

УДК 62–50

© 2000 г. Л.Д. Акуленко, Г.В. Костин

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В явной аналитической форме построено управление оптимального по быстродействию приведения фазовой точки линейной системы третьего порядка в начало координат. Считается, что характеристические показатели нулевые, а ограничения на управляющую функцию несимметричны. Система моделирует динамику материальной точки под действием силы, скорость изменения которой регулируется. Оптимальное управление построено как по обратной связи (синтез), так и в виде функции времени (программы). Приведены соотношения для кривой и поверхности переключений и временных интервалов движения; построены оптимальные фазовые траектории; исследована картина синтеза. Изучено влияние параметра, характеризующего несимметричность ограничений. Построены существенно более простые для реализации "квазиоптимальные" режимы управления.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача оптимального быстродействия [1] для управляемой системы третьего порядка вида

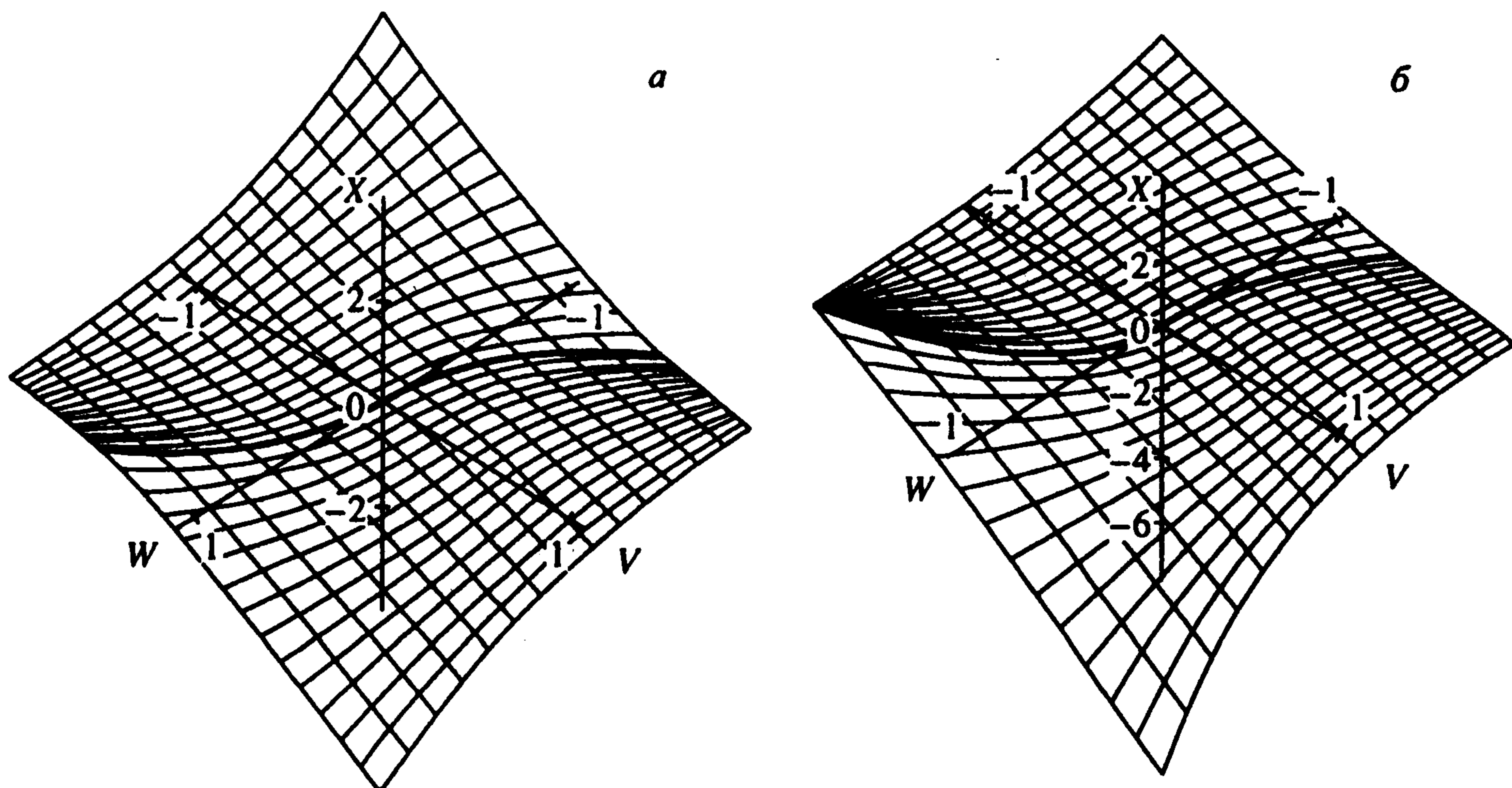
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u; & x(0) &= x^0, & \dot{x}(0) &= \dot{x}^0, & \ddot{x}(0) &= \ddot{x}^0 \\ x(t_f) &= \dot{x}(t_f) = \ddot{x}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$t_f \rightarrow \min_u, \quad u^- \leq u \leq u^+, \quad u^- < 0, \quad u^+ > 0$$

Требуется найти оптимальное управление u в форме программы $u^* = u_p(t, x^0, \dot{x}^0, \ddot{x}^0)$ и синтеза $u^* = u_s(x, \dot{x}, \ddot{x})$, а также время оптимального быстродействия $t_f^* = T(x^0, \dot{x}^0, \ddot{x}^0)$, моменты времени переключений управления, имеющего релейный характер, функцию Беллмана задачи (1.1) $T(x, \dot{x}, \ddot{x})$ и оптимальные траектории $x = x^*(t, x^0, \dot{x}^0, \ddot{x}^0)$, $\dot{x} = \dot{x}^*(t, x^0, \dot{x}^0, \ddot{x}^0)$, $\ddot{x} = \ddot{x}^*(t, x^0, \dot{x}^0, \ddot{x}^0)$, т.е. построить картину синтеза [1]. Полное решение этой задачи в научной литературе неизвестно. Оно представляет определенный методический и прикладной интерес.

Отметим, что еще до создания математического аппарата принципа максимума были изложены ([2, 3] и др.) схемы построения поверхности переключений, основанные на теореме А.А. Фельдбаума, были приведены также [3] уравнения для определения временных интервалов и упрощенные соотношения. Задача (1.1) исследована [4] для случая симметричных ограничений ($-u^- = u^+$) при отсутствии терминального условия, налагаемого на величину $\ddot{x}(t_f)$. Методами проблемы моментов Н.Н. Красовского [5] проанализирован [6] случай уравнения произвольного порядка $x^{(n)} = u$, $|u| \leq 1$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, с условиями типа (1.1) $x(t_f) = \dot{x}(t_f) = \dots = x^{(n-1)}(t_f) = 0$. Получены общие соотношения для времени быстродействия и особых множеств (линии, поверхности и гиперповерхности переключений управления), в частности, для $n = 3$, однако картина синтеза не исследована.

Решение задачи управления (1.1) существует для произвольных значений $x^0, \dot{x}^0, \ddot{x}^0$, см. разд. 4. Оптимальное по быстродействию управление удовлетворяет необходимым



Фиг. 1

и достаточным условиям оптимальности в форме принципа максимума [1]. Для удобства их применения представим уравнение третьего порядка (1.1) в виде системы

$$\dot{w} = a + u, \quad \dot{v} = w, \quad \dot{x} = v; \quad w(0) = w^0, \quad v(0) = v^0, \quad x(0) = x^0 \\ w(t_f) = v(t_f) = x(t_f) = 0; \quad t_f \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1 \quad (1.2)$$

$$a = (u^- + u^+) / (u^+ - u^-), \quad |a| < 1 \quad (2\ddot{x} / (u^+ - u^-) \rightarrow \ddot{x})$$

Стандартным образом введем соответствующие w, v, x сопряженные переменные r, q, p и из условия максимума функции Гамильтона H определим вид оптимального управления

$$u^* = \text{sign } r, \quad r = r^0 - q^0 t + p^0 t^2 / 2 \quad (1.3)$$

$$t \geq 0, \quad r^0, q^0, p^0 = \text{const}$$

$$H^* = H|_{u=u^*} = |r| + ra + qw + pv = \text{const} \geq 0$$

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = -p, \quad \dot{r} = -q$$

Из (1.3) следует, что оптимальное управление u^* имеет релейный характер и может иметь две, одну или ни одной точки переключения (теорема Фельдбаума [1]) в зависимости от значений w^0, v^0, x^0 . Неизвестные постоянные r^0, q^0, p^0 и время быстрогодействия t_f определяются тремя граничными условиями и одним условием нормировки как функции начальных (измеренных) данных (w^0, v^0, x^0). Однако такой подход представляется весьма громоздким и труднореализуемым.

По аналогии с плоской картиной синтеза для уравнения $\ddot{x} = a + u$ [1] построим в трехмерном фазовом пространстве (w, v, x) множества, соответствующие количеству точек переключений. Согласно принципу максимума, это пространство разбивается поверхностью переключений управления на две части. На поверхности имеется линия переключений, при движении по которой фазовая точка движется без переключений в начало координат. Найдем аналитические выражения, описывающие различные участки движения и указанные множества. Введем декартову систему координат WVX и придадим построениям наглядный геометрический характер, см. фиг. 1. Условно будем считать плоскость WV горизонтальной.

На первом этапе $0 \leq t \leq \vartheta$ происходит движение точки $Q = (w, v, x)$ из произвольного начального состояния $Q^0 = (w^0, v^0, x^0)$ (1.2) при соответствующем значении $u = \pm 1$ до достижения поверхности P , на которой производится переключение управления.

Итак, имеем выражения при $t = \vartheta$

$$\begin{aligned} w^0 + \chi_1 &= w_1, \quad v^0 + w^0 \vartheta + \chi_2 = v_1 \\ x^0 + v^0 \vartheta + w^0 \vartheta^2 / 2 + \chi_3 &= x_1, \quad \chi_k = (a + u) \vartheta^k / k!, \quad k = 1, 2, 3 \\ \vartheta &\geq 0, \quad Q^0 = (w^0, v^0, x^0) \in R, \quad Q_1 = (w_1, v_1, x_1) \in P \end{aligned} \quad (1.4)$$

После изменения знака управления $u \rightarrow -u$ фазовая точка движется по поверхности P из состояния $Q_1 = (w_1, v_1, x_1)$ до пересечения с линией переключения L , которая разбивает поверхность P на две части. На втором этапе при $\vartheta \leq t \leq \vartheta + \tau$ фазовая картина двумерна (аналогична классическому случаю [1]); в итоге для $t = \vartheta + \tau$ получим выражения типа (1.4)

$$\begin{aligned} w_1 + \chi_1 &= w_2, \quad v_1 + w_1 \tau + \chi_2 = v_2 \\ x_1 + v_1 \tau + w_1 \tau^2 / 2 + \chi_3 &= x_2 \\ \chi_k &= (a - u) \tau^k, \quad k = 1, 2, 3; \quad \tau \geq 0, \quad Q_2 = (w_2, v_2, x_2) \in L \end{aligned} \quad (1.5)$$

На линии переключения управления L происходит вновь изменение знака управления и фазовая точка Q перемещается по этой линии из состояния Q_2 в начало координат $Q_f = (0, 0, 0)$ за время $\theta \geq 0$; при $t = t_f = \vartheta + \tau + \theta$ имеем равенства:

$$\begin{aligned} w_2 + \chi_1 &= 0, \quad v_2 + w_2 \theta + \chi_2 = 0 \\ x_2 + v_2 \theta + w_2 \theta^2 / 2 + \chi_3 &= 0, \\ \chi_k &= (a + u) \theta^k / k!, \quad k = 1, 2, 3; \quad \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

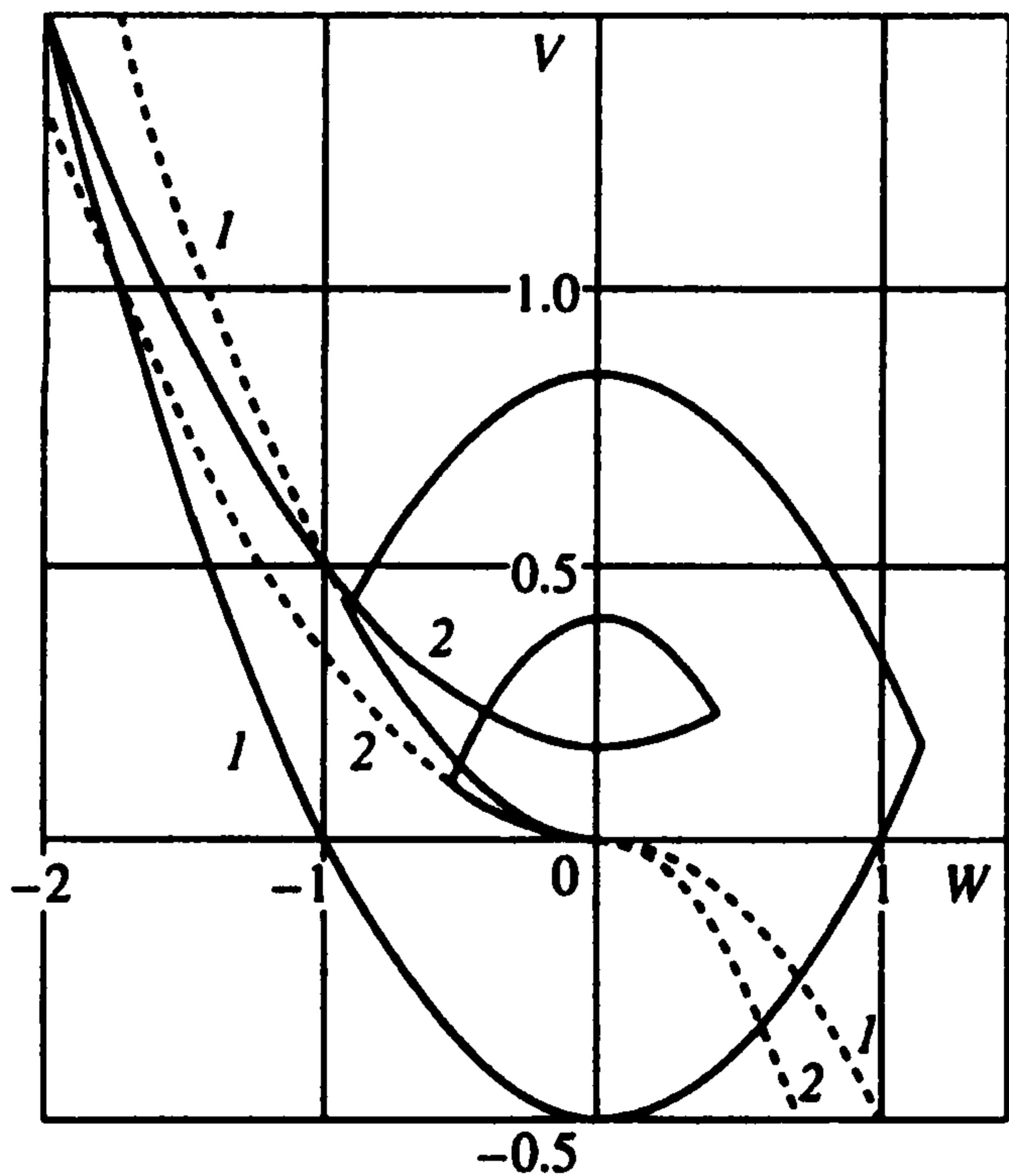
Соотношения (1.4)–(1.6) определяют в параметрической форме поверхности P и линию L переключений релейного управления, а также интервалы движения ϑ, τ, θ и время быстрогодействия $t_f = \vartheta + \tau + \theta$ как функции произвольной начальной точки Q^0 . Кроме того, условия $\vartheta, \tau, \theta \geq 0$ однозначно задают оптимальное управление как в начале, так и на протяжении всего процесса управляемого движения.

Итак, требуется разрешить уравнения относительно искомых характеристик, исследовать их свойства и построить картину синтеза оптимального по быстродействию перемещения фазовой точки Q из состояния Q^0 в терминальное состояние Q_f . При фиксированной точке Q^0 соотношения (1.4)–(1.6) определяют программное оптимальное управление: моменты времени переключения и начальное значение $u = \pm 1$.

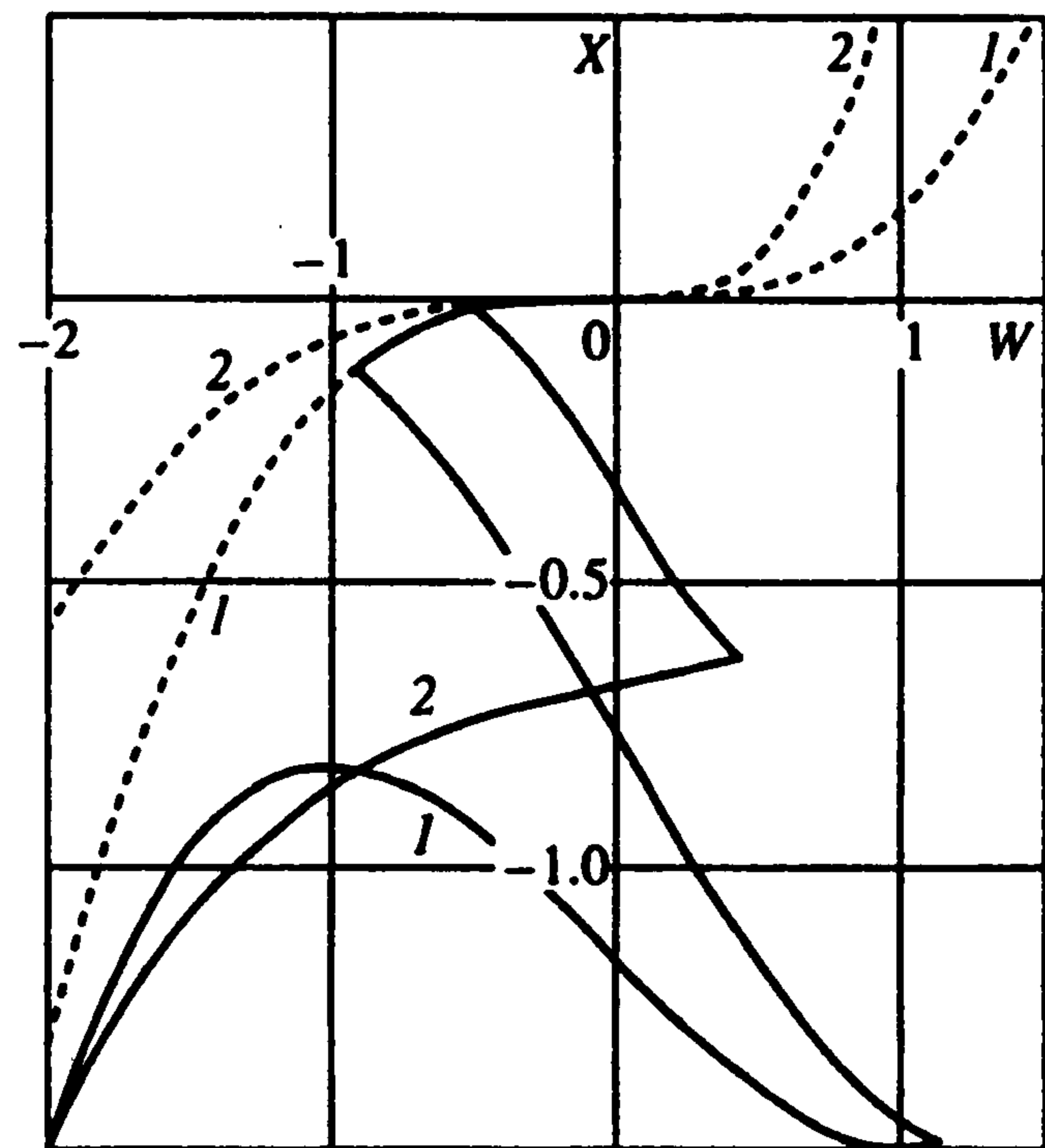
2. Построение картины синтеза. Используем сперва выражения (1.4)–(1.6) для определения синтеза оптимального быстродействия во всем фазовом пространстве: $Q^0 \rightarrow Q \in R$. С этой целью построим кривую L и поверхность P переключений релейного управления.

2.1. Линия переключения. Линия переключения L определяется параметрически ($\theta \geq 0$ – параметр) соотношениями (1.6); она состоит из двух оптимальных траекторий, входящих в начало координат. Разрешим уравнения (1.6) относительно w_2, v_2, x_2 ; получим искомые выражения

$$\begin{aligned} W = w_2 &= -\chi_1, \quad V = v_2 = \chi_2, \quad X = x_2 = -\chi_3 \\ \chi_k &= (a + u) \theta^k / k!, \quad k = 1, 2, 3 \\ u = u_2 &= \pm 1, \quad \theta \geq 0, \quad L = L_+ \cup L_- \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Из (2.1) следует, что если $Q \in L$, т.е. при некотором значении $\theta > 0$ удовлетворяется векторное равенство $Q = Q_2(\theta)$, то оптимальное управление $u_2 = -\text{sign} w_2$ и движение происходит вдоль соответствующей ветви $L_{\pm}$ кривой L . Проекция линии переключения на плоскости WV , WX имеют вид (см. фиг. 2, 3, штриховые линии 1, 2 для $a = 0$ и $a = 1/2$ соответственно)

$$V = \xi_2 W^2 = -(1 - a \text{sign } W)^{-1} |W| W / 2$$

$$X = \xi_3 W^3, \quad \xi_k = (a - \text{sign } W)^{1-k} / k!, \quad k = 2, 3 \quad (2.2)$$

$$(V = (9/2)^{1/3} u_2 (1 + a u_2)^{1/3} X^{2/3}, \quad u_2 = -\text{sign } X$$

$$X = -(2/9)^{1/2} u_2 (1 + a u_2)^{-1/2} |V|^{3/2}, \quad u_2 = \text{sign } V$$

Кривые $V(W)$, $X(W)$ (2.2) имеют горизонтальные касательные (ось W горизонтальна).

Из (2.1), (2.2) следует, в частности, что $u = u_2 = \pm 1$ при $X, W \leq 0$, т.е. управление u на кривой L полностью определено. Отметим, что при $a = 0$ кривые (2.2) инвариантны при замене $u \rightarrow -u$, $Q \rightarrow -Q$. Кривая L разбивает поверхность P на две части $P_{\pm}$, отвечающие $u_2 = \pm 1$ ($L \notin P_{\pm}$, $P = P_{+} \cup P_{-} \cup L$), см. ниже.

2.2. Поверхность переключения. Построение поверхности переключения P проводится на основе соотношений (1.5), (1.6) аналогично (2.1), (2.2). Параметрическое представление имеет вид

$$W = w_1 = -\chi_1, \quad V = v_1 = \chi_2, \quad X = x_1 = -\chi_3$$

$$\chi_k = a(\theta + \tau)^k - u_1[(\theta + \tau)^k - 2\tau^k] / k!, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$\theta, \tau \geq 0, \quad u_1 = \pm 1$$

Учитывая неотрицательность θ , τ , согласно (2.3), получим искомые представления и соответствующее условие, налагаемое на значения W , V :

$$\theta = (1 + a u_1)^{-1} [(1 + a u_1) W^2 / 2 + u_1 (1 - a^2) V]^{1/2}$$

$$\tau = u_1(1 + au_1)^{-1}W + (1 + au_1)(1 - au_1)^{-1}\theta, \quad u_1 = \pm 1 \quad (2.4)$$

$$u_1(1 - a^2)V + (1 + au_1)W^2 / 2 \geq 0$$

Подстановка выражений (2.4) в третье равенство X (2.3) приводит к выражению $X(W, V, u_1)$, в котором функция $u_1(Q_1)$ пока не определена. Из необходимых и достаточных условий оптимальности принципа максимума [1] следует, что неравенство (2.4) определяет области значений W, V , для которых $u_1 = \pm 1$ соответственно

$$u_1 = u_1^* = \text{sign } W \quad (2.5)$$

$$(1 - a^2)V \text{sign } W \geq -(1 + a \text{sign } W)W^2 / 2$$

Таким образом, явное выражение поверхности переключений P приводится к виду

$$\begin{aligned} X &= u_1\tau^3 / 3 + (1 + au_1)^{-2}(W - 2u_1\tau)^3 / 6 \equiv X^*(W, V, u_1) \\ \tau &= (1 - au_1)^{-1}(u_1W + [(1 + au_1)W^2 / 2 + u_1(1 - a^2)V]^{1/2}) \equiv \tau^*(W, V, u_1) \\ u_1 &= \pm 1, \quad V \geq -(1 + a \text{sign } W)(1 - a^2)^{-1} |W| W / 2 \equiv V^*(W) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно (2.5), (2.6), функция $X^*(W, V, u_1)$ является гладкой всюду, кроме множества значений W, V , отвечающего смене знака функции u_1

$$V = V^*(W) = -(1 - a^2)^{-1}(1 + a \text{sign } W) |W| W / 2 \quad (2.7)$$

Прямой проверкой можно убедиться после подстановки (2.7) в (2.6), что линия стыковки двух гладких частей поверхности P есть линия переключений L (2.2). Действительно, имеем

$$(1 \mp 1)W / 2 + (1 \mp a)\tau^*(W, V^*(W), \pm 1) = \begin{cases} W, & W \geq 0 \\ 0, & W \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$X(W, V^*(W), \pm 1) = (1 \mp a)^{-2} W^3 / 6$$

Совокупность выражений (2.7), (2.8) определяет линию переключений L (2.2).

Таким образом, установлено, что поверхность переключений $P = P_+ \cup L \cup P_-$, где части поверхности $P_{\pm}$ отвечают значениям $u_1 = \pm 1$ соответственно. Аналитические выражения для $P_{\pm}$ имеют вид

$$P_{\pm} = \{W, V, X: X = X^*(W, V, u_1), \quad u_1 = \pm 1, \quad V \geq V^*(W)\} \quad (2.9)$$

В результате построены особые множества: поверхность P и линия $L \subset P$ переключений релейного управления $u(Q)$. Эти множества зависят также от параметра a , $|a| < 1$. Графически они представлены на фиг. 1–3; для наглядности взяты $a = 0$ и $a = 1/2$ соответственно. На фиг. 1 представлены в изометрической проекции поверхность P и линии L переключений управления. Ортогональные проекции линий переключений на плоскости WV и WX изображены на фиг. 2, 3 (штриховые кривые 1, 2) для $a = 0$ и $a = 1/2$ соответственно.

2.3. Синтез управления оптимального быстродействия. Построение релейного управления проводится с помощью выражений (2.1)–(2.6), (2.9). В ситуации общего положения, когда $Q \notin P$, управление u^* определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u^* &= u_0^*(Q) = \pm 1, \quad x \leq X(w, v) \quad (Q \in R_{\pm}) \\ R_{\pm} &= \{w, v, x: x \leq X^*(w, v, u_1)\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Посредством управляющего воздействия $u_0(Q)$ (2.10) фазовая точка Q приводится на поверхность переключений P , точнее, на одну из ее частей $P_{\pm}$, на которой оптимальное управление изменяет знак (при отсутствии возмущений). Затем фазовая точка $Q = Q_1 \in P_{\pm}$ движется по поверхности P и приходит на линию L : $Q_1 = Q_2 \in L_{\pm}$. После смены знака управления точка Q_2 вдоль линии $L_{\pm}$ приводится в терминальную точку Q_f .

Если на систему действуют неконтролируемые возмущения, то синтез управления оптимального быстрогодействия приводит к проверке условий принадлежности фазовой точки множествам $R_{\pm}, P_{\pm}, L_{\pm}$, т.е.

$$u^* = u_s(Q) = \pm 1, \quad Q \in R_{\pm} \cup P_{\pm} \cup L_{\pm} \quad (2.11)$$

в каждый момент времени.

2.4. Построение оптимальной траектории. Моделирование движения невозмущенной системы (1.2), оптимально управляемой по принципу обратной связи согласно (2.11), сводится к элементарному интегрированию уравнений для кусочно-постоянных значений функции $u = u_s(Q)$. На первом этапе имеем

$$\begin{aligned} w(t) &= w^0 + \chi_1, \quad v(t) = v^0 + w^0 t + \chi_2, \quad x(t) = x^0 + v^0 t + w^0 t^2 / 2 + \chi_3 \\ \chi_k &= (a + u_0^*(Q^0)) t^k / k!, \quad k = 1, 2, 3, \quad 0 \leq t \leq \vartheta \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $Q^0 \notin P$ (ситуация общего положения), а управление $u_0^*(Q^0)$ выбирается согласно (2.10):

$$u_0^* = -\text{sign}(x^0 - X(w^0, v^0, u_1))$$

После достижения поверхности P в некоторый момент времени $t_1 = \vartheta$, для которого имеет место равенство

$$x(\vartheta) = X(w(\vartheta), v(\vartheta), u_1)$$

происходит изменение знака управления; отметим, что при этом $Q(\vartheta) \notin L$. Фазовая точка движется по части поверхности P_+ или P_- в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} w(t) &= w_1 + \chi_1, \quad v(t) = v_1 + w_1(t - \vartheta) + \chi_2 \\ x(t) &= x_1 + v_1(t - \vartheta) + w_1(t - \vartheta)^2 / 2 + \chi_3 \\ \chi_k &= (a - u_0^*(Q^0))(t - \vartheta)^k / k!, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

При некотором значении $t = t_2 = \vartheta + \tau$ она пересекает, согласно (2.13), линию L , т.е. выполняются равенства

$$v(t_2) = -\chi_2 |w(t_2)| w(t_2), \quad w(t_2) = w_2, \quad v(t_2) = v_2 \quad (2.14)$$

$$x(t_2) = \chi_3 w^3(t_2) = x_2$$

$$\chi_k = (1 - a \text{sign } w(t_2))^{1-k} / k!, \quad k = 2, 3$$

т.е. $Q(t_2) = Q_2 \in L$. Дальнейшее движение точки $Q(t)$ для $t_2 < t \leq t_f = t_2 + \theta$ осуществляется аналогично (2.12), (2.13) из точки Q_2 (2.14) в начало координат Q_f при $u = u_0^*(Q^0)$. Терминальная точка Q_f достигается, согласно (1.6), за промежуток времени $\theta = (1 - a \text{sign } w_2)^{-1} |w_2|$. Отметим, что если $Q = Q_1 \in P_{\pm}$, то временные интервалы τ, θ определяются аналогично на основе значений w_1, v_1 с помощью соотношений (2.3)–(2.7), см. ниже.

В реальных условиях система может подвергаться возмущающим воздействиям как постоянно действующим, так и импульсным по w . Это приведет к особым режимам

управления: скольжению по поверхности P и линии L . Управление $u_s^*(Q)$ выбирается теоретически в каждый момент времени (практически достаточно часто, например, с шагом интегрирования или измерения фазового вектора Q), согласно (2.11). Пример расчета оптимальной фазовой траектории для $a = 0$ и $a = 1/2$ (сплошные кривые 1 и 2) в проекции на плоскости (W, V) , (W, X) приведен на фиг. 2, 3 для начальных значений фазовых переменных $w^0 = -2$, $v^0 = 1,5$, $x^0 = -1,5$; время оптимального быстрогодействия соответственно равно $t_f = 6,15$ и $t_f = 3,92$, см. далее.

3. Определение временных характеристик движения в задаче оптимального быстрогодействия. Синтез управления построен в разд. 2; он основан на измерении фазового вектора и не требует для своей реализации вычисления соответствующих интервалов времени ϑ , τ , θ и минимального значения $t_f = \vartheta + \tau + \theta$. Однако эффективное определение этих величин весьма важно в теоретическом и прикладном аспектах, например, для построения программного управления и оптимальных траекторий согласно разд. 2.4. Его можно осуществить на основе выражений (1.4)–(1.6).

3.1. Определение временных интервалов. Исключим из (1.4)–(1.6) неизвестные Q_1, Q_2 ; для нахождения искоемых ϑ, τ, θ получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \Delta\zeta &= -\chi_1, \quad \Delta\eta = \chi_2, \quad \Delta\xi = -\chi_3; \quad t_f = \vartheta + \tau + \theta \\ \Delta\zeta &= (w^0 + \lambda_1)/u, \quad \Delta\eta = (v^0 - \lambda_2)/u, \quad \Delta\xi = (x^0 + \lambda_3)/u \\ u &= u_0^*(Q^0) = \pm 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\chi_k = [t_f^3 - 2(\tau + \vartheta)^k + 2\vartheta^k]/k!, \quad \lambda_k = at_f^k/k!, \quad k = 1, 2, 3$$

Значение u в (3.1) выбирается согласно (2.10) или (2.11). Разрешим первые два уравнения относительно τ, ϑ через $\Delta\zeta, \Delta\eta$ и неизвестную t_f ; получим выражения

$$\begin{aligned} \tau_* &= (t_f + \Delta\zeta)/2, \quad \vartheta_* = (t_f - \Delta\zeta)/2 - \theta_* = \Phi_\theta(t_f)/\tau_* \\ \theta_* &= \Phi_\theta(t_*)/\tau_* \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Phi_{\theta, \vartheta} = \pm(4\Delta\eta \mp \Delta\zeta^2 + 2\Delta\zeta t_f \pm t_f^2)/8, \quad \vartheta_* + \tau_* + \theta_* \equiv t_f$$

Отметим, что, согласно (3.1), значения $\Delta\eta, \Delta\zeta$ в (3.2) зависят от искомой величины t_f . Подставляя алгебраические функции τ_*, ϑ_* (или $\tau_*, \theta_*, \theta_* = t_f - \tau_* - \vartheta_*$) (3.2) в соотношение для $\Delta\zeta$ (3.1), получим после умножения на $\tau_* > 0$ (в ситуации общего положения, когда $Q^0 \notin L$) уравнение четвертой степени относительно неизвестной t_f , например, в виде

$$F(t_f, \Delta\zeta, \Delta\eta, \Delta\xi) = \Delta\xi\tau_* + t_f^3\tau_*/6 - t_f^2\tau_*^2 + 2t_f\Phi_\theta\tau_* + t_f\tau_*^3 - \Phi_\theta\tau_*^2 - \tau_*^4/3 - \Phi_\theta^2 = 0 \quad (3.3)$$

Функции $\tau_*, \Phi_\theta, \Delta\xi$ (и $\Phi_\theta, \Delta\zeta, \Delta\eta$) в зависимости от неизвестной t_f и заданных w^0, v^0, x^0 , а также параметра a определены согласно (3.1), (3.2). Требуется определить минимальный корень t_f^* уравнения (3.3), удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} t_f^* &= t_f(Q^0, a) > 0, \quad \tau^* = \tau(Q^0, a) > 0 \\ \vartheta^* &= \vartheta(Q^0, a) > 0, \quad \theta^* = \theta(Q^0, a) > 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Как и в случае симметричных ограничений [3], оказалось, что таковым является максимальный корень уравнения (3.3).

Искомый корень t_f^* (3.4) может быть определен аналитически с помощью формул Кардано или численно для фиксированных Q^0, a . Минимальное t_f^- и максимальное

t_f^+ ($t_f^+ \geq t_f^- > 0$) значения t_f могут быть оценены довольно просто, в частности на основе "квазиоптимального" подхода к решению задачи, см. разд. 4.

Отметим, что при $Q^0 \notin P$ все указанные интервалы времени строго положительны. Если же $Q^0 \in P$, но $Q^0 \notin L$, то $\vartheta_* = 0$, $\tau_*, \theta_* > 0$. Наконец, при $Q^0 \in L$, но $Q^0 \neq Q_f$ имеем $\tau_* = \vartheta_* = 0$, $\theta_* > 0$.

Для указанных выше числовых данных при $a = 0$ имеем значения временных интервалов: $t_f^* = 6,15$, $\vartheta_* = 3,16$, $\tau^* = 2,08$, $\theta^* = 0,92$; аналогично при $a = 1/2$ имеем искомые величины: $t_f^* = 3,92$, $\vartheta_* = 1,61$, $\tau^* = 1,94$, $\theta^* = 0,37$.

3.2. Построение функции Беллмана. Время оптимального быстрогодействия t_f^* для произвольной точки $Q \in R$ – функция Беллмана $T(Q)$ задачи (1.2) – определяется как положительное кусочно-гладкое решение задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана

$$-|\partial T / \partial w| + a \partial T / \partial w + w \partial T / \partial v + v \partial T / \partial x = -1 \quad (3.5)$$

$$u^* = -\partial T / \partial w | \partial T / \partial w |^{-1}, \quad T(Q) > 0, \quad T(Q_f) = 0$$

Обсуждалась [1] связь между методом динамического программирования и принципом максимума. Для решения задачи Коши (3.5) требуется построить уравнения характеристик и решить двухточечную краевую задачу принципа максимума вида (1.2), (1.3). Соответствующие выражения (3.2)–(3.4) для произвольной точки Q^0 определяют искомую функцию Беллмана $T(Q) = t_f^*(Q)$, зависящую от трех переменных w , v , x и параметра a . Она может быть записана в виде вычислительной процедуры либо сечениями $t_f^* = \text{const}$ – двумерными поверхностями уровня в трехмерном пространстве R переменных w , v , x при фиксированном значении a .

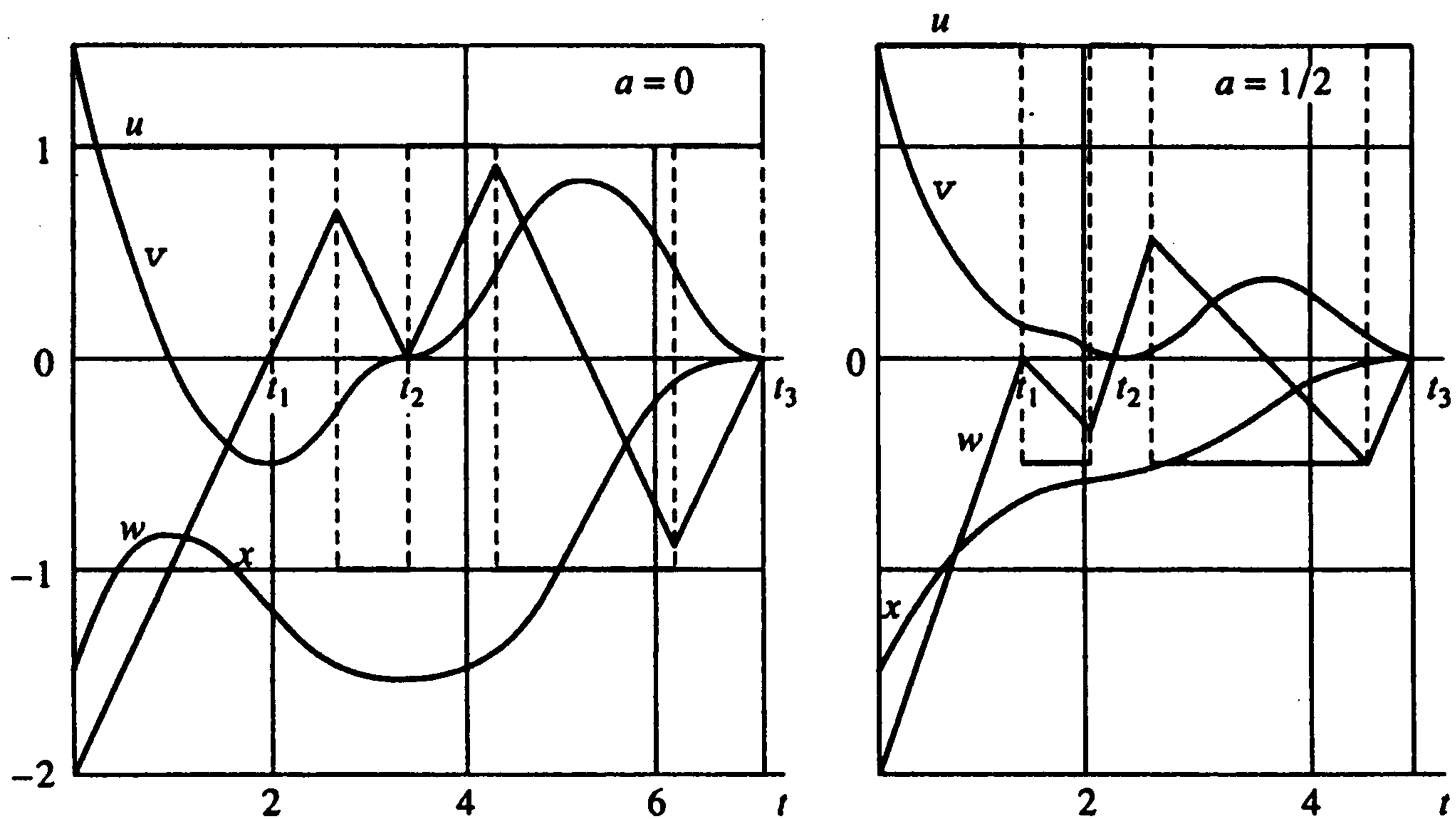
4. "Квазиоптимальные" режимы управления. Наряду с построенными оптимальными режимами управления могут быть предложены сравнительно простые способы, не приводящие к существенному увеличению потребного времени. Они аналогичны "покоординатному спуску", и их реализация не требует значительных вычислительных затрат.

4.1. Простейший способ управления. Этот режим состоит из трех этапов: 1) оптимальное по быстродействию приведение к нулевому значению ускорения w ; 2) оптимальное по быстродействию приведение к нулевому значению скорости v и ускорения w из состояния $w = 0$; 3) оптимальное по быстродействию приведение к нулевому значению координаты x , скорости v и ускорения w из состояния $w = 0$, $v = 0$. Таким образом, проводится сперва перемещение фазовой точки на плоскость VX , затем на ось X и в заключение – в терминальную точку Q_f . Соответствующие управления $u(t)$ строятся с помощью кусочно-постоянных (релейных) функций, которые при $a = 0$ переходят в функции Уолша [7]. Схематическое представление управляемого процесса приведено на фиг. 4.

Итак, на первом этапе имеют место выражения (в ситуации общего положения $Q^0 \notin L$)

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq t_1 = \tau_w &\equiv |w^0| / d^-(w)^0, \quad d^\pm(w) \equiv 1 \pm a \operatorname{sign} w \\ u &= u_w(t) \equiv -\operatorname{sign} w^0 (h(t) - h(t - \tau_w)) \\ Q(t_1) = Q_1 &= (0, v_1, x_1), \quad v_1 = v^0 + (1 - d^-(w^0)/2) |w^0| w^0 \\ x_1 &= x^0 + v^0 |w^0| + (3 - d^-(w^0)) w^{03}/6 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь h – функция Хевисайда.



Фиг. 4

Из (4.1) следует, что $\tau_w = |w^0|$ при $a = 0$ (симметричные ограничения $u^- = -u^+$), так как $d^\pm = 1$. Кроме того, отношение $k_w = \tau_w/|w^0|$ — монотонно убывающая или возрастающая функция a при $|a| \rightarrow 1$, причем $k_w \rightarrow 1/2$ или $k_w \rightarrow \infty$, поскольку $d^\pm \rightarrow 2$ или $d^\pm \rightarrow 0$. Соответствующие выражения для u_1, x_1 в частном случае симметричных ограничений получаются из (4.1) при $a = 0$.

Согласно выражениям (4.1), ускорение w — линейная функция t ; скорость v описывается куском параболы, а координата x — куском кубической параболы. Значения u_1, x_1 могут быть произвольными; по сравнению с $|v^0|, |x^0|$ их абсолютная величина в конце процесса управления может увеличиться или уменьшиться, см. фиг. 4. Очевидно, что величина τ_w (4.1) является оценкой снизу t_f^- времени быстрогодействия t_f , см. разд. 3.1.

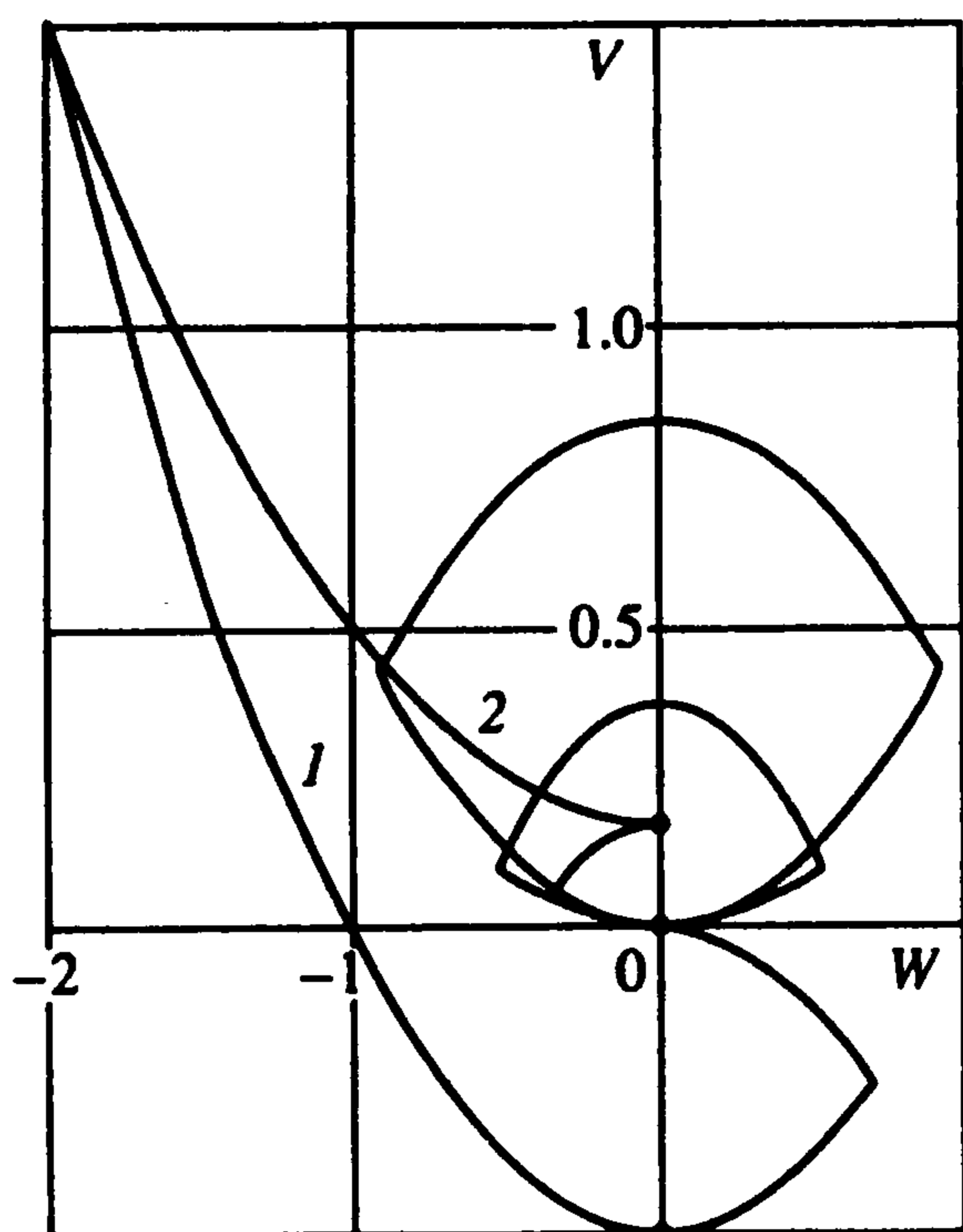
При $v_1 \neq 0$ (второй этап) управление и другие характеристики процесса определяются соотношениями

$$\begin{aligned} t_1 < t \leq t_2 = \tau_w + \tau_v, \quad \tau_v = |v_1|^{1/2} (v + v^{-1}) \equiv \delta + \sigma \\ v = (d^+(v_1)/d^-(v_1))^{1/2}, \quad Q(t_2) = Q_2 = (0, 0, x_2) \\ u_v \equiv -\text{sign} v_1 [h(t - t_1) - 2h(t - t_1 - \delta) + h(t - t_1 - \tau_v)] \\ x_2 = x_1 + v_1 \tau_v - \text{sign} v_1 [d^-(v_1)(\delta^3 + 3\delta^2\sigma - 3\delta\sigma^2) - d^+(v_1)\sigma^3]/6 \end{aligned} \quad (4.2)$$

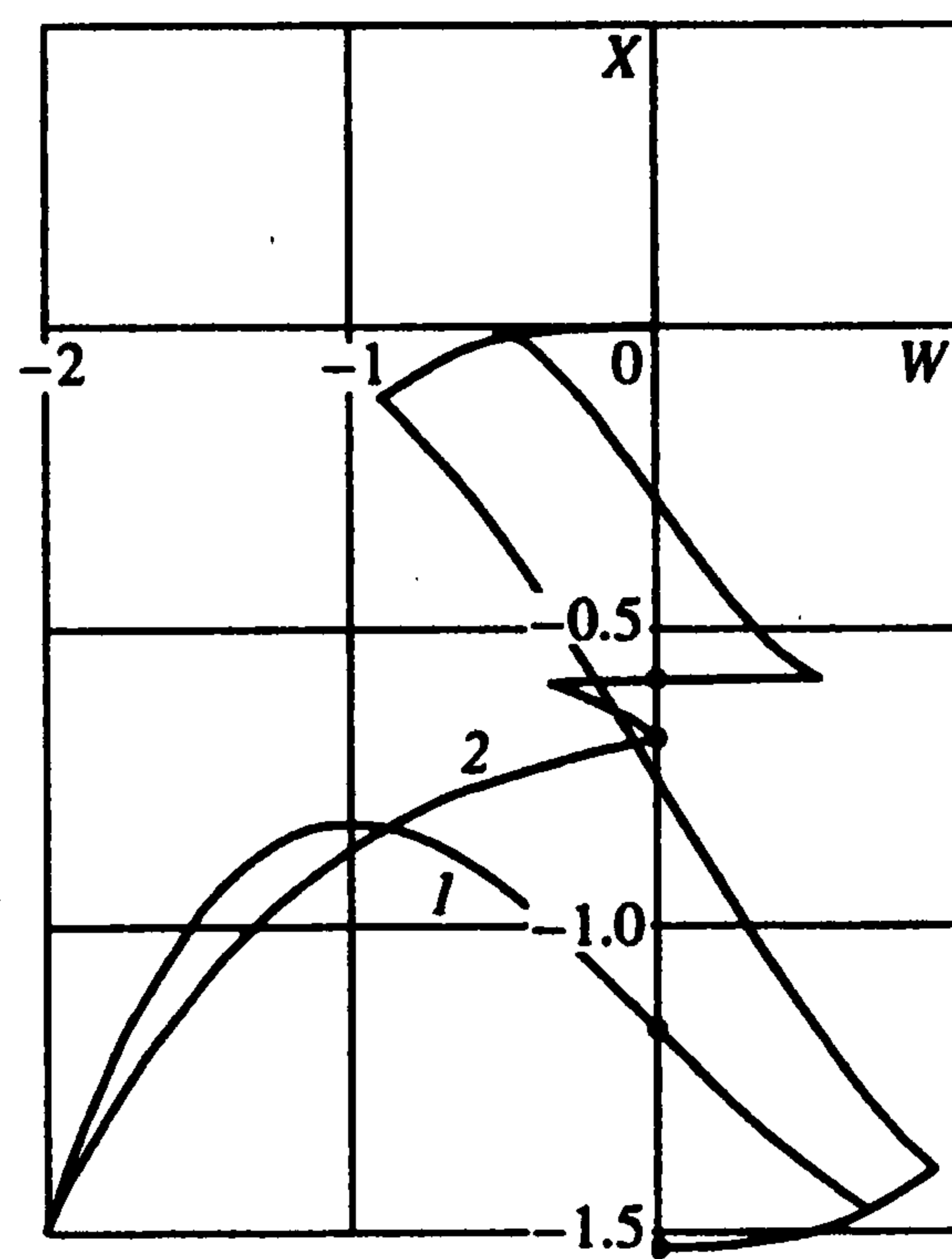
Из выражений для τ_v (4.2) следует, что $\tau_v \rightarrow \infty$ при $|a| \rightarrow 1$. Вследствие монотонности функции $v(a)$ получим минимальное (при фиксированном v_1 , не зависящем от a) $\tau_v = 2|v_1|^{1/2}$, отвечающее $a = 0, v(0) = 1$, т.е. $\delta = \sigma = |v_1|^{1/2}$ при $a = 0$.

Величины τ_w, v_1, x_1 в (4.2) определяются через w^0, u^0, x^0 , согласно (4.1). Функция $u_v(t)$ на втором участке при $t = t_1 + \delta, \delta/\sigma = v^2$ изменяет знак, что обеспечивает автоматическое приведение к нулевому значению ускорения w при $t = t_2$. Выбором знака управления ($-\text{sign} v_1$) и длительности интервала τ_v можно добиться приведения к нулевому значению скорости v при $t = t_2$; значение x_2 (4.2) может быть произвольным, см. фиг. 4.

Рассмотрим заключительный (третий) этап управления, завершающий приведение фазовой точки Q из состояния $Q_2 = (0, 0, x_2)$ в начало координат $Q(t_3) = Q_f = (0, 0, 0)$.



Фиг. 5



Фиг. 6

При $x_2 \neq 0$ релейное управление и другие параметры движения определяются аналогично (4.1), (4.2); оно имеет две точки переключения. Имеем определяющие соотношения вида

$$t_2 < t \leq t_3 = \tau_w + \tau_v + \tau_x, \quad \tau_w = 2(\gamma + \kappa)$$

$$\kappa = \gamma d^-(x_2) / d^+(x_2), \quad \gamma = (|x_2|/2)^{1/3} (d^+(x_2))^{2/3} \mu^{-1/3}(x_2)$$

$$\mu = (d^-(x_2)(d^+(x_2))^2 / 6 + 2(d^-(x_2))^3 + 3(d^-(x_2))^2 / d^+(x_2)) \quad (4.3)$$

$$u = u_x(t) = -\text{sign } x_2 (h(t - t_2) - 2h(t - t_2 - \gamma) + 2h(t - t_2 - \tau_x / 2 - \kappa) - h(t - t_2 - \tau_x))$$

$$Q(t_3) = Q_f = (0, 0, 0)$$

Отметим, что управление $u_x(t)$ обладает симметрией относительно середины интервала $\tau_x/2 = \gamma + \kappa$. В симметричном случае ограничений на управление (см. разд. 1, $a = 0$) имеем $\gamma = \kappa = \tau_x / 4 = (|x_2|/2)^{1/3}$; величина x_2 , согласно соотношениям (4.1), (4.2), равна $x_2 = x_1 + v_1 \tau_v$, где длительность второго этапа $\tau_v = 2|v_1|^{1/2}$ определяется значением скорости v_1 в его начале $v_1 = v^0 + w^0|w^0|/2$, а величина смещения $x_1 = x^0 + v^0|w^0| + w^{03}/3$. Полученное выражение $\tau_x(a)$ (4.3) свидетельствует, что $\tau_x \rightarrow \infty$ при $|a| \rightarrow 1$ (см. выше, второй этап) и фиксированном x_2 , не зависящем от a , но минимум достигается при значении $a^* = \text{sign } x_2 (1 - \sqrt{4/3})$, $|a^*| \approx 1/6$. Кроме того, из соотношений (4.1)–(4.3) следует, что имеет место оценка

$$t_3 = O(|w^0| + |v^0|^{2/3} + |x^0|^{1/3})$$

при асимптотически больших значениях $\|Q^0\|$. Отметим, что величина t_3 (4.3) определяет оценку сверху t_f^+ искомого значения t_f , см. (3.2)–(3.4).

На фиг. 4 приведены графики изменения во времени фазовых переменных w , v , x и «квазиоптимального» управления u , отвечающие тем же начальным данным, что и выше (см. разд. 2,3). Потребное время t_3 оказалось равным $t_3 = 7,06$ при $a = 0$ и $t_3 = 5,07$ при $a = 1/2$. На фиг. 5,6 изображены проекции фазовых траекторий на плоскости WV и WX , аналогичные приведенным на фиг. 2,3; представляет определенный интерес анализ и сопоставление этих кривых.

4.2. Комбинированный способ управления. По сравнению с рассмотренным выше, согласно (4.1)–(4.3), покоординатным режимом управления, дающим весьма грубую оценку снизу t_f^- и сверху $t_f^+ = t_3$ времени быстрогодействия t_f , можно относительно просто реализовать "более точный" по оценке t_f двухэтапный процесс: 1) оптимальное по быстродействию обнуление ускорения и скорости системы; 2) оптимальное приведение в терминальную точку Q_f . Таким образом, первый этап совмещает два этапа указанного режима управления "покоординатного спуска" и заключается в известном точном решении [8] для классической задачи [1]: $\ddot{u} = u$, $u^- \leq u \leq u^+$.

Управление на первом этапе содержит одну точку переключения управления, определяемую моментом времени $t = \alpha$ пересечения линии переключений на плоскости (W, V) . Оптимальное управление и временные характеристики процесса управления на первом этапе определяются явными выражениями вида

$$\begin{aligned} 0 < t \leq t_{1,2} = \tau_{wv} = \alpha + \beta, \quad 0 < \tau_{wv}(w^0, v^0) = t_f^- \leq t_f \\ u_{wv}(t) = \{-\text{sign } \Delta, 0 < t \leq \alpha; \text{sign } \Delta, \alpha < t \leq \tau_{wv}\} \\ \Delta = v^0 - V(w^0) \neq 0, \quad V(w^0) = -|w^0|w^0/d^-(w^0)/2 \\ \alpha = w^0/\Lambda^- + \beta d^+(\Delta)/d^-(\Delta) \\ \beta = [v^0 d^-(\Delta)/\Lambda^+ + w^{02}(1-a^2)^{-1}/2]^{1/2} \\ \Lambda^\pm = d^\pm(\Delta) \text{sign } \Delta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что при $a = 0$ коэффициенты $d^\pm = 1$ и выражения для u_{wv} , τ_{wv} , α , β переходят в известные [1] для случая симметричных ограничений. В конце первого этапа управления $w(\tau_{wv}) = v(\tau_{wv}) = 0$, а переменная $x(t)$ принимает значение

$$\begin{aligned} x(\tau_{wv}) = x_{wv} = x_\alpha + v_\alpha \beta + w_\alpha \beta^2 / 2 + \Lambda^+ \beta^3 / 6 \\ w_\alpha = w^0 - \Lambda^- \alpha, \quad v_\alpha = v^0 + w^0 \alpha - \Lambda^- \alpha^2 / 2 \\ x_\alpha = x^0 + v^0 \alpha + w^0 \alpha^2 / 2 - \Lambda^- \alpha^3 / 6 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь v_α , w_α – значения переменных v , w при $t = \alpha$, т.е. в момент времени достижения линии переключения согласно (4.4), а $x_\alpha = x(\alpha)$ – соответствующее значение переменной x .

На втором этапе осуществляется оптимальное по быстродействию перемещение из фазовой точки $Q_{wv} = (0, 0, x_{wv})$ в терминальную точку Q_f согласно третьему этапу, рассмотренному выше в (4.3), где $x_2 = x_{wv}$. Суммарное потребное время равно $t_3 = \tau_{wv} + \tau_x$, где $\tau_x = 4(|x_{wv}|/2)^{1/3}$. Отметим, что для времени $t_3 (t_3 \geq t_f^*)$ справедливы оценки по w^0 , v^0 , x^0 , аналогичные приведенным при простейшем трехэтапном режиме управления; это значение может быть использовано в качестве оценки сверху для t_f^* в (3.2)–(3.4). Аналогично указанному в разд. 4.1 можно построить графики типа приведенных на фиг. 4 для траекторий и управления и типа приведенных на фиг. 5, 6 для проекций фазовых траекторий.

5. Выводы и возможные обобщения. Таким образом, принцип максимума Понтрягина и теорема Фельдбаума позволяют весьма эффективно строить управления оптимального быстрогодействия в форме синтеза для системы третьего порядка. Решение задачи синтеза удастся построить в аналитическом виде: поверхность и линия переключения определяются параметрически или явно. Выбор знака релейного управления сводится к проверке неравенств для соотношений, определяемых алгебраическими (степенными) функциями.

Построение программного управления требует вычисления временных интервалов знакопостоянного управления и времени оптимального быстрогодействия для заданных

начальных значений ускорения, скорости и координаты. Время быстрогодействия определяется из алгебраического уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого зависят от начальных данных. Оно может быть найдено численно или с помощью формул Кардано, см. разд. 3.

Наряду с оптимальным режимом могут быть применены весьма простые "квазиоптимальные" способы управления, которые близки к глобально оптимальному, если фазовая точка находится сравнительно недалеко от линии или поверхности переключения, см. разд. 3.

Представляется возможным обобщить подход к построению управлений в форме программы и синтеза в более общем случае финальных условий и несимметричных ограничений: $u^- \leq u \leq u^+$, где $u^- < 0$, $u^+ > 0$. Задача описывается уравнением вида

$$\ddot{x} = a + u', \quad a = (u^- + u^+)(u^+ - u^-)^{-1}, \quad |a| < 1$$

где a – постоянное воздействие, управление u' удовлетворяет ограничению $|u'| \leq 1$, а конечные условия имеют вид

$$x(t_f) = y(t_f), \quad \dot{x}(t_f) = \dot{y}(t_f), \quad \ddot{x}(t_f) = \ddot{y}(t_f)$$

где $y(t)$ – известная функция (например, полином второго порядка по t), описывающая равноускоренное движение терминальной точки. Оптимальное и квазиоптимальное по быстроддействию решения строятся аналогично вышеизложенному на основе принципа максимума и качественно имеют тот же вид. Исследование поведения линии и поверхности переключения, а также других характеристик управляемого процесса в зависимости от параметра a и фазового вектора Q требует отдельного рассмотрения.

Для приложений и теории оптимального управления имеет важное значение учет постоянно действующих возмущений, поскольку рассмотренные выше модели являются сильно идеализированными. Например, возмущенная система может иметь вид

$$\ddot{x} = \varepsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}) + u, \quad |\varepsilon| \leq 1, \quad (x, \dot{x}, \ddot{x}) \in D \subseteq R \quad (5.1)$$

где f – достаточно гладкая в D функция. Для приближенного по степеням малого параметра ε определения кривой и поверхности переключения релейного управления u требуется разработать соответствующую процедуру метода возмущений, аналогичную описанной ранее [8]. Дальнейшее естественное обобщение системы (5.1) состоит в допущении, что функция f зависит от квазипостоянного вектора $z : \dot{z} = \varepsilon Z$, где z – набор параметров системы. Функции f и Z могут зависеть от $x, \dot{x}, \ddot{x}$, а также от u, t .

Определенный интерес представляет распространение методики на системы, описываемые уравнением n -го порядка вида

$$\left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \lambda_j \right) \right] x = u, \quad \text{Im } \lambda_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \geq 4 \quad (5.2)$$

в том числе содержащие постоянно действующие возмущения аналогично (5.1) и ниже. В частности, если система (5.2) отвечает ситуации $\lambda_j = 0$, т.е. $x^{(n)} = u$, то особые многообразия (линии, поверхности и гиперповерхности до размерности $n-1$) строятся последовательно, как и в разд. 1, 2. Нахождение временных характеристик для программного управления требует существенно больших вычислительных затрат. Построение квазиоптимальных режимов ("покоординатный спуск") может быть осуществлено по аналогии с изложенным в разд. 4 разными способами. Простейший режим заключается в последовательном приведении к нулевому значению производных, начиная с $(n-1)$ -й: $x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x$. В частности, при $u^- = -u^+$ соответствующие этим этапам управления строятся с помощью функций Уолша [7]. Возможны комбинированные режимы, когда на первом этапе происходит оптимальное по быстроддействию приведение к нулевому значению $(x^{(n-1)}, x^{(n-2)})$, согласно указанному ранее [1], или $(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, x^{(n-3)})$, см. выше, и т.п.

Авторы благодарят Ф.Л. Черноусько за внимание к работе и В.С. Пацко за конструктивные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.
3. Павлов А.А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966. 390 с.
4. Черноусько Ф.Л., Шматков А.М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 723–731.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
6. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сб. 1987. Т. 134. № 2. С. 186–206.
7. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987. 343 с.
8. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1999