При $h = 2,6089$ коэффициент $b_h = 0$. Следовательно, формула (2.8) также не справедлива. Отметим, что $b_h \rightarrow \pm \infty, b_{\alpha\alpha} \rightarrow \pm \infty$ при $h \rightarrow h_* = 2,4806$, однако отношение $2b_h/b_{\alpha\alpha}$ имеет конечный предел, равный $-0,17365$. Итак, в перечисленных трех исключительных случаях формула (2.8) не справедлива. Ниже будет проведен дополнительный анализ.

Отметим, что ответвление решений происходит в сторону $h < h_0(\tau)$ для значений (τ, h) , принадлежащих бифуркационной ветви 2 фиг. 2, а также для значений (τ, h) , принадлежащих ветви 1, в интервале $h \in (2,6089; 3,3419)$. Ответвление решений происходит в сторону $h > h_0$ для значений (τ, h) , принадлежащих ветви 1 фиг. 2, в интервалах $h \in (0; 2,4806)$ и $h \in (3,3419; 4)$.

3. В окрестности значений $h_0(\tau)$ построим асимптотику решений, ответвляющихся от основного решения Φ_0, θ_0 в сторону $h > h_0$. Из рассмотрения исключаем точки со значениями $h_* = 2,4806, h_1 = 2,6089, h_2 = 3,3419$. Введем малый параметр $\varepsilon_1 = \sqrt{h - h_0}$. Решение задачи (1.4) при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ представим в виде рядов

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{00} + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_1^2 (f_2 + \Phi_{02}) + \dots \\ G &= \varepsilon_1 g_1 + \varepsilon_1^2 g_2 + \varepsilon_1^3 g_3 + \dots \\ T_1 &= \theta_{00} + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_1^2 (t_2 + \theta_2) + \dots \\ \Phi_{00} &= \Phi_0(\xi, h_0(\tau), \tau, \gamma), \quad \theta_{00}(\xi, h_0(\tau), \gamma) \\ \Phi_{02} &= \partial \Phi / \partial h, \quad \theta_{02} = \partial \theta / \partial h \quad (h = h_0(\tau)) \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 4

Ряды (3.1) подставляем в систему (1.4) и приравниваем нулю коэффициенты при ε_1^k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Для f_1, g_1, t_1 выводим краевую задачу на собственные значения, которая получается из (2.1) заменой Φ_0, θ_0, h соответственно на $\Phi_{00}, \theta_{00}, h_0(\tau)$. Решение этой задачи получается в виде $g_1 = c_1 \varphi(\xi), f_1 = 0, t_1 = 0$. Во втором приближении функции f_2, t_2, g_2 представим в виде $f_2 = c_1^2 f_\alpha, t_2 = c_1^2 t_\alpha, g_2 = c_2 \varphi(\xi)$, где функции f_α, t_α уже определены при вычислении коэффициента $g_{\alpha\alpha}$ в уравнении разветвления. Коэффициенты $c_1(\tau), c_2(\tau)$ находятся из условий разрешимости краевых задач в третьем и четвертом приближениях.

Исследование краевой задачи для функции $g_3(\xi)$ приводит к формуле $c_1^2 = -2b_h/b_{\alpha\alpha}$, где $b_{\alpha\alpha}, b_h$ — коэффициенты в формуле (2.8), которые уже определены численно.

Отметим, что на фиг. 4 ветви, расположенные ниже оси абсцисс, изображают зависимость коэффициента — c_1^2 от параметра h в данном случае.

Асимптотика решений, ответвляющихся от Φ_0, θ_0 при $h < h_0$, строится по формулам (3.1), в которых ε_1 следует заменить на $\varepsilon_2 = \sqrt{h_0 - h}$. Теперь $c_1 = 2b_h/b_{\alpha\alpha}$. На фиг. 4 ветви, расположенные выше оси абсцисс, изображают зависимость c_1^2 от h .

4. В особой точке $\tau = -20,831$ и $h = 3,3419$ коэффициенты уравнения разветвления вычисляются известным методом [8], а само уравнение приводится к виду

$$(h - h_0)b_h + \alpha^4 b_4 / 24 + \dots = 0$$

Численный расчет приводит к формуле

$$\alpha = \pm 0,5136(h - h_0)^{1/4} + \dots, \quad (h \rightarrow h_0)$$

Итак, при $\tau = -20,831, h_0 = 3,3419$ от основного решения ответвляются два симметричных решения в сторону $h > h_0$. Ответвившиеся решения построены численно. Расчеты показали, что при $\tau = -20,831$ решения, ответвившиеся от основного в точке $h = 3,3419$, снова замыкаются на основное решение при $h = 2,2590$ в другой точке ветвления.

На фиг. 5 кривые 1 и 2 изображают основное решение, а кривая 3 — ответвившееся решение. По оси абсцисс отложена толщина слоя h , а по оси ординат — $F'(0)$, величина, пропорциональная радиальной компоненте скорости на свободной границе. Точка A_1 — особая точка, в которой $h_0 = 3,3419$.

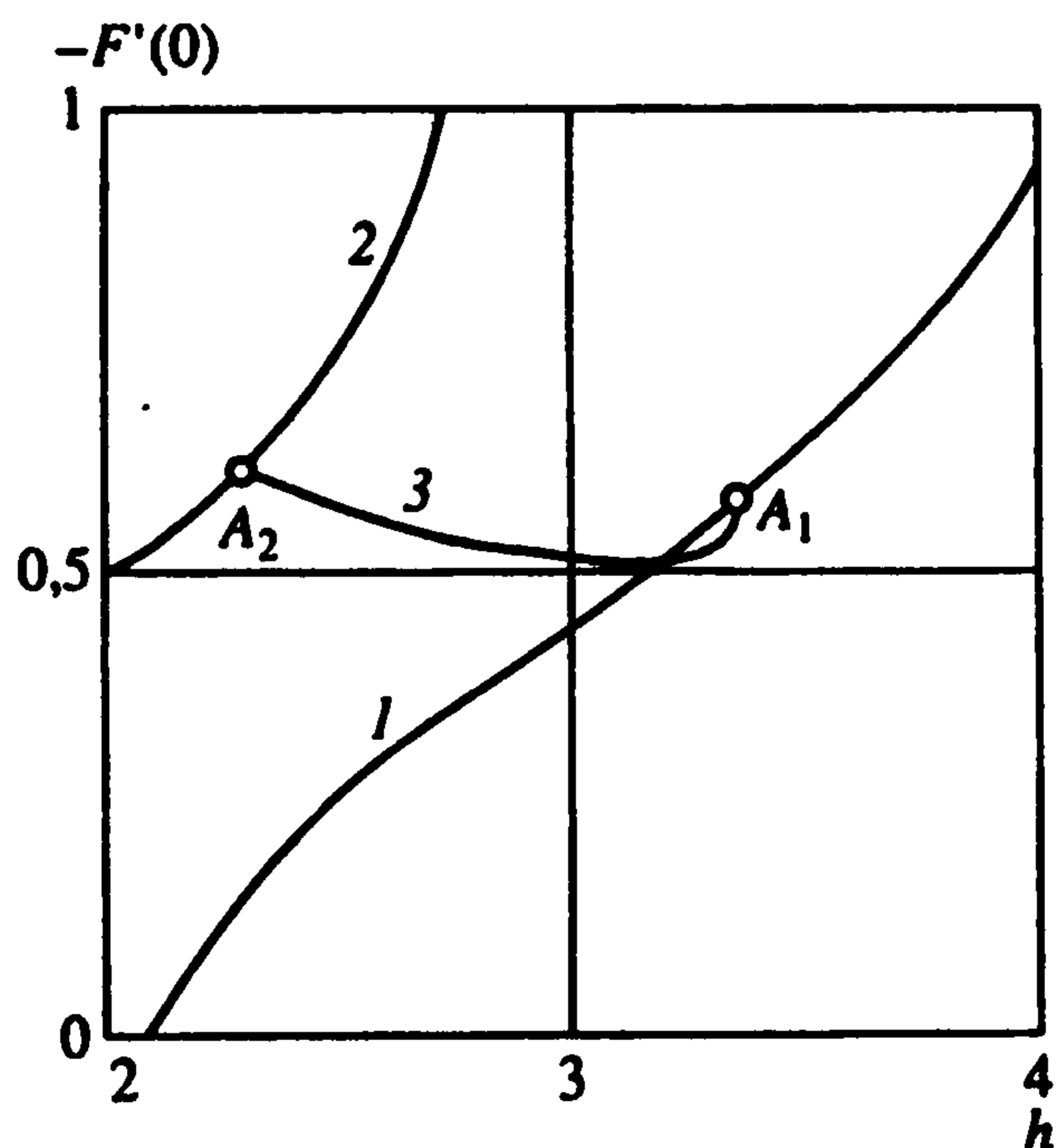
5. Рассмотрим точку с координатами $h^* = -52,3059, \tau^* = -52,3059$, в которой $b_h = 0$. Отметим, что здесь $b_{\alpha h} = 0$. Приведем главные члены уравнения разветвления

$$\alpha^2 b_{\alpha\alpha} + (h - h^*)^2 b_{hh} + \dots = 0 \quad (\alpha \rightarrow 0, h \rightarrow h^*) \quad (5.1)$$

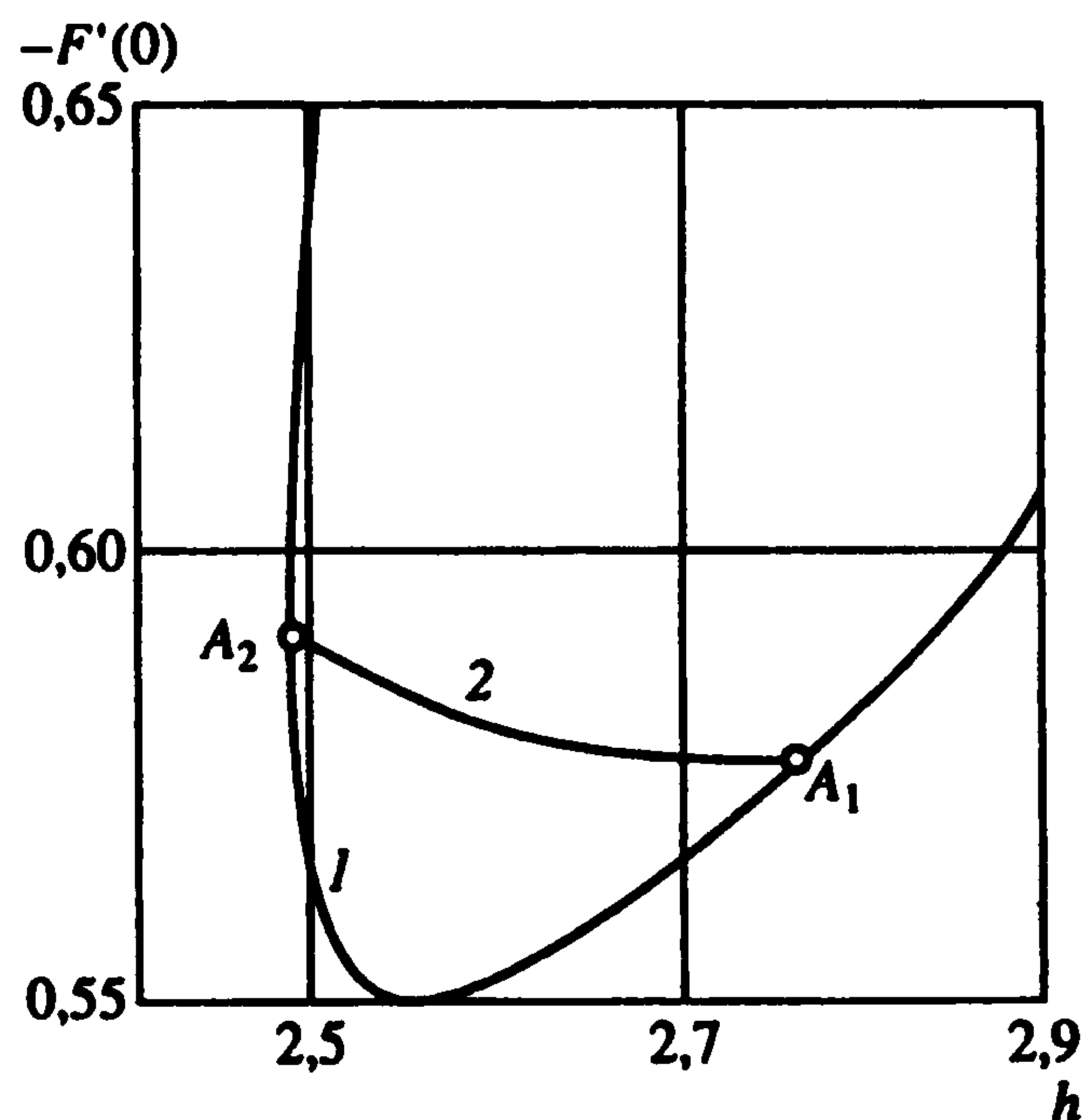
Численный расчет коэффициентов в (5.1) приводит к значениям $b_{\alpha\alpha} = -30,800; b_{hh} = -21,9270$. Это означает, что уравнение (5.1) не имеет вещественных корней. Следовательно, от точки (h^*, τ^*) ответвления решений не происходит.

На фиг. 6 на плоскости параметров $(h, -F'(0))$ кривые 1 и 2 изображают соответственно основное и ответвившееся решения при значении $\tau = -49,22$, близком к τ^* . Отметим, что при $\tau \rightarrow \tau^*$ точки ветвления A_1 и A_2 сближаются и при $\tau = \tau^*$ сливаются, при этом ветвь 2 исчезает.

6. Рассмотрим точку, для которой $h = h_* = 2,4806$ и $\tau = \tau_* = -49,2231$. Для этой точки $D(f, f', t)/D(p_1, p_2, p_3) = 0$, причем f, f', t определяются из (2.5). Кроме того, $b_h \rightarrow \pm \infty, b_{\alpha\alpha} \rightarrow \pm \infty$ при $h \rightarrow h_*, \tau \rightarrow \tau_*$. Отметим, что в этой точке задача на собственные значения (2.1) имеет решение, отличное от описанного в разд. 2. Именно теперь собственные функции задачи (2.1) найдены в виде $f_1 = \psi(\xi), t_1 = \Gamma(\xi), g_1 = \varphi(\xi)$ при



Фиг. 5



Фиг. 6

условии нормировки $\psi'(0) = 1$. Расчеты приводят к значениям $\psi'''(0) = -10,8968$ и $\Gamma'(0) = 135,4008$. Функция $\psi'(\xi)$ на отрезке $[0; 1]$ имеет только один нуль.

Построим асимптотику основного решения $\Phi_0(\xi)$, $\theta_0(\xi)$ в окрестности точки (h_*, τ_*) . Обозначим $\Phi'(0) = p$ и поменяем ролями параметры h и p , т.е. p считаем заданным, а h – подлежащим определению. Введем малый параметр $\varepsilon = p - p_*$, где $p_* = 0,2387$ – значение p при $h = h_*$ и $\tau = \tau_*$. Функции Φ_0 , θ_0 и h разложим в ряд по степеням ε

$$\Phi_0 = \Phi_{00}(\xi) + \varepsilon \Phi_{01}(\xi) + \dots, \quad h = h_* + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad (6.1)$$

Аналогичный ряд строим для функции θ_0 с коэффициентами $\theta_{00}, \theta_{01}, \dots$. Функции Φ_{00}, θ_{00} уже определены из системы (1.4) при $h = h_*$ и $\tau = \tau_*$, а график функции $h\Phi'_{00}(0)$ изображен на фиг. 6 кривой 1. Высшие приближения находятся путем решения линейных краевых задач. Приведем главные члены асимптотических рядов при $h \rightarrow h_*, \tau \rightarrow \tau_*$

$$\Phi_0(\xi, h) = \Phi_{00}(\xi, h) \pm \sqrt{(h - h_*)/\beta_1} \psi(\xi) + O(h - h_*)$$

$$\theta_0(\xi, h) = \theta_{00}(\xi, h) \pm \sqrt{(h - h_*)/\beta_1} \Gamma(\xi) + O(h - h_*)$$

Значение $\beta_1 = 83,1127$ найдено численно. Отсюда следует что $\partial \Phi_0 / \partial h \rightarrow \pm \infty$, $\partial \theta_0 / \partial h \rightarrow \pm \infty$ при $h \rightarrow h_*, \tau \rightarrow \tau_*$.

Теперь составим уравнение разветвления при $h = h_*$ и $\tau = \tau_*$. Обозначим $p = \Phi'(0)$ и поменяем ролями параметры h и p . Функции Φ , θ , G , h представим в виде

$$\Phi = \Phi_0(\xi, p) + \alpha f(\xi, p, \alpha), \quad G = \alpha g(\xi, p, \alpha) \quad (6.2)$$

$$\theta = \theta_0(\xi, p) + \alpha t(\xi, p, \alpha), \quad h = h_*(p) + \alpha H(\alpha, p)$$

при условии $g = 0$ ($\xi = 1$). Для функций f, g, t выводим нелинейную краевую задачу. Применяя метод, изложенный в разд. 2, поставим задачу Коши для определения функций f, g, t . Введем параметры $p_1 = f'''(0)$, $p_2 = t'(0)$. Далее, выполняя краевые условия на твердой стенке ($\xi = 1$), получим соотношения

$$f(1, \alpha, p_1, p_2, p) = 0, \quad f'(1, \alpha, p_1, p_2, p) = 0 \quad (6.3)$$

$$t(1, \alpha, p_1, p_2, p) = 0, \quad g(1, \alpha, p_1, p_2, p) = 0$$

Численные расчеты дают

$$D(f, f', t) / D(p, p_1, p_2) = 0, \quad D(f, f') / D(p_1, p_2) \neq 0$$

Далее используем метод работы [9] для исследования двумерного случая ветвления. Уравнение разветвления приводится к виду

$$(p - p_*)b_p + \alpha^2 b_{\alpha\alpha} / 2 + \dots = 0$$

Последнее уравнение имеет два решения

$$\alpha = \pm 1,2506 \sqrt{p - p_*} + \dots \quad (p \rightarrow p_*)$$

Итак, от точки с координатами $h = h_*$, $\tau = \tau_*$ ответвляются два новых решения, отличающиеся от основного наличием окружной компоненты скорости. На фиг. 6 кривая 1 изображает основное решение ($v_\theta = 0$), а кривая 2 – ответвившееся решение. Точка A_2 соответствует значениям h_* , τ_* .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Batishev V.A.* Bifurcations of non-stationary termocapillary regimes of fluid flow in thin Marangoni layers // Proc. 15th IMACS World Congr. 1997. On Scientific Computations, Modeling and Applied Mathematics. Berlin. Germany, 1997. V. 3. P. 211–217.
2. *Батищев В.А.* Автомодельные решения, описывающие термокапиллярные течения в вязких слоях // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 389–395.
3. *Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Маранго-ни // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1061–1064.
4. *Napolitano L.G., Golia C.* Coupled Marangoni boundary layers // Acta Astronaut. 1981. V. 8. № 5–6. P. 417–434.
5. *Пухначев В.В.* Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск.: Изд-во НГУ, 1989. 96 с.
6. Гидромеханика невесомости / Под ред. Мышкиса А.Д. М.: Наука, 1976. 504 с.
7. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
8. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems / Eds Keller J.B., Antman S. N.Y.; Amsterdam: W.A. Benjamin, 1969. = Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. Келлера Дж., Антмана С. М.: Мир, 1974. 254 с.
9. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.