

УДК 531.36

© 2000 г. А.Ю. Александров

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Рассматривается задача об устойчивости решений некоторого класса нелинейных систем по первому приближению. С использованием метода функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости по всем переменным и асимптотической устойчивости относительно части переменных в случае, когда система первого приближения существенно нелинейна.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X) + G(t, X, Y) \\ \dot{Y} &= Q(t, Y) + D(t, X, Y)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь X и Y – векторы размерности n и k соответственно; элементы вектора $F(X)$ являются непрерывными однородными порядка μ функциями, $\mu \geq 1$; векторные функции $Q(t, Y)$, $G(t, X, Y)$, $D(t, X, Y)$ определены и непрерывны при

$$t \geq 0, \quad \|X\| \leq h, \quad \|Y\| \leq h\tag{1.2}$$

(h – положительная постоянная) и удовлетворяют условиям

$$Q(t, 0) \equiv 0, \quad \|G\| \leq c_1(X, Y) \|X\|^\mu, \quad \|D\| \leq c_2 \|X\|^\lambda$$

где $c_1(X, Y) \rightarrow 0$ при $\|X\| + \|Y\| \rightarrow 0$, $c_2 > 0$, $\lambda > 0$.

Наряду с уравнениями (1.1) рассмотрим систему

$$\dot{X} = F(X), \quad \dot{Y} = Q(t, Y)\tag{1.3}$$

которую будем называть системой первого приближения для (1.1).

Исследуем вопрос, при каких условиях устойчивость нулевого решения системы первого приближения обеспечивает устойчивость нулевого решения системы (1.1).

Пусть $\mu = 1$, $F(X) = AX$, $Q(t, Y) = CY$, где A и C – постоянные матрицы. При $C = 0$ известна теорема Ляпунова – Малкина об устойчивости в критическом случае нескольких нулевых корней ([1], с. 108–113). Было получено [2–4] обобщение этой теоремы на случай, когда $C \neq 0$, и показано, что если нулевое решение системы первого приближения устойчиво и асимптотически X -устойчиво, то при $\lambda \geq 1$ этим же свойством обладает нулевое решение системы (1.1).

Ниже для системы (1.1) найдены достаточные условия устойчивости по нелинейному приближению.

2. Пусть элементы вектора $F(X)$ – непрерывно дифференцируемые однородные порядка μ функции, $\mu > 1$. Предположим также, что нулевое решение системы (1.3) устойчиво и асимптотически X -устойчиво, причем существует функция Ляпунова $V_1(t, Y)$, обладающая свойствами: 1) $V_1(t, Y)$ – непрерывно дифференцируемая функ-

ция при $t \geq 0, \|Y\| \leq h$ и имеет ограниченные частные производные $\partial V_1 / \partial y_i, i = 1, \dots, k$; 2) $V_1(t, Y)$ – положительно-определенная функция; 3) $dV_1(t, Y)/dt|_{(1.3)} \leq 0$.

Заметим, что если функция $V_1(t, Y)$ обладает указанными свойствами, то устойчивость нулевого решения системы первого приближения является равномерной.

Теорема 1. При выполнении неравенства

$$\lambda > \mu - 1 \quad (2.1)$$

нулевое решение системы (1.1) равномерно устойчиво и асимптотически X-устойчиво.

Доказательство. Из асимптотической X-устойчивости нулевого решения системы (1.3) следует существование положительно-определенных однородных порядка m и $m + \mu - 1$ соответственно функций $V(X)$ и $W(X)$, для которых имеет место равенство

$$(\partial V / \partial X)^T F(X) = -W(X)$$

причем функция $V(X)$ непрерывно дифференцируема ([5, с. 115–123], [6]).

Вычисляя производные функций $V(X)$ и $V_1(t, Y)$ в силу системы (1.1), получаем, что при всех t, X, Y из области (1.2) справедливы оценки

$$a_1 \|X\|^m \leq V(X) \leq a_2 \|X\|^m$$

$$dV/dt|_{(1.1)} \leq \|X\|^{m+\mu-1} (-a_3 + a_4 c_1(X, Y)), \quad dV_1/dt|_{(1.1)} \leq a_5 \|X\|^\lambda$$

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, 5$$

Следовательно, существует число $\gamma > 0$, такое, что если при $t \in [t_0, t_1]$ решение $(X(t), Y(t))^T$ системы (1.1) остается в области $\|X\| < \gamma, \|Y\| < \gamma$, то на этом промежутке будут выполнены условия

$$dV(X(t))/dt \leq -a_3 \|X(t)\|^{m+\mu-1} / 2$$

$$V_1(t, Y(t)) \leq V_1(t_0, Y(t_0)) + a_5 \int_{t_0}^t \|X(\tau)\|^\lambda d\tau$$

Применяя метод оценок [5], получаем, что тогда при всех $t \in [t_0, t_1]$ имеют место неравенства

$$\|X(t)\| \leq b_1 \|X(t_0)\| (1 + b_2 \|X(t_0)\|^{\mu-1} (t - t_0))^{-1/(\mu-1)} \quad (2.2)$$

$$V_1(t, Y(t)) \leq V_1(t_0, Y(t_0)) + b_3 \|X(t_0)\|^{\lambda-\mu+1}$$

Здесь положительные постоянные b_1, b_2, b_3 не зависят от начальных данных рассматриваемого решения.

Зададим сколь угодно малое число $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \gamma$. Пусть

$$\beta = \inf_{t \geq 0, \|Y\| = \varepsilon} V_1(t, Y)$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись условия

$$2b_3\delta^{\lambda-\mu+1} < \beta, \quad b_1\delta < \varepsilon, \quad V_1(t, Y) < \beta/2 \quad \text{при} \quad \|Y\| < \delta$$

Из оценок (2.2) следует, что если начальные данные решения $(X(t), Y(t))^T$ удовлетворяют неравенствам $t_0 \geq 0, \|X(t_0)\| < \delta, \|Y(t_0)\| < \delta$, то при всех $t \geq t_0$ имеем $\|X(t)\| < \varepsilon, \|Y(t)\| < \varepsilon$, и при этом $\|X(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Замечание Теорема 1 утверждает, что если $\mu > 1$, то устойчивость нулевого решения может иметь место и при $\lambda < \mu$. Ранее [2–4] для уравнений (1.1) с линейной стационарной системой первого приближения предполагалось, что $\lambda \geq 1$, т.е. $\lambda \geq \mu$. Можно показать, что утверждения, полученные в указанных работах, справедливы и

при $\lambda > 0$. Таким образом, неравенство (2.1) представляет собой достаточное условие равномерной устойчивости и асимптотической X -устойчивости и в случае, когда $\mu = 1$.

Предположим далее, что в системе (1.1) векторная функция $F(X)$ дважды непрерывно дифференцируема, а вектор $G(t, X, Y)$ представим в виде

$$G(t, X, Y) = B(t)R(X) + H(t, X, Y)$$

Здесь элементы l -мерного вектора $R(X)$ – непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка σ , $\sigma \geq 1$; $B(t)$ – $(n \times l)$ -матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geq 0$ вместе с интегралом

$$I(t) = \int_0^t B(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

векторная функция $H(t, X, Y)$ непрерывна в области (1.2) и удовлетворяет неравенству $\|H\| \leq c_3(X, Y) \|X\|^\mu$, где $c_3(X, Y) \rightarrow 0$ при $\|X\| + \|Y\| \rightarrow 0$.

Применяя теорему 1, находим достаточные условия равномерной устойчивости и асимптотической X -устойчивости нулевого решения: $\sigma > \mu$, $\lambda > \mu - 1$.

Полученное ограничение на параметр σ можно ослабить, используя предложенный ранее [7, 8] способ построения нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем.

Теорема 2. При выполнении неравенств $2\sigma > \mu + 1$, $\lambda > \mu - 1$ нулевое решение системы (1.1) равномерно устойчиво и асимптотически X -устойчиво.

Доказательство. Пусть $V(X)$ и $V_1(t, Y)$ – функции Ляпунова, соответствующие системе первого приближения. Так как $F(X)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то можно считать, что и функция $V(X)$ дважды непрерывно дифференцируема ([5], с. 119–123, [6]).

Для системы (1.1) функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V_2(t, X) = V(X) - (\partial V / \partial X)^T I(t) R(X)$$

При всех t, X, Y из области (1.2) справедливы неравенства

$$a_1 \|X\|^m - a_3 \|X\|^{m+\sigma-1} \leq V_2(t, X) \leq a_2 \|X\|^m + a_3 \|X\|^{m+\sigma-1}$$

$$dV_2 / dt|_{(1.1)} \leq \|X\|^{m+\mu-1} (-a_4 + a_5 \|X\|^{\sigma-1} + a_6 \|X\|^{2\sigma-\mu-1} + a_7 c_3(X, Y))$$

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, 7$$

Используя функции $V_1(t, Y)$ и $V_2(t, X)$, дальнейшее доказательство проводим аналогично доказательству теоремы 1.

Таким образом, устойчивость нулевого решения может иметь место и при $\sigma \leq \mu$.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{X} = \partial W / \partial X + S(Y)X + B(t)R(X) \quad (2.4)$$

$$\dot{Y} = Q(t, Y) + D(t, X, Y)$$

Здесь $W(X)$ – непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, $\mu > 1$; $S(Y)$ – непрерывная при $\|Y\| \leq h$ кососимметрическая матрица, причем $S(0) = 0$; матрица $B(t)$ и векторы $R(X)$, $Q(t, Y)$, $D(t, X, Y)$ удовлетворяют указанным выше условиям. При этом по-прежнему будем предполагать, что для системы $\dot{Y} = Q(t, Y)$ существует функция Ляпунова $V_1(t, Y)$, обладающая свойствами 1–3.

Теорема 3. При выполнении неравенств $\sigma \geq \mu$, $\lambda > \mu - 1$ нулевое решение системы (2.4) равномерно устойчиво и асимптотически X -устойчиво.

Для доказательства функцию Ляпунова следует выбрать в виде

$$V(t, X) = \frac{1}{2} X^T X - X^T I(t) R(X)$$

а затем снова воспользоваться методом оценок.

3. Рассмотрим некоторые примеры применения доказанных теорем.

Пример 1. Пусть движение голономной механической системы с $n + k$ обобщенными координатами $(q, s)^T = (q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_k)^T$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -\partial P_1 / \partial q + \partial W / \partial \dot{q} + G(t, q, \dot{q}, s, \dot{s}) \\ \ddot{s} &= -\partial P_2 / \partial s + D(t, q, \dot{q}, s, \dot{s}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $P_1(q)$ – непрерывно дифференцируемая положительно-определенная однородная функция порядка $\nu + 1$, $\nu > 1$; $W(\dot{q})$ – непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, $\mu > 1$; $P_2(s)$ – непрерывно дифференцируемая при $\|s\| \leq h$ положительно-определенная функция; векторные функции G и D непрерывны в области $t > 0$, $\|q\| \leq h$, $\|\dot{q}\| \leq h$, $\|s\| \leq h$, $\|\dot{s}\| \leq h$ и удовлетворяют неравенствам

$$\|G\| \leq c_1(q, \dot{q}, s, \dot{s}) \|q\|^\alpha, \quad \|D\| \leq c_2 \|\dot{q}\|^\lambda$$

где $c_1(q, \dot{q}, s, \dot{s}) \rightarrow 0$ при $\|q\| + \|\dot{q}\| + \|s\| + \|\dot{s}\| \rightarrow 0$, а α, λ, c_2 – положительные постоянные.

Исследуем условия устойчивости положения равновесия

$$q = \dot{q} = 0, \quad s = \dot{s} = 0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим функцию

$$V(q, \dot{q}) = \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} + P_1(q) \right)^\beta + c P_1^r(q) \dot{q}^T q$$

где $c > 0$, $\beta \geq 1$, $r \geq 1$.

Если

$$r - \beta + 1 = \max \left\{ \frac{\mu - 1}{2}, \frac{\nu - \mu}{\mu(\nu + 1)} \right\} \quad (3.3)$$

то при достаточно малом c функция V положительно определена, а ее производная в силу системы

$$\ddot{q} = -\partial P_1 / \partial q + \partial W / \partial \dot{q} \quad (3.4)$$

является отрицательно-определенной функцией, причем существует δ , $0 < \delta < 1$, такое, что при $\|q\| < \delta$, $\|\dot{q}\| < \delta$ справедливы неравенства

$$a_1 (\|q\|^{\beta(\nu+1)} + \|\dot{q}\|^{2\beta}) \leq V(q, \dot{q}) \leq a_2 (\|q\|^{\beta(\nu+1)} + \|\dot{q}\|^{2\beta})$$

$$dV/dt|_{(3.4)} \leq -a_3 (\|q\|^{(\nu+1)(r+1)} + \|\dot{q}\|^{2\beta+\mu-1})$$

где a_1, a_2, a_3 – положительные постоянные.

Учитывая условие (3.3), имеем

$$dV/dt|_{(3.4)} \leq -a_3 (\|q\|^{(\nu+1)(r+1)} + \|\dot{q}\|^{2(r+1)}) \leq -a_3 a_4 (\|q\|^{\beta(\nu+1)} + \|\dot{q}\|^{2\beta})^\gamma \leq -a_5 V^\gamma$$

$$a_4 = \min_{z_1^2 + z_2^2 = 1} (|z_1|^{2\gamma} + |z_2|^{2\gamma}), \quad a_5 = a_3 a_4 a_2^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{r+1}{\beta} > 1$$

Применяя метод оценок ([5, с. 70–72]), получаем, что решения системы (3.4), начинающиеся при $t = 0$ в достаточно малой окрестности точки $q = \dot{q} = 0$, при всех $t \geq 0$ удовлетворяют условиям

$$\|q(t)\|^{(v+1)(r-\beta+1)} \leq A/(t+1), \quad \|\dot{q}(t)\|^{2(r-\beta+1)} \leq A/(t+1), \quad A > 0$$

Для системы

$$\ddot{s} = -\partial P_2 / \partial s$$

функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V_1(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} \dot{s}^T \dot{s} + P_2(s)$$

Используя построенные функции, можно показать, что при выполнении неравенств

$$\alpha \geq \max \left\{ v, \frac{\mu(v+1)}{2} \right\}, \quad \lambda > \max \left\{ \frac{v}{\mu} - 1, \frac{(\mu-1)(v+1)}{2} \right\}$$

положение равновесия (3.2) системы (3.1) равномерно устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно $q, \dot{q}$.

Пример 2. Пусть задано твердое тело, вращающееся в инерциальном пространстве с угловой скоростью ω вокруг своего центра инерции O . Предположим, что с телом связаны оси $Oxyz$, которые являются главными центральными осями этого тела. Уравнения вращательного движения тела под действием момента M имеют вид

$$\Theta \dot{\omega} + \omega \times \Theta \omega = M$$

где Θ – тензор инерции тела, $\Theta = \text{diag}\{A_1, A_2, A_3\}$ [9].

Рассмотрим движение твердого тела в сопротивляющейся среде.

Будем считать, что момент сил сопротивления среды определяется по формуле $M = (\gamma_1 \omega_1^\mu, \gamma_2 \omega_2^\mu, 0)^T$, где γ_1, γ_2 – отрицательные постоянные, μ – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $\mu > 1$. Предположим также, что $A_1 > A_3$, $A_2 > A_3$.

Используем функцию

$$V = A_1(A_1 - A_3)\omega_1^2 + A_2(A_2 - A_3)\omega_2^2$$

можно показать ([3], с. 19–20), что положение равновесия $\omega = 0$ асимптотически устойчиво относительно ω_1, ω_2 .

Пусть на рассматриваемое тело действует наряду с моментом M еще момент внешних возмущающих сил $M_1 = B(t)R(\omega_1, \omega_2)$, где элементы l -мерного вектора $R(\omega_1, \omega_2)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка σ , $\sigma \geq 1$, а $B(t)$ – $(3 \times l)$ -матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geq 0$ вместе с интегралом (2.3).

Применяя теорему 3, получаем, что при выполнении неравенств $\sigma \geq \mu$, $1 < \mu < 3$ положение равновесия $\omega = 0$ возмущенной системы равномерно устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по ω_1, ω_2 .

Если последняя компонента вектора M_1 равна нулю, то функцию Ляпунова можно выбрать в виде

$$V = \frac{1}{2} \omega^T \Theta \omega - \omega^T I(t) R(\omega_1, \omega_2)$$

При $\sigma \geq \mu$ построенная функция удовлетворяет всем требованиям теоремы В.В. Румянцева об асимптотической устойчивости по части переменных ([10, с. 38]).

Следовательно, в данном случае равномерная устойчивость положения равновесия по всем переменным и асимптотическая устойчивость по ω_1, ω_2 имеет место и при $\mu \geq 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
2. *Озиранер А.С.* Об устойчивости движения в критических случаях // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 415–421.
3. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 287 с.
4. *Матросова Н.И.* Вектор-функции Ляпунова в изучении критических случаев // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. С. 195–203.
5. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
6. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости по первому приближению // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 5. С. 516–530.
7. *Александров А.Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 205–209.
8. *Александров А.Ю.* Об асимптотической устойчивости равновесия неавтономных систем // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 35–40.
9. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
10. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

Санкт-Петербург
e-mail: alex@vrm.apmath.spbu.ru

Поступила в редакцию
15.XII.1998