

УДК 531.38

© 2000 г. Н.В. Хлыстунова

О ПРЕЦЕССИИ ТИПА ГРИОЛИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Для задачи о движении тяжелого твердого тела в жидкости, которая описывается уравнениями Кирхгоффа – Клебша при условии Чаплыгина, рассматривается прецессия типа Гриоли относительно наклонной оси. Получены условия существования решения, соответствующего такому классу движений в случае, когда оси собственного вращения и прецессии тела не являются взаимно перпендикулярными.

Предположим, что свободное твердое тело, ограниченное односвязной поверхностью, движется под действием однородного поля силы тяжести в беспредельном объеме идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Пусть в теле имеется маховик симметричной формы, вращающийся с постоянной угловой скоростью относительно оси, неизменно связанной с телом-носителем. Положим также, что вес вытесненной телом жидкости равен весу тела с маховиком.

Введем в неизменно связанной с телом системе координат $Ox_1x_2x_3$ импульсивную силу $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ – вектор количества движения системы "гиростат плюс жидкость" и импульсивный момент $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ – вектор кинетического момента системы относительно точки O . Тогда кинетическая энергия системы имеет вид [1–3]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji} \quad (1)$$

где a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} – постоянные, зависящие от характеристик системы "гиростат плюс жидкость". Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – проекций гиростатического момента маховика на оси x_i и e_1, e_2, e_3 – постоянные, пропорциональные проекции на оси x_i радиус-вектора, проведенного из центра тяжести объема, ограниченного внешней поверхностью тела, в центр масс гиростата. Компоненты векторов поступательной u и мгновенной угловой скорости Ω определяются соотношениями

$$u_i = \partial T / \partial R_i, \quad \Omega_i = \partial T / \partial P_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Предположим, что импульсивная сила $\mathbf{R}$ направлена по восходящей вертикали. Основываясь на известных исследованиях [1–4], уравнения движения системы "гиростат плюс жидкость" можно записать в виде

$$dP_1 / dt + \Omega_2(P_3 + \lambda_3) - \Omega_3(P_2 + \lambda_2) + u_2R_3 - u_3R_2 = e_2R_3 - e_3R_2 \quad (123) \quad (3)$$

$$dR_1 / dt + \Omega_2R_3 - \Omega_3R_2 = 0 \quad (123) \quad (4)$$

Итак, уравнения (3), (4) описывают движение по инерции в беспредельной жидкости твердого тела, ограниченного многосвязной поверхностью [4]. Символ (123) означает, что остальные уравнения получим циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Предположим, что γ – единичный вектор, фиксированный в неподвижном пространстве, а – единичный вектор, фиксированный в теле ($\dot{a} = 0$).

Движение тела называют прецессионным [5], если во все время движения остается постоянным угол θ_0 между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. В силу определения условие прецессионности движения можно охарактеризовать следующим инвариантным соотношением:

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a_0, \quad a_0 = \cos \theta_0$$

Пусть $\mathbf{v}$ – единичный вектор, характеризующий направление неизменной в пространстве импульсивной силы $\mathbf{R} = H\mathbf{v}$ ($\mathbf{R}^2 = H^2 = \text{const}$). Не нарушая общности, будем считать, что вектор $\mathbf{a}$ направлен по оси x_3 . Неподвижную систему координат свяжем с вектором $\boldsymbol{\gamma}$, вводя углы Эйлера θ_0, φ, ψ так, чтобы

$$\boldsymbol{\gamma} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \quad a'_0 = \sin \theta_0, \quad c_0 = \cos \sigma_0, \quad b_0 = \sin \sigma_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = (c_0 + a'_0 b'_0 \sin \psi) \boldsymbol{\gamma} - b'_0 \mathbf{a} \sin \psi - b'_0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) \cos \psi, \quad b'_0 = b_0 / a'_0$$

где σ_0 – угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Тогда угловую скорость тела можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\gamma} \quad (6)$$

Это соотношение является кинематическим условием прецессионности движения твердого тела с неподвижной точкой [5].

Пусть движение гиростата является регулярной прецессией типа Гриоли относительно наклонной оси [6], тогда выполнено условие $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$. Выбором неподвижной системы координат добьемся равенства $\varphi = \psi = mt$, где m – постоянная. Тогда, учитывая соотношения (5), (6), будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= m a'_0 \sin \varphi, \quad \Omega_2 = m a'_0 \cos \varphi, \quad \Omega_3 = m(1 + a_0) \\ R_1 &= H(a'_0 c_0 \sin \varphi - \frac{b_0}{2}(1 - a_0) - \frac{b_0}{2}(1 + a_0) \cos 2\varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

$$R_2 = H(a'_0 c_0 \cos \varphi + \frac{b_0}{2}(1 + a_0) \sin 2\varphi), \quad R_3 = H(a_0 c_0 - b_0 a'_0 \sin \varphi)$$

Можно убедиться, что уравнения (4) тождественно удовлетворяются соотношениями (7).

На основе соотношений (2) представим векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{u}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B}\mathbf{R} \\ \mathbf{A} &= \|A_{ij}\|_1^3 = a^{-1}, \quad \mathbf{B} = \|B_{ij}\|_1^3 = b - c^T a^{-1} c, \quad \mathbf{C} = \|C_{ij}\|_1^3 = a^{-1} c \\ a &= \|a_{ij}\|_1^3, \quad b = \|b_{ij}\|_1^3, \quad c = \|c_{ij}\|_1^3 \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя выражения (7), (8) в первое из уравнений (3) и требуя, чтобы полученное равенство было тождеством по переменной φ , находим условия

$$\begin{aligned} B_{22} &= B_{11}, \quad B_{12} = 0, \quad C_{21} = -C_{12} + \frac{Hb_0}{2m} B_{23}, \quad C_{22} = C_{11} - \frac{Hb_0}{2m} B_{13} \\ m^2(1 - a_0)(A_{22} - A_{11}) + H^2 b_0 c_0 a_0 B_{13} - Hb_0 e_1 - mHb_0(1 - a_0)(C_{13} + C_{31}) &= 0 \\ Hc_0(1 + 2a_0)B_{23} - e_2 + m(1 + a_0)(C_{23} + C_{32}) &= 0 \\ H^2 b_0 c_0 a_0 B_{23} - 2m^2(1 - a_0)A_{12} - Hb_0 e_2 - mHb_0(1 - a_0)(C_{23} + C_{32}) &= 0 \\ \frac{1}{2} H^2 b_0 (c_0^2(1 + a_0) + a_0 b_0^2) B_{23} - m^2(1 - a_0)c_0 A_{12} + mb_0 \lambda_2 + m^2 b_0 a_0 A_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$m^2(1-a_0)c_0(A_{11}-A_{22})-\frac{1}{2}H^2b_0^3B_{13}-mb_0\lambda_1-m^2b_0a_0A_{13}+ \\ +mHb_0c_0(C_{13}+C_{31})+mHb_0^2C_{33}=0$$

При учете равенств (9) подставим соотношения (7), (8) во второе из уравнений (3) и, положив, чтобы полученное равенство было тождеством по переменной φ , найдем

$$B_{13}=0, \quad B_{23}=0, \quad A_{12}=0, \quad m(A_{22}-A_{11})-Hb_0(C_{13}+C_{31})=0, \quad A_{23}=0 \\ ma_0A_{13}+Hb_0(1-a_0)C_{11}+Hb_0a_0C_{33}=0 \quad (10)$$

$$mb_0[a_0A_{22}-(1+a_0)A_{33}]-b_0\lambda_3+mc_0(1+a_0)A_{13}+ \\ +Hb_0c_0[(1+2a_0)C_{33}-2a_0C_{11}]=0$$

На основе равенств (10) из соотношений (9) будем иметь

$$C_{22}=C_{11}, \quad C_{21}=-C_{12}, \quad C_{23}=-C_{32}, \quad e_1=e_2=0, \quad \lambda_2=0 \quad (11)$$

$$Ha_0c_0(C_{13}+C_{31})+Hb_0C_{33}-\lambda_1-ma_0A_{13}=0$$

Используя полученные ограничения на параметры задачи (10), (11), подставим соотношения (7), (8) в третье уравнение из (3). Получающееся равенство будет тождеством по переменной φ при условиях

$$m^2(A_{22}-A_{11})+H^2b_0^2(B_{11}-B_{33})=0 \quad (12)$$

$$m^2(1+a_0)A_{13}+H^2a_0b_0c_0(B_{11}-B_{33})+Hb_0e_3=0$$

Соотношения (10)–(12) удобно представить в следующем виде:

$$A_{12}=A_{23}=0, \quad B_{22}=B_{11}, \quad B_{12}=B_{13}=B_{23}=0, \quad \lambda_2=0$$

$$e_1=e_2=0, \quad C_{22}=C_{11}, \quad C_{21}=-C_{12}, \quad C_{23}=-C_{32}, \quad \chi_0=C_{13}+C_{31}$$

$$\chi_1=C_{33}+C_{11}+a_0(C_{33}-C_{11}), \quad \chi_2=A_{13}\chi_0+(A_{22}-A_{11})(C_{33}-C_{11})$$

$$B_{33}=B_{11}+\frac{\chi_0^2}{A_{22}-A_{11}}, \quad a_0=\frac{C_{11}(A_{11}-A_{22})}{\chi_2} \quad (13)$$

$$m=\frac{Hb_0\chi_0}{A_{22}-A_{11}}, \quad H=\frac{\lambda_1}{b_0\chi_1+c_0a_0\chi_0}$$

$$\lambda_1=\frac{e_3(A_{22}-A_{11})^2(b_0\chi_1+c_0a_0\chi_0)}{\chi_0[b_0((A_{22}-A_{11})(\chi_1-C_{33})-A_{13}\chi_0)+c_0a_0\chi_0(A_{22}-A_{11})]}$$

$$\frac{b_0}{c_0}=\frac{a_0\lambda_3\chi_0^2-e_3[(1+a_0)A_{13}\chi_0+(C_{33}+2a_0(C_{33}-C_{11}))(A_{22}-A_{11})]}{e_3\chi_0(a_0A_{22}-(1+a_0)A_{33})+(1+a_0)\lambda_3A_{13}(B_{33}-B_{11})}$$

При выполнении условий (13) движение тела является прецессией Гриоли относительно наклонной оси.

Отметим, что в данном случае оси собственного вращения и прецессии тела не будут взаимно перпендикулярными. Если в соотношениях (13) положить $a_0=0$, то приходим к результатам В.Н. Рубановского [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Собр. соч. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 337–346.
2. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая // Собр. соч. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 136–193.
3. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Собр. соч. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 194–311.
4. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
5. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
6. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed aplic. Ser. 4. 1947. Т. 26. Fasc. 3/4. Р. 271–281.
7. *Рубановский В.Н.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 212–219.

Донецк
e-mail: nat@iamm ac.donetsk. ua

Поступила в редакцию
12.X.1999