

УДК 532.5:534.1

© 2000 г. А.М. Тер-Крикоров

ОБ УРАВНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАВУЧЕСТИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Выводится нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка, описывающее осесимметрические движения идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости в поле силы тяжести. На оси симметрии распределены потенциальные вихри и источники массы. В линейном приближении строится класс стационарных решений, зависящий от трех вещественных параметров. Исследуется асимптотическое поведение таких решений на малых и больших расстояниях от оси симметрии.

1. Основное уравнение. Система уравнений, описывающих осесимметрическое движение идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости в поле силы тяжести, имеет вид [1]

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial r} D^2 z = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad D(rv_\theta) = 0 \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} - H \right) + N^2 z + \frac{\partial z}{\partial \zeta} D^2 z = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + D \ln \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.3)$$

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + gz, \quad N^2 = -\frac{g\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \quad (1.4)$$

Здесь (r, θ, ζ, t) – независимые переменные: r – расстояние точки до оси симметрии, θ – полярный угол, ζ – расстояние жидкой частицы в положении равновесия от фиксированной горизонтальной плоскости, t – время; декартова координата z – зависимая переменная, v_r, v_θ – радиальная и окружная скорости жидкой частицы, p – давление, g – ускорение силы тяжести, $\rho(z)$ – плотность частицы в положении равновесия, N – частота Брента – Вайсяля.

В случае, когда среда – идеальный газ, ограничимся диапазоном частот Брента – Вайсяля, когда акустические колебания несут существенны по сравнению с колебаниями плавучести. Было показано [1], что при таком предположении система уравнений сохраняет вид (1.1)–(1.3), но соотношения (1.4) принимают вид

$$H = \frac{a^2}{\kappa - 1} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + gz, \quad N^2 = \frac{ga'(\zeta)}{\kappa a(\zeta)}, \quad \kappa = c_p / c_v$$

где a – скорость звука, $\ln a(z)$ – энтропия частица газа в положении равновесия.

Уравнению сохранения массы (1.3) нетрудно придать дивергентную форму

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r z_\zeta) + \frac{\partial}{\partial t}(rz_\zeta) = 0 \quad (1.5)$$

Если положить

$$z = \zeta + w = \zeta + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}$$

$$rv_r \frac{\partial z}{\partial \zeta} = Q(\zeta, t) - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta \partial t}, \quad u = \frac{r^2}{2} \quad (1.6)$$

где $Q(\zeta, t)$ – произвольная функция, то уравнение (1.5) будет удовлетворено и из соотношений (1.6) получим

$$v_r = \frac{A\omega}{r}, \quad z = \zeta + \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad A\omega = \left(Q - \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial \zeta} \right) \left(1 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial \zeta} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

Из второго уравнения (1.1) следует, что $v_\theta = \gamma(\zeta)/r$, где произвольная функция $2\pi\gamma(\zeta)$ равна циркуляции вектора скорости по простому контуру в плоскости $\zeta = \text{const}$.

Исключая функцию H из уравнений (1.1) и (1.2) и используя равенства (1.6), (1.7), получаем уравнение

$$\left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\gamma^2 + (A\omega)^2}{4u} \right) + \frac{1}{2u} \frac{\partial(A\omega)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} \mathbf{D}^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \right) +$$

$$+ N^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\left(1 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial \zeta} \right) \mathbf{D}^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \right) = 0, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} + A\omega \frac{\partial}{\partial u}$$

2. Стационарные уравнения. В стационарном случае из уравнений (1.5) и (1.1) следует, что

$$v_r = \frac{Q(\zeta)}{r} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-1}, \quad -H(r, \zeta) = -g\zeta + \frac{Q^2(\zeta)}{2r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-2} \quad (2.1)$$

где $Q(\zeta)$ – произвольная функция. Если $Q = 0$, то

$$z = \zeta - \frac{1}{2N^2 r^2} \left(\frac{N^2}{g} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \gamma^2(\zeta)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда

$$\gamma(\zeta) = \text{const}, \quad Q(\zeta) = \text{const} \neq 0$$

Подставляя выражения (2.1) в уравнение (1.2) и делая замену переменных

$$r^2 = \frac{2QR}{N}, \quad z = \zeta + \alpha W, \quad \alpha = \frac{NQ}{4g} \left(1 + \frac{\gamma^2}{Q^2} \right) \quad (2.2)$$

получаем нелинейное уравнение

$$\mathbf{L}W + R^{-1} + \mathbf{F}W = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{L}W = \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + W + \frac{Q}{2NR} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} - \frac{N^2}{g} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)$$

$$\mathbf{F}W = -\alpha \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial W}{\partial R} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \left(1 + \alpha \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)^{-1} \right) +$$

$$+\left(\frac{N^2}{g}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{Q}{4NR}\left(2\alpha^2\left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^3+3\alpha\left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^2\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial R}\right)^2\right)\left(1+\alpha\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^{-2}$$

3. Решение нелинейного уравнения, не зависящее от ζ . Если функция W не зависит от ζ , то уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + W + \frac{1}{R} + \beta \left(\frac{\partial W}{\partial R}\right)^2 = 0, \quad \beta = \frac{N^3 Q}{8g^2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{Q^2}\right) \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) в виде ряда по обратным степеням R имеет вид

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{R^k}, \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 2$$

$$c_k + \beta \sum_{i=2}^k (i-1)(k-i+1)c_{i-1}c_{k-i-1} + (k-1)(k-2)c_{k-2}, \quad k \geq 4$$

$$c_4 = \beta, \quad c_5 = -24, \dots$$

4. Некоторые классы решений линейного уравнения. Для нелинейного уравнения (2.3) трудно найти точное решение. В дальнейшем ограничимся исследованием линейного уравнения. Отбрасывая в уравнении (2.3) нелинейные члены, получаем

$$LW + R^{-1} = 0 \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1), не зависящее от переменной ζ , имеет вид

$$W_0(R) = \int_R^{\infty} \frac{\sin(R-y)}{y} dy = -\sin R \operatorname{Ci}(R) - \cos R \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(R)\right) \quad (4.2)$$

Справедливы асимптотические формулы

$$W_0(R) = -\left(R \ln R + \frac{\pi}{2} + (1-\gamma)R\right) + o(R) \quad \text{при } R \rightarrow +0$$

$$W_0(R) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n n!}{R^{2n+1}} \quad \text{при } R \rightarrow +\infty$$

где γ – постоянная Эйлера; последняя формула получена интегрированием по частям в (4.2).

Общее решение уравнения (4.1) имеет вид $W = W_0 + W_1$, где W_1 – решение однородного уравнения $LW_1 = 0$.

Будем разыскивать класс решения этого уравнения вида

$$W_1 = \omega e^{\lambda \zeta}, \quad \lambda > 0$$

Для определения функции ω получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial R^2} + \omega - \frac{2\eta}{R} \omega = 0, \quad \eta = \frac{Q\lambda}{4N} \left(\frac{N^2}{g} - \lambda\right)$$

являющееся частным случаем уравнения Кулона [2]. Для его решений известно интегральное представление

$$F_0(\eta, R) + iG_0(\eta, R) = iC_0^{-1}(\eta) e^{-iR} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-i\eta} (t + 2iR)^{i\eta} dt$$

$$C_0^2(\eta) = 2\pi\eta(e^{2\pi\eta} - 1)^{-1}$$

содержащее регулярную и нерегулярную волновые функции Кулона нулевого индекса.

Регулярная функция Кулона представима в виде суммы степенного ряда

$$F_0(\eta, R) = C_0(\eta) \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\eta) R^k$$

Коэффициенты A_k определяются рекуррентной системой уравнений

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \eta, \quad k(k-1)A_k = 2\eta A_{k-1} - A_{k-2}, \quad k > 2 \quad (4.3)$$

$$A_3 = -\frac{1}{6} + \frac{\eta^2}{3}, \quad A_4 = -\frac{\eta}{9} + \frac{\eta^3}{18}, \quad \dots$$

Нерегулярная функция Кулона имеет представление

$$G_0(\eta, R) = \frac{2\eta}{C_0^2(\eta)} F_0(\eta, R) (\ln 2R - 1 + 2\gamma + \operatorname{Re} \psi(1 + i\eta)) + C_0(\eta) \theta(\eta, R)$$

где $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма функции, а функция $\theta(\eta, R)$ раскладывается в степенной ряд

$$\theta(\eta, R) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^k, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = 0$$

$$k(k-1)B_k = 2\eta B_{k-1} - B_{k-2} - 2\eta(2k-1)A_k, \quad k > 2$$

$$B_2 = -\left(\frac{1}{2} + \eta^2\right), \quad B_3 = \left(\frac{\eta}{9} - \frac{14\eta^3}{9}\right), \dots$$

Для малых R

$$F_0(\eta, R) = C_0(\eta) R$$

$$G_0(\eta, R) = 2\eta R C_0^{-2}(\eta) (\ln 2R - 1 + 2\gamma + \operatorname{Re} \psi(1 + i\eta)) + C_0(\eta)$$

При $R \rightarrow \infty$

$$F_0(\eta, R) + iG_0(\eta, R) = i \exp(-i(R - \eta \ln 2R - \sigma)) \times \\ \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{i\eta(1-i\eta)^2 \dots (n-1-i\eta)^2 (n-i\eta)}{(2iR)^n n!} \right) \right), \quad \sigma = \arg \Gamma(1 + i\eta)$$

Ограничиваясь главными членами асимптотического ряда, получаем

$$G_0(\eta, R) = \cos(R - \eta \ln 2R - \sigma), \quad F_0(\eta, R) = \sin(R - 2\eta \ln R - \sigma)$$

Из соотношений (2.2) следует, что построен класс решений вида

$$z = \zeta + \alpha(W_0(R) + C_1(\eta) \cos R + C_2(\eta) \sin R) + \\ + e^{\lambda} (C_3(\eta) F_0(\eta, R) + C_4(\eta) G_0(\eta, R))$$

$C_k(\eta)$ – произвольные функции, функция $W_0(R)$ определена формулой (4.2), $F_0(\eta, R)$ и $G_0(\eta, R)$ волновые функции Кулона нулевого индекса.

Аналогично строится еще один класс решений

$$z = \zeta + W_0(R) + c_1(\lambda) \sin R + c_2(\lambda) \cos R + \alpha \exp\left(\frac{N^2}{2g} + i\lambda \sqrt{\frac{2N}{Q}}\right) \zeta \times$$

$$\times (c_3(\lambda)F_0(\delta(\lambda), R) + c_4(\lambda)G_0(\delta(\lambda), R)), \quad \delta(\lambda) = \frac{N^3 Q}{16g^2} - \frac{\lambda^2}{2}$$

Более общие классы решений можно получить, интегрируя это выражение по параметру λ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Крикоров А.М.* Вихри и внутренние волны в стратифицированной жидкости / ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 599–606.
2. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds *Abramovitz M., Stegun I.* Washington: National Bureau of Standards, 1964. = Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. *Абрамовица М., Стиган И. М.*: Наука, 1979. 830 с.
3. *Оганесян Х.В., Тер-Крикоров А.М.* Неустойчивость стационарных течений, генерируемых вихревой нитью в стратифицированном газе // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 467–469.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
25.X.1999