

УДК 531.391

© 2000 г. Ф.Л. Черноусько

ВОЛНООБРАЗНЫЕ ДВИЖЕНИЯ МНОГОЗВЕННИКА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследуется движение плоского многозвенника по горизонтальной плоскости при наличии сухого трения. Движение осуществляется под действием внутренних управляющих моментов, приложенных в шарнирах многозвенника. Показано, что существуют такие формы медленных (квазистатических) движений, при которых многозвенник продвигается вдоль самого себя за счет бегущей по нему волны, в которой участвуют несколько звеньев. Найденные формы движений отличаются от исследованных ранее быстрых (динамических) форм движения многозвенника по плоскости.

1. Введение. Большинство известных способов движения живых организмов и аппаратов по поверхности обладает тем свойством, что точки контакта движущегося тела с поверхностью не остаются неизменными. Так, при ходьбе и беге меняются опорные ноги, при движении колесных и гусеничных машин изменяются точки контакта колес и гусениц с поверхностью. Особое положение в этом смысле занимает движение змей и других животных, не имеющих ног и постоянно контактирующих с опорной поверхностью практически по всей своей длине. Эти движения поддерживаются за счет изгибающих моментов, перпендикулярных опорной поверхности, по которой происходит движение. Заметим, что при движении колесных и шагающих аппаратов управляющие моменты приложены вдоль осей, параллельных опорной поверхности.

Исследованию биомеханики движения живых организмов, в том числе змей, посвящены книги [1, 2]. В ряде работ [3–7] исследуется кинематика многозвенных аппаратов, имитирующих движение змей. Эти механизмы представляют собой неголономные системы, снабженные колесами.

Были построены и исследованы движения многозвенника, перемещающегося по шероховатой горизонтальной плоскости под действием управляющих моментов, перпендикулярных этой плоскости и приложенных в шарнирах многозвенника [8, 9]. Показано, что путем чередования медленных и быстрых фаз движения многозвенник может перемещаться вдоль самого себя, вбок, а также поворачиваться на месте. Найденны достаточные условия, при которых возможны эти движения, оценены перемещения и скорости многозвенника.

В данной работе также рассматриваются перемещения многозвенника по шероховатой горизонтальной плоскости. Показано, что продольное перемещение многозвенника можно осуществить, оставаясь в рамках только медленных (квазистатических) движений, не требующих приложения больших управляющих моментов, необходимых для быстрых фаз движения. Построены два типа медленных движений, носящих волнообразный характер. В одном из них в каждый момент времени вовлечены три, а в другом – четыре звена многозвенника. Дается расчет сил и моментов при этих движениях.

2. Механическая модель. Рассмотрим многозвенник, состоящий из N одинаковых звеньев. Звенья считаем абсолютно жесткими прямолинейными стержнями длины a .

Для простоты предполагаем, что масса звеньев пренебрежимо мала по сравнению с массой шарниров, каждый из которых является материальной точкой массы m . Такую же массу m имеют концевые точки многозвенника. Обозначим все эти точки буквами P_i ($i = 0, 1, \dots, N$). Многозвенник лежит на неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости, с которой связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy лежат в этой плоскости, а ось Oz направлена вертикально вверх.

В каждом шарнире P_i ($i = 1, \dots, N-1$) могут действовать внутренние управляющие моменты, направленные по оси Oz . Обозначим через M_i момент, действующий со стороны звена $P_{i-1}P_i$ на звено P_iP_{i+1} ; тогда со стороны звена P_iP_{i+1} на звено $P_{i-1}P_i$ действует момент $(-M_i)$ ($i = 1, \dots, N-1$).

Между каждой точкой P_i и плоскостью Oxy действует сила сухого трения F_i , лежащая в этой плоскости. Согласно закону Кулона, имеем

$$\begin{aligned} F_i &= -mgkv_i^{-1}v_i, \quad v_i \neq 0 \\ |F_i| &\leq mgk, \quad v_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь v_i – вектор скорости точки P_i , v_i – его абсолютная величина, g – ускорение силы тяжести, k – постоянный коэффициент трения. В состоянии покоя ($v_i = 0$) сила трения может иметь произвольное направление.

Обозначим через R_i силу, с которой звено $P_{i-1}P_i$ действует на точку P_i . Запишем условия равновесия твердого тела, состоящего из точки P_i и невесомого звена P_iP_{i+1} (см. фиг. 1). На это тело действует сила трения F_i , сила R_i со стороны звена $P_{i-1}P_i$, сила $(-R_{i+1})$ со стороны точки P_{i+1} , а также моменты M_i и $(-M_{i+1})$ со стороны соседних звеньев. Уравнения равновесия рассматриваемого тела имеют вид

$$\begin{aligned} F_i + R_i - R_{i+1} &= 0 \\ M_i - M_{i+1} + r_{i,i+1} \times (-R_{i+1}) &= 0, \quad i = 1, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее через r_{ij} обозначаются векторы P_iP_j , соединяющие соответствующие точки, $i, j = 0, 1, \dots, N$. Уравнения (2.2) справедливы для всех звеньев, кроме крайних. Для крайних звеньев имеем

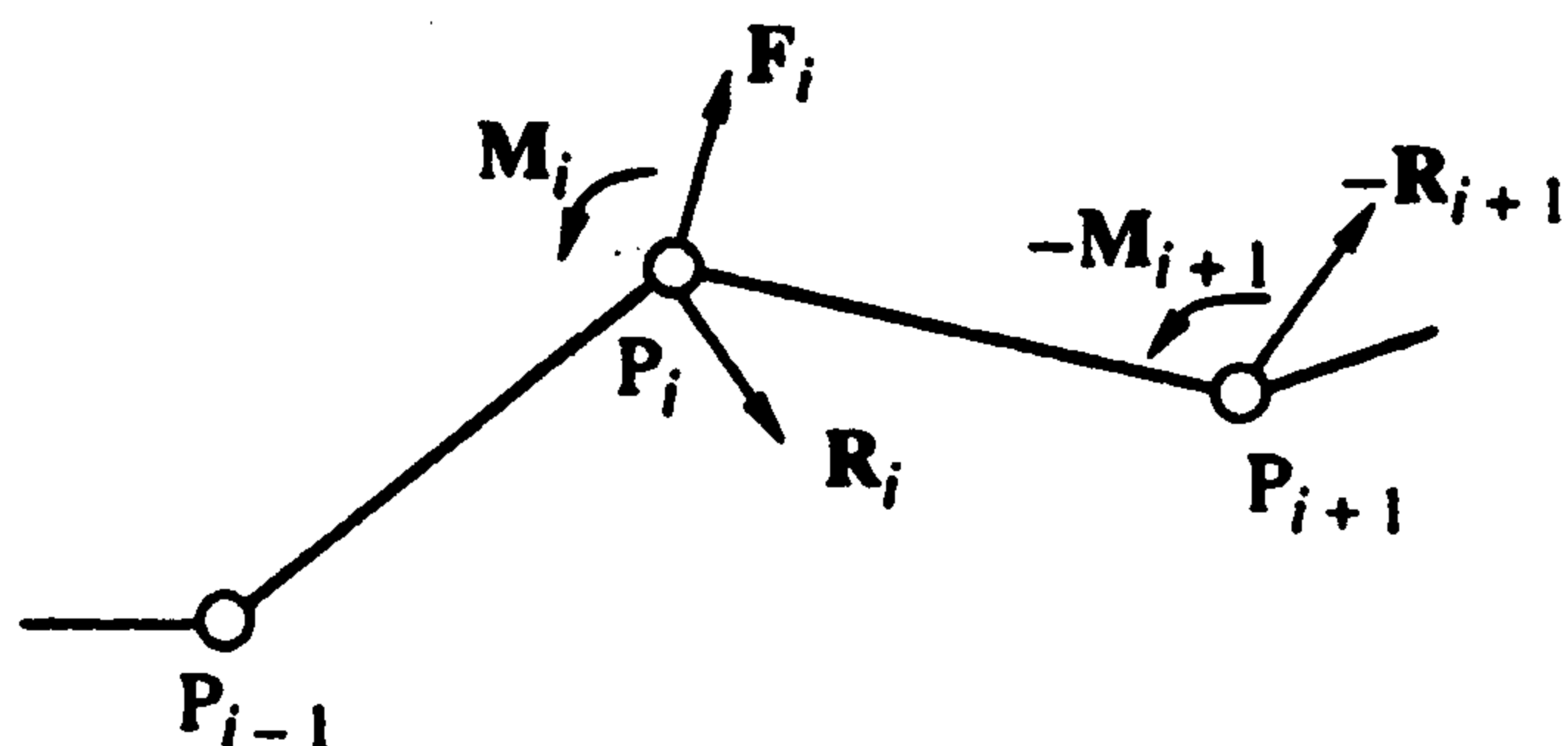
$$\begin{aligned} F_0 - R_1 &= 0, \quad -M_1 + r_{0,1} \times (-R_1) = 0 \\ F_{N-1} + R_{N-1} - R_N &= 0, \quad M_{N-1} + r_{N-1,N} \times (-R_N) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$F_N + R_N = 0$$

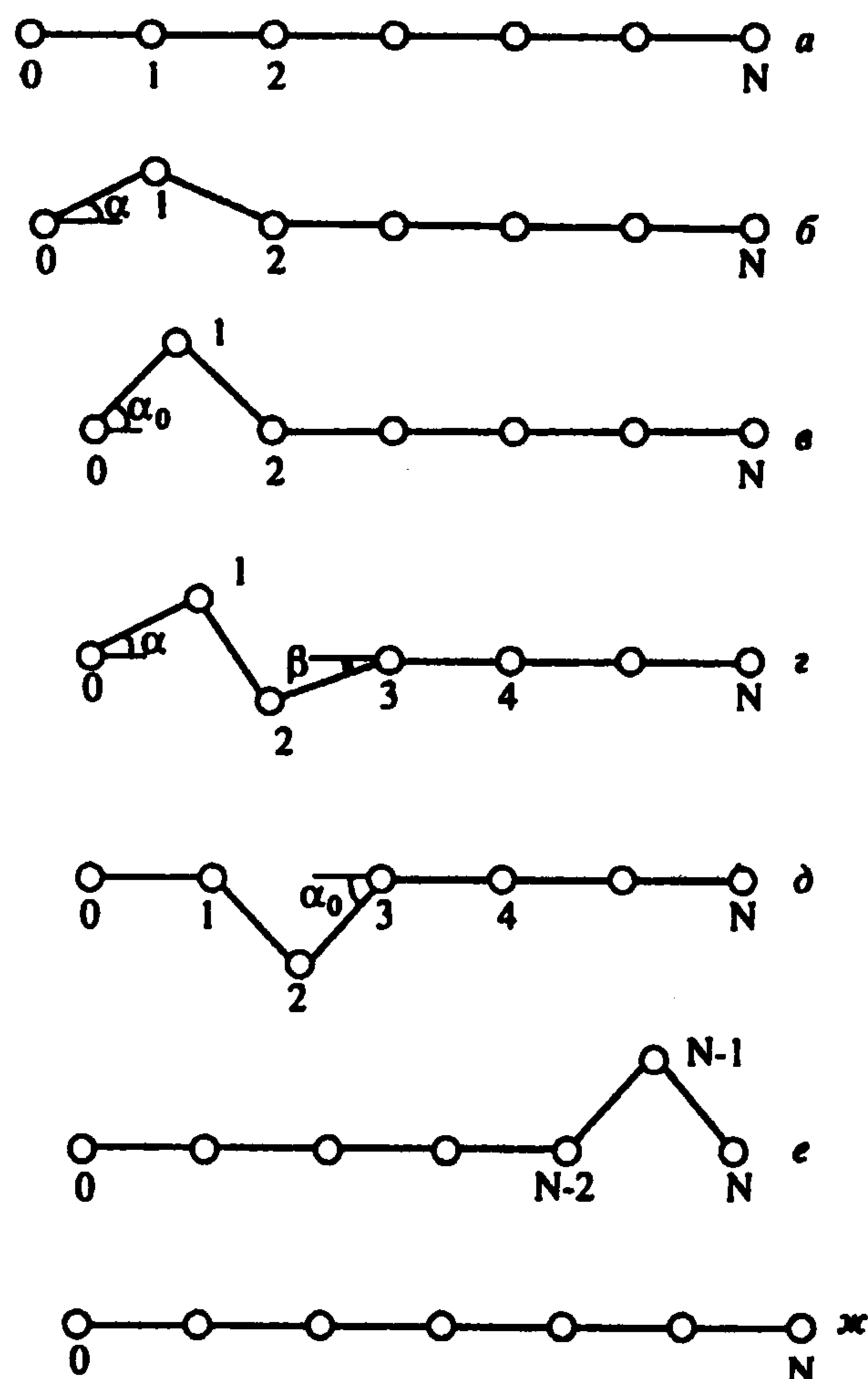
Последнее уравнение (2.3) – это условие равновесия точки P_N .

Ниже будут построены волнообразные медленные движения многозвенника, при которых он перемещается вдоль самого себя в условиях квазистатики. Другими словами, скорости и ускорения предполагаются достаточно малыми по величине, так что в каждый момент времени с высокой точностью выполняются условия равновесия (2.2), (2.3). Сначала опишем кинематику волнообразных движений с тремя и четырьмя подвижными звеньями, а затем докажем реализуемость этих движений и дадим расчет сил и моментов.

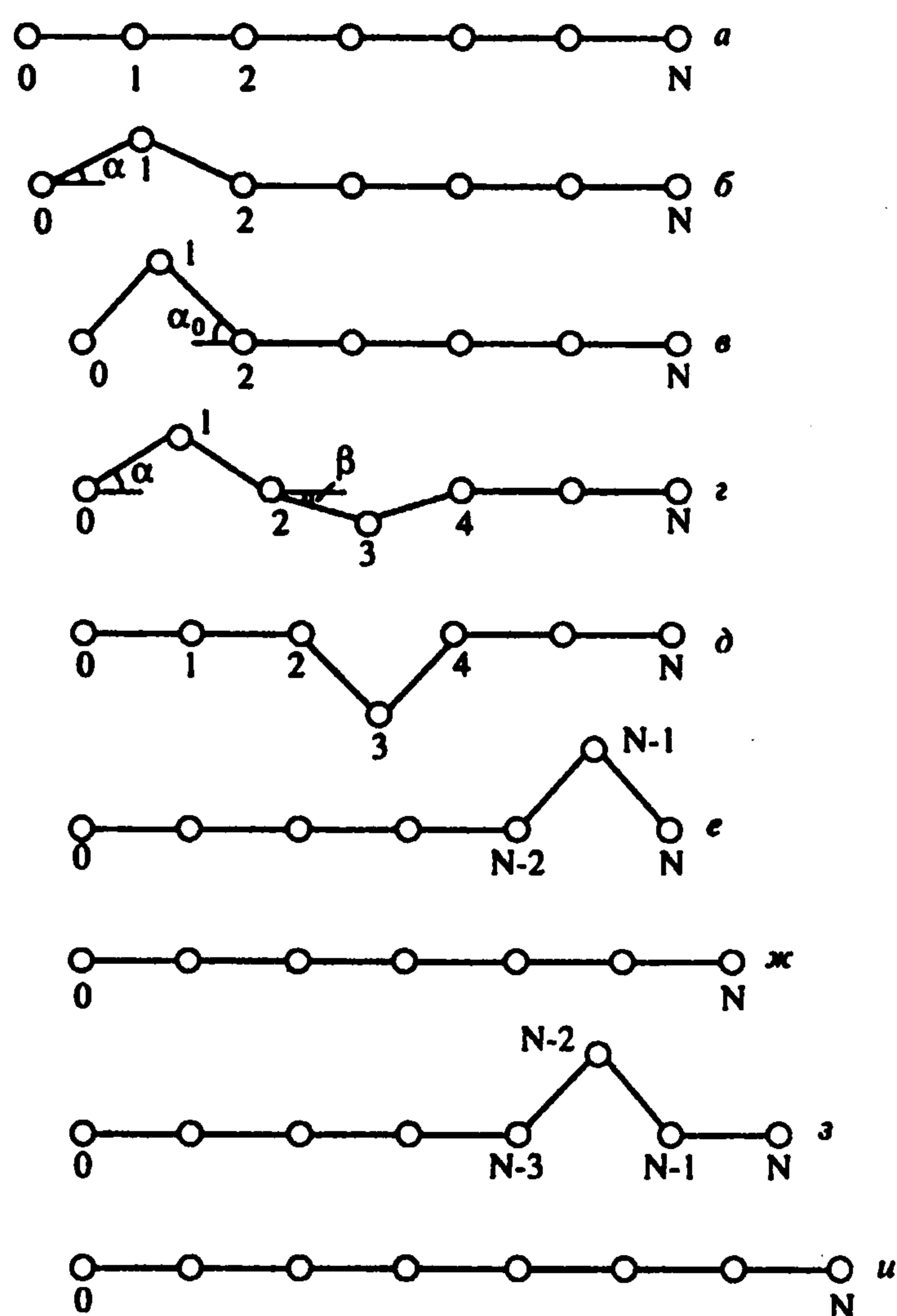
Предполагаем, что в начальный момент времени многозвенник лежит вдоль оси x , и точки P_i имеют координаты $x_i = ai$, $y_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$). При этом все силы трения F_i ($i = 0, 1, \dots, N$), силы взаимодействия R_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и моменты M_i ($i = 1, \dots, N-1$) равны нулю.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Начальное состояние многозвенника изображено состоянием *a* на фиг. 2, 3. Цифрами на этой и последующих фигурах помечены точки P_i ($i = 0, 1, \dots, N$).

3. Волнообразное движение с тремя подвижными звеньями. Сначала точка P_0 перемещается вдоль оси x , а точки P_i , $i \geq 2$, остаются неподвижными. Угол α между осью x и звеном P_0P_1 (см. состояние *б* на фиг. 2) монотонно изменяется от нуля до некоторого заданного значения α_0 . На этом начальном этапе в движении участвуют два звена P_0P_1 и P_1P_2 , которые образуют равнобедренный треугольник. В конце этапа угол при основании этого треугольника равен α_0 (см. состояние *в* на фиг. 2). Здесь все точки, кроме P_1 , лежат на оси x .

После этого в движение приводятся звенья P_0P_1 , P_1P_2 и P_2P_3 . Точки P_0 и P_i , $i \geq 3$, остаются неподвижными, угол α монотонно изменяется от α_0 до нуля. При этом угол β между звеном P_2P_3 и осью x монотонно изменяется от нуля до α_0 (см. состояние *г* на фиг. 2). В конце этапа многозвенник придет в состояние *д*, в котором звенья P_1P_2 и P_2P_3 образуют равнобедренный треугольник, равный треугольнику $P_0P_1P_2$ в состоянии *в*, но с вершиной, обращенной в другую сторону. Все точки, кроме P_2 , здесь лежат на оси x .

Далее в движении участвуют звенья P_1P_2 , P_2P_3 и P_3P_4 , и это движение, с точностью до сдвига по оси x и зеркального отображения относительно этой оси, совпадает с предыдущим этапом, т.е. с переходом из состояния *в* в состояние *д*. В результате точка P_2 попадает на ось x , а звенья P_2P_3 и P_3P_4 образуют равнобедренный треугольник, равный треугольнику $P_0P_1P_2$ в состоянии *в* и сдвинутый на $2a$ вправо по оси x .

Продолжая этот процесс, получим, что после завершения каждого этапа все точки многозвенника, кроме одной, будут лежать на оси x , а одна точка будет вершиной равнобедренного треугольника с углом при основании, равным α_0 . Эта вершина

вместе с треугольником постепенно перемещается вправо: ею становятся точки P_1, P_2, P_3 и т.д. В конце концов, точка P_{N-1} станет вершиной такого треугольника, а точки P_i , $0 \leq i \leq N-2$, и P_N будут лежать на оси x (см. состояние e на фиг. 2). При этом треугольник $P_{N-2}P_{N-1}P_N$ будет обращен вершиной P_{N-1} в ту же сторону, что и треугольник $P_0P_1P_2$ в состоянии a , если N – четно (как на фиг. 2), и в противоположную сторону, если N – нечетно.

В обоих случаях последний этап движения заключается в перемещении точки P_N вправо вдоль оси x . Угол α при основании треугольника $P_{N-2}P_{N-1}P_N$ монотонно изменяется от α_0 до нуля, и многозвенник приводится в прямолинейное состояние $ж$.

В результате полного цикла перемещения многозвенник продвинется вдоль оси x на расстояние L , равное сдвигу точки P_0 из состояния a в состояние $в$ на фиг. 2. Имеем

$$L = 2a(1 - \cos \alpha_0) \quad (3.1)$$

4. Волнообразное движение с четырьмя подвижными звеньями. Начальный этап движения протекает так же, как в предыдущем случае, и многозвенник переходит из состояния a через промежуточное состояние $б$ в состояние $в$ на фиг. 3, идентичное состоянию $в$ на фиг. 2.

На следующем этапе в движение вовлечены звенья P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 и P_3P_4 . Точка P_2 движется вправо вдоль оси x . При этом угол α в основании равнобедренного треугольника $P_0P_1P_2$ монотонно изменяется от α_0 до нуля, а угол β в основании равнобедренного треугольника $P_2P_3P_4$ монотонно изменяется от нуля до α_0 (см. состояние $г$ на фиг. 3). Вершина P_3 последнего треугольника обращена в сторону, противоположную той, куда обращена вершина P_1 . По завершении этапа все точки многозвенника, кроме P_3 , будут лежать на оси x , а точка P_3 будет вершиной равнобедренного треугольника с углом α_0 при основании (см. состояние $д$ на фиг. 3).

Далее в движение вовлекаются звенья P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5 и P_5P_6 . Движение происходит аналогично предыдущему этапу, со сдвигом вдоль оси x и с зеркальным отображением от этой оси. В результате получится равнобедренный треугольник с вершиной P_5 и с углом при основании, равным α_0 .

Продолжая этот процесс, видим, что вершинами треугольников в конце этапа становятся точки с нечетными номерами. Поэтому, если N – четно, то в конце процесса сложится ситуация e , аналогичная состоянию e на фиг. 2. При этом, если $N/2$ – нечетно, то вершина P_{N-1} треугольника $P_{N-2}P_{N-1}P_N$ будет обращена в ту же сторону, что и вершина P_1 треугольника $P_0P_1P_2$ на начальном этапе (см. фиг. 3, e), а если $N/2$ – четно, то в противоположную сторону. В обоих случаях на завершающем этапе точка P_N движется вправо вдоль оси x до тех пор, пока многозвенник не принимает прямолинейное состояние $ж$ на фиг. 3.

Если же N – нечетно, то возникает ситуация $з$ на фиг. 3. Все точки, кроме P_{N-2} , лежат на оси x , а точка P_{N-2} служит вершиной равнобедренного треугольника с углом α_0 при основании. Эта вершина обращена в ту же сторону, что и вершина P_1 треугольника $P_0P_1P_2$ в состоянии $в$, если $(N-1)/2$ – нечетно (этот случай изображен на фиг. 3), и в противоположную сторону, если $(N-1)/2$ – четно. В обоих случаях на последнем этапе точки P_{N-1} и P_N движутся вправо вдоль оси x , пока многозвенник не примет прямолинейное состояние $и$ на фиг. 3.

Полное перемещение многозвенника вдоль оси x за весь цикл определяется прежним соотношением (3.1).

5. Квазистатический подход. Как уже отмечалось, движения многозвенника рассматриваются в квазистатической постановке, в которой скорости и ускорения считаются весьма малыми. В этой постановке все внешние силы, приложенные к многозвеннику, должны почти уравниваться. Такими внешними силами, действующими в плоскости движения, являются силы трения. Поэтому в первом прибли-

жении нужно потребовать, чтобы для сил трения выполнялись три условия равновесия (два – для сил и одно – для моментов). Силы трения, приложенные к движущимся точкам, нетрудно подсчитать, зная направления их скоростей (см. (2.1)). Для покоящихся же точек силы трения неизвестны, но ограничены неравенствами. Система статически неопределима, если число неизвестных компонент сил трения больше трех. Следовательно, решение задачи равновесия, вообще говоря, неединственно.

Будем искать наиболее простые распределения сил трения, при которых равновесие достигается с участием наименьшего возможного числа неподвижных точек, близлежащих к движущимся. Точки P_i , в которых сила трения отлична от нуля, будем называть активными. Таким образом, ищется решение задачи статики с наименьшим числом активных точек, соседних с движущимися.

Как следует из описания волнообразных движений многозвенника, эти движения состоят из следующих различных этапов.

А. Начальный этап, т.е. переход из состояния a в состояние b через промежуточное состояние b на фиг. 2, 3.

Б. Конечный этап, т.е. переход из состояния e в состояние $ж$ на фиг. 2, 3; этот этап подобен начальному и имеет место всегда при движении с тремя подвижными звеньями, а при четном N – и при движении с четырьмя подвижными звеньями.

В. Конечный этап, имеющий место при движении с четырьмя подвижными звеньями в случае нечетного N и соответствующий переходу из состояния $з$ в состояние $и$ на фиг. 3.

Г. Основной этап движения с тремя подвижными звеньями, характеризуемый состоянием $г$ на фиг. 2.

Д. Основной этап движения с четырьмя подвижными звеньями, характеризуемый состоянием $г$ на фиг. 3.

Ниже рассматриваются условия равновесия для каждого из этапов А–Д.

6. Начальный этап. Рассмотрим промежуточное состояние b начального этапа А движения (фиг. 2, 3). Координаты движущихся точек P_0 и P_1 равны соответственно

$$\begin{aligned} x_0 &= 2a - 2a \cos \alpha, & y_0 &= 0 \\ x_1 &= 2a - a \cos \alpha, & y_1 &= a \sin \alpha \end{aligned} \quad (6.1)$$

а их скорости имеют компоненты

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= 2a\dot{\alpha} \sin \alpha, & \dot{y}_0 &= 0 \\ \dot{x}_1 &= a\dot{\alpha} \sin \alpha, & \dot{y}_1 &= a\dot{\alpha} \cos \alpha \end{aligned} \quad (6.2)$$

Примем для определенности, что $\alpha \in (0, \pi/2)$, тогда $\dot{\alpha} > 0$. Силы трения, действующие на точки P_0 и P_1 , определяются равенством (2.1) при учете значений скоростей (6.2). Имеем

$$\mathbf{F}_0 = -mg\mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_1 = -mgk(\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}) \quad (6.3)$$

Здесь и далее через $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ обозначаются орты осей координат Ox, Oy соответственно. Проекции сил трения $\mathbf{F}_i$ на оси Ox, Oy будем обозначать через X_i, Y_i соответственно.

Предположим, что активными, т.е. имеющими отличные от нуля силы трения, являются точки $P_i, i \leq 5$. Составим уравнения равновесия многозвенника, принимая во внимание эти точки и учитывая соотношения (6.3)

$$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = mgk(1 + \sin \alpha) \quad (6.4)$$

$$Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = mgk \cos \alpha \quad (6.5)$$

$$\mathbf{r}_{2,1} \times \mathbf{F}_1 + a\mathbf{i} \times \mathbf{F}_3 + 2a\mathbf{i} \times \mathbf{F}_4 + 3a\mathbf{i} \times \mathbf{F}_5 = 0 \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) есть уравнение моментов относительно точки P_2 . Подставляя в это уравнение компоненты $(-a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ вектора $\mathbf{r}_{2,1}$ и силы $\mathbf{F}_1$ из (6.3), получим

$$Y_3 + 2Y_4 + 3Y_5 = -mgk \quad (6.7)$$

Чтобы удовлетворить условиям равновесия, нужно найти решение системы (6.4), (6.5), (6.7), удовлетворяющее условиям (2.1)

$$X_i^2 + Y_i^2 \leq (mgk)^2 \quad (6.8)$$

Для дальнейшего удобно нормировать все компоненты сил трения. Положим

$$X_i = mgk\xi_i, \quad Y_i = mgk\eta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (6.9)$$

Тогда ограничения закона Кулона (2.1) (или (6.8)) примут вид

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (6.10)$$

Уравнения равновесия (6.4), (6.5) и (6.7) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 &= 1 + \sin \alpha \\ \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 &= \cos \alpha \\ \eta_3 + 2\eta_4 + 3\eta_5 &= -1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Попробуем сначала удовлетворить уравнениям (6.11) с двумя неподвижными активными точками P_2 и P_3 , полагая $\xi_4 = \eta_4 = \xi_5 = \eta_5 = 0$. Тогда из третьего уравнения (6.11) получим $\eta_3 = -1$. Следовательно, из (6.10) имеем $\xi_3 = 0$. Первое уравнение (6.11) тогда дает $\xi_2 = 1 + \sin \alpha$, что нарушает условия (6.10).

Таким образом, двух неподвижных активных точек недостаточно, и точка P_4 должна быть также активной. Положим $\xi_5 = \eta_5 = 0$. Умножим второе уравнение (6.11) на два и вычтем из полученного соотношения третье уравнение (6.11). Получим

$$2\eta_2 + \eta_3 = 1 + 2 \cos \alpha \quad (6.12)$$

В начале рассматриваемого этапа имеем $\alpha = 0$, и уравнение (6.12) дает $2\eta_2 + \eta_3 = 3$. С учетом неравенств (6.10) получим $\eta_2 = \eta_3 = 1$. Подставляя $\eta_3 = 1$ и $\eta_5 = 0$ в третье уравнение, получим $\eta_4 = -1$. Таким образом, для $i = 2, 3, 4$ имеем $|\eta_i| = 1$ и в силу (6.10) $\xi_i = 0$. Поэтому первое уравнение (6.11) при $\xi_5 = 0$ не выполняется.

Следовательно, все четыре точки P_2, P_3, P_4, P_5 должны быть активными. Приведем два возможных решения уравнений (6.11) и неравенств (6.10)

$$\xi_2 = \xi_4 = 0, \quad \xi_3 = \sin \alpha, \quad \xi_5 = 1 \quad (6.13)$$

$$\eta_2 = -\eta_4 = (1 + \cos \alpha)/2, \quad \eta_3 = \cos \alpha, \quad \eta_5 = 0$$

$$\xi_2 = \xi_5 = 1/2, \quad \xi_3 + \xi_4 = (\sin \alpha)/2 \quad (6.14)$$

$$\eta_2 = 1/3 + (\cos \alpha)/2, \quad \eta_3 = \cos \alpha, \quad \eta_4 = -(\cos \alpha)/2, \quad \eta_5 = -1/3$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что оба решения (6.13) и (6.14) удовлетворяют уравнениям (6.11) и неравенствам (6.10). При этом для решения (6.13) некоторые из неравенств превращаются в равенства, а для решения (6.14) все неравенства (6.10) удовлетворяются с запасом.

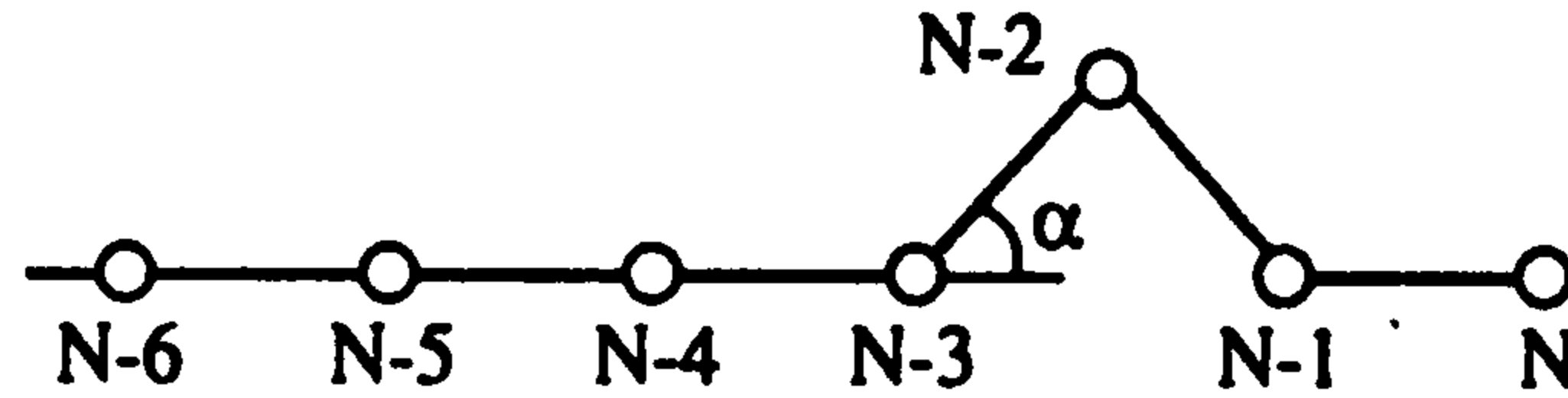
7. Конечные этапы. Конечный этап Б, характеризуемый переходом из состояния e в состояние $ж$ на фиг. 2, 3, представляет собой по существу начальный этап, проходящий в обратном времени. Точки P_{N-i} этапа Б следует отождествлять с точками P_i этапа А ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). При этом изменится знак угловой скорости $\dot{\alpha}$, а точка P_N этапа Б, как и точка P_0 этапа А, движется вперед вдоль оси x . В результате оказывается, что x -компоненты всех сил трения сохраняют свои знаки, а y -компоненты

поменяют знаки. Будем иметь следующее соответствие сил для этапов Б и А:

$$X_{N-i} = X_i, \quad Y_{N-i} = -Y_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (7.1)$$

Вывод предыдущего раздела о необходимости четырех активных неподвижных точек, а также решения (6.13), (6.14) сохраняют силу при учете обозначений (7.1) и (6.9).

Перейдем к рассмотрению конечного этапа В, имеющего место для движения с четырьмя подвижными звеньями в случае, когда $(N-1)/2$ – четно (ситуация з на фиг. 3). На этом этапе (см. фиг. 4) точки P_i при $i \leq N-3$ покоятся, а точки P_{N-1} и P_N



Фиг. 4

двигутся вдоль оси x . Поместим начало координат в точку P_{N-3} , направим ось x вдоль звена $P_{N-4}P_{N-3}$ и запишем координаты и скорости движущихся точек

$$\begin{aligned} x_{N-2} &= a \cos \alpha, \quad y_{N-2} = a \sin \alpha, \quad x_{N-1} = 2a \cos \alpha \\ y_{N-1} &= 0, \quad x_N = 2a \cos \alpha + a, \quad y_N = 0 \\ \dot{x}_{N-2} &= -a\dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{y}_{N-2} = a\dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{x}_{N-1} &= \dot{x}_N = -2a\dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{y}_{N-1} = \dot{y}_N = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь α – угол при основании равнобедренного треугольника $P_{N-3}P_{N-2}P_{N-1}$, $\dot{\alpha} < 0$.

Используя равенство (2.1) и соотношения (7.2), подсчитаем аналогично (6.3) силы трения, действующие на движущиеся точки,

$$\mathbf{F}_{N-2} = mgk(-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}), \quad \mathbf{F}_{N-1} = \mathbf{F}_N = -mgk \mathbf{i} \quad (7.3)$$

Составим уравнения равновесия, принимая во внимание точки от P_{N-6} до P_N

$$\begin{aligned} X_{N-6} + X_{N-5} + X_{N-4} + X_{N-3} &= mgk(2 + \sin \alpha) \\ Y_{N-6} + Y_{N-5} + Y_{N-4} + Y_{N-3} &= -mgk \cos \alpha \\ -3a\mathbf{i} \times \mathbf{F}_{N-6} - 2a\mathbf{i} \times \mathbf{F}_{N-5} - a\mathbf{i} \times \mathbf{F}_{N-4} + \mathbf{r}_{N-3,N-2} \times \mathbf{F}_{N-2} + \\ + \mathbf{r}_{N-3,N-1} \times \mathbf{F}_{N-1} + \mathbf{r}_{N-3,N} \times \mathbf{F}_N &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

В уравнение моментов (7.4) относительно точки P_{N-3} подставим силы трения (7.3) и координаты точек P_{N-2} , P_{N-1} , P_N из (7.2). В результате, при учете нормировки (6.9), система уравнений равновесия (7.4) примет вид

$$\begin{aligned} \xi_{N-6} + \xi_{N-5} + \xi_{N-4} + \xi_{N-3} &= 2 + \sin \alpha \\ \eta_{N-6} + \eta_{N-5} + \eta_{N-4} + \eta_{N-3} &= -\cos \alpha \\ 3\eta_{N-6} + 2\eta_{N-5} + \eta_{N-4} &= 1 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Предположим, что имеется всего три неподвижные активные точки P_{N-3} , P_{N-4} и P_{N-5} , так что $\xi_{N-6} = \eta_{N-6} = 0$. Умножим второе уравнение (7.5) на два и вычтем из полученного соотношения третье уравнение (7.5). Будем иметь

$$\eta_{N-4} + 2\eta_{N-3} = -2 \cos \alpha - 1 \quad (7.6)$$

При $\alpha = 0$ из (7.6) имеем $\eta_{N-4} + 2\eta_{N-3} = -3$, а так как $|\eta_i| \leq 1$ для всех i , то $\eta_{N-4} = \eta_{N-3} =$

$= -1$. В силу неравенств (6.10) имеем $\xi_{N-4} = \xi_{N-3} = 0$. Тогда первое уравнение (7.5) при условиях $\xi_{N-6} = 0$, $\alpha = 0$ принимает вид $\xi_{N-5} = 2$ и неравенство (6.10) при $i = N - 5$ нарушается. Следовательно, трех неподвижных активных точек недостаточно и точка P_{N-6} также является активной.

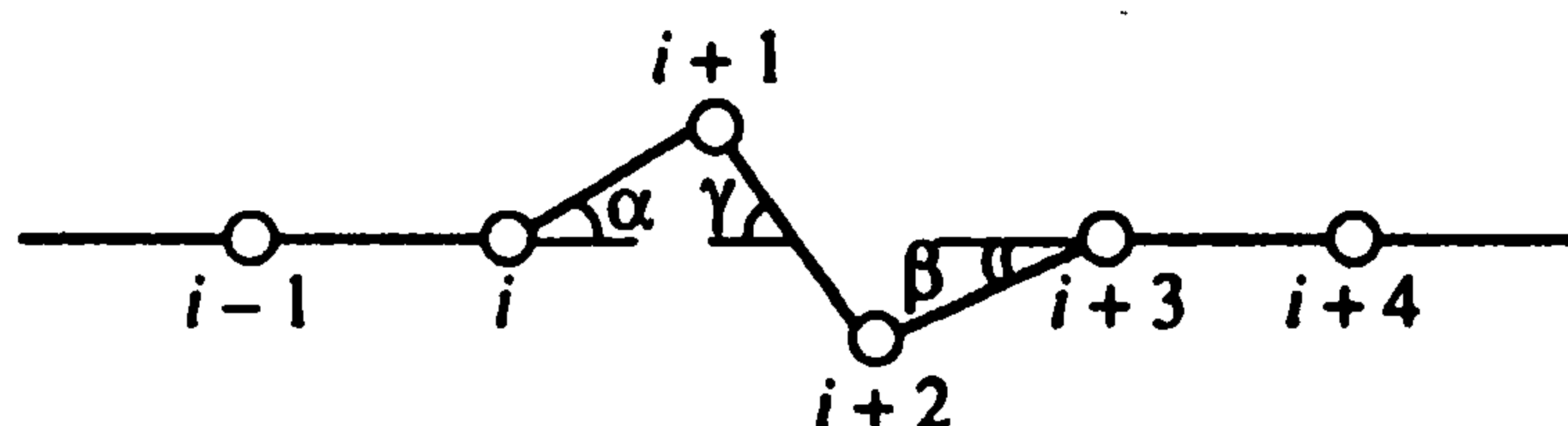
Приведем одно из возможных решений уравнений (7.5), удовлетворяющее также неравенствам (6.10) (с запасом)

$$\xi_{N-6} = 5/6, \quad \xi_{N-5} = (4 + \sin \alpha)/6, \quad \xi_{N-4} = (5 \sin \alpha)/6$$

$$\xi_{N-3} = 1/2, \quad \eta_{N-6} = 1/3, \quad \eta_{N-5} = (\cos \alpha)/2$$

$$\eta_{N-4} = -\cos \alpha, \quad \eta_{N-3} = -(2 + 3 \cos \alpha)/6$$

8. Основной этап при трех подвижных звеньях. Этот этап (этап Г из разд. 6) характеризуется состоянием г на фиг. 2. В общем случае этот этап изображен на



Фиг. 5

фиг. 5, где подвижными являются звенья $P_i P_{i+1}$, $P_{i+1} P_{i+2}$ и $P_{i+2} P_{i+3}$. Поместим начало координат в неподвижную точку P_i , направим ось x вдоль отрезка $P_i P_{i+3}$ и запишем координаты подвижных точек P_{i+1} и P_{i+2}

$$x_{i+1} = a \cos \alpha, \quad y_{i+1} = a \sin \alpha \quad (8.1)$$

$$x_{i+2} = l - a \cos \beta, \quad y_{i+2} = -a \sin \beta$$

Здесь α и β — углы между осью x и подвижными звеньями $P_i P_{i+1}$ и $P_{i+2} P_{i+3}$, отсчитываемые в противоположных направлениях (см. фиг. 5), а l — расстояние $P_i P_{i+3}$, неизменное в течение рассматриваемого этапа.

Дифференцируя соотношения (8.1), определим скорости точек P_{i+1} и P_{i+2}

$$\dot{x}_{i+1} = -a\dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{y}_{i+1} = a\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (8.2)$$

$$\dot{x}_{i+2} = a\dot{\beta} \sin \beta, \quad \dot{y}_{i+2} = -a\dot{\beta} \cos \beta$$

В ходе рассматриваемого этапа имеем $\dot{\alpha} < 0$, $\dot{\beta} > 0$. Силы трения, действующие на подвижные точки P_{i+1} и P_{i+2} , определим при помощи соотношения (2.1) и формул (8.2). Получим

$$\mathbf{F}_{i+1} = mgk(-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}) \quad (8.3)$$

$$\mathbf{F}_{i+2} = mgk(-\sin \beta \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j})$$

Составим уравнения равновесия многозвенника, предполагая, что с каждой стороны от подвижных звеньев имеется по две активных неподвижных точки, т.е. что активными являются точки P_j , $i - 1 \leq j \leq i + 4$ (см. фиг. 5). При учете равенств (8.3) имеем

$$X_{i-1} + X_i + X_{i+3} + X_{i+4} = mgk(\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$Y_{i-1} + Y_i + Y_{i+3} + Y_{i+4} = -mgk(\cos \alpha + \cos \beta) \quad (8.4)$$

$$-aY_{i-1} + lY_{i+3} + (l + a)Y_{i+4} =$$

$$= -mgka \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} - mgk \begin{vmatrix} l - a \cos \beta & -a \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

Последнее уравнение (8.4) есть уравнение моментов относительно точки P_i , составленное при учете выражений (8.1) и (8.3). После упрощения и перехода к безразмерным переменным (6.9) уравнения (8.4) примут вид

$$\xi_{i-1} + \xi_i + \xi_{i+3} + \xi_{i+4} = \sin \alpha + \sin \beta \quad (8.5)$$

$$\eta_{i-1} + \eta_i + \eta_{i+3} + \eta_{i+4} = -(\cos \alpha + \cos \beta)$$

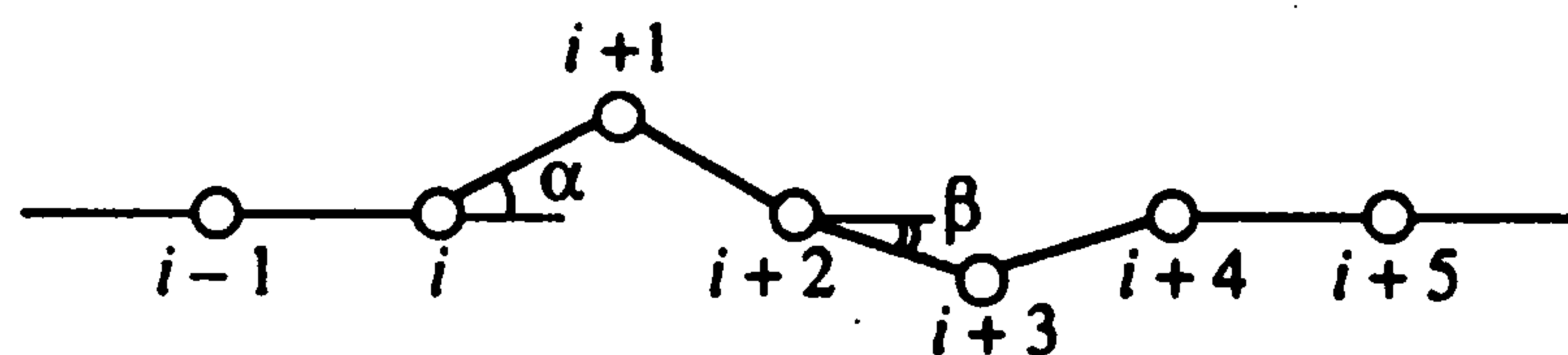
$$-a\eta_{i-1} + l\eta_{i+3} + (l+a)\eta_{i+4} = -l \cos \beta$$

Система (8.5) допускает решение

$$\xi_{i-1} = \xi_{i+4} = \eta_{i-1} = \eta_{i+4} = 0 \quad (8.6)$$

$$\xi_i = \sin \alpha, \quad \xi_{i+3} = \sin \beta, \quad \eta_i = -\cos \alpha, \quad \eta_{i+3} = -\cos \beta$$

удовлетворяющее также неравенствам (6.10). Это решение интересно тем, что в нем



Фиг. 6

имеется только две активные неподвижные точки P_i и P_{i+3} , являющиеся концами подвижных звеньев.

9. Основной этап при четырех подвижных звеньях. Этот этап (этап Д из разд. 6) характеризуется состоянием 2 на фиг. 3. В общем случае этот этап изображен на фиг. 6, где подвижными являются звенья $P_i P_{i+1}$, $P_{i+1} P_{i+2}$, $P_{i+2} P_{i+3}$ и $P_{i+3} P_{i+4}$. Поместим начало координат в неподвижную точку P_i и направим ось x вдоль отрезка $P_i P_{i+4}$. Через α и β обозначим углы при основаниях равнобедренных треугольников $P_i P_{i+1} P_{i+2}$ и $P_{i+2} P_{i+3} P_{i+4}$ соответственно. Запишем координаты подвижных точек

$$x_{i+1} = a \cos \alpha, \quad y_{i+1} = a \sin \alpha, \quad x_{i+2} = 2a \cos \alpha \quad (9.1)$$

$$y_{i+2} = 0, \quad x_{i+3} = a(2 \cos \alpha + \cos \beta), \quad y_{i+3} = -a \sin \beta$$

и их скорости

$$\dot{x}_{i+1} = -a\dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{y}_{i+1} = a\dot{\alpha} \cos \alpha, \quad \dot{x}_{i+2} = -2a\dot{\alpha} \sin \alpha$$

$$\dot{y}_{i+2} = 0, \quad \dot{x}_{i+3} = -a(2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta), \quad \dot{y}_{i+3} = -a\dot{\beta} \cos \beta \quad (9.2)$$

В процессе движения расстояние $P_i P_{i+4}$ остается неизменным и равным своему значению в начале и в конце этапа, когда один из углов α , β равен нулю, а другой своему максимальному значению α_0 . Имеем поэтому

$$\cos \alpha + \cos \beta = 1 + \cos \alpha_0 \quad (9.3)$$

Дифференцируя тождество (9.3), получим

$$\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta = 0 \quad (9.4)$$

При учете равенства (9.4) получим из (9.2)

$$\dot{x}_{i+3} = a\dot{\beta} \sin \beta \quad (9.5)$$

Учитывая, что $\dot{\alpha} < 0$, $\dot{\beta} > 0$, определим при помощи соотношений (2.1), (9.2), (9.5)

силы трения, действующие на подвижные точки,

$$\mathbf{F}_{i+1} = mgk(-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}), \quad \mathbf{F}_{i+2} = -mgk\mathbf{i} \quad (9.6)$$

$$\mathbf{F}_{i+3} = mgk(-\sin \beta \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j})$$

Составим уравнения равновесия многозвенника, предполагая, что с каждой стороны от подвижных звеньев имеется по две активных неподвижных точки, т.е. активными являются точки P_j , $i-1 \leq j \leq i+5$ (см. фиг. 6). Учитывая равенства (9.6), получим

$$X_{i-1} + X_i + X_{i+4} + X_{i+5} = mgk(1 + \sin \alpha + \sin \beta) \quad (9.7)$$

$$Y_{i-1} + Y_i + Y_{i+4} + Y_{i+5} = -mgk(\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$-aY_{i-1} + 2a(\cos \alpha + \cos \beta)Y_{i+4} + a(2\cos \alpha + 2\cos \beta + 1)Y_{i+5} =$$

$$= -mgka \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} - mgka \begin{vmatrix} 2\cos \alpha + \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

Последнее уравнение (9.7) есть уравнение моментов относительно точки P_i , составленное с учетом выражений (9.1) и (9.6).

Упростим уравнения (9.7), используя тождество (9.3) и переходя к безразмерным переменным (6.9). Получим

$$\xi_{i-1} + \xi_i + \xi_{i+4} + \xi_{i+5} = 1 + \sin \alpha + \sin \beta$$

$$\eta_{i-1} + \eta_i + \eta_{i+4} + \eta_{i+5} = -(\cos \alpha + \cos \beta) \quad (9.8)$$

$$-\eta_{i-1} + 2(1 + \cos \alpha_0)\eta_{i+4} + (3 + 2\cos \alpha_0)\eta_{i+5} = -2\cos \beta(1 + \cos \alpha_0)$$

Попробуем сначала, как в разд. 8, ограничиться двумя активными неподвижными точками и положим $\xi_{i-1} = \eta_{i-1} = \xi_{i+5} = \eta_{i+5} = 0$. Тогда из третьего уравнения (9.8) получим $\eta_{i+4} = -\cos \beta$, а из второго уравнения (9.8) при этом найдем $\eta_i = -\cos \alpha$. Из неравенств (6.10) тогда следует, что $|\xi_i| \leq \sin \alpha$, $|\xi_{i+4}| \leq \sin \beta$. Эти неравенства вступают в противоречие с первым уравнением (9.8) при $\xi_{i-1} = \xi_{i+5} = 0$. Таким образом, двух активных неподвижных точек недостаточно.

Оказывается, что если хотя бы одна из точек P_{i-1} или P_{i+5} также является активной, то решение существует. Положим

$$\xi_i = \sin \alpha, \quad \eta_i = -\cos \alpha, \quad \xi_{i+4} = \sin \beta, \quad \eta_{i+4} = -\cos \beta \quad (9.9)$$

$$\eta_{i-1} = \eta_{i+5} = 0$$

и, кроме того,

$$\text{либо } \xi_{i-1} = 1, \quad \xi_{i+5} = 0 \quad (9.10)$$

$$\text{либо } \xi_{i-1} = 0, \quad \xi_{i+5} = 1$$

Нетрудно проверить, что оба решения (9.9), (9.10) удовлетворяют уравнениям (9.8) и неравенствам (6.10). Таким образом, в данном случае активными должны быть три неподвижные точки: точки P_i , P_{i+4} и либо P_{i-1} , либо P_{i+5} .

10. Определение моментов. На любом этапе волнообразного движения с тремя или четырьмя подвижными звеньями имеется некоторое конечное число активных точек. Пусть P_q – крайняя левая, а P_r – крайняя правая активная точка, $q < r$. Имеем $\mathbf{F}_i \neq 0$ при $q \leq i \leq r$, $\mathbf{F}_i = 0$ при $i < q$ и $i > r$. В крайних активных точках имеем

$$\mathbf{R}_q = 0, \quad \mathbf{M}_q = 0; \quad \mathbf{R}_{r+1} = 0, \quad \mathbf{M}_{r+1} = 0 \quad (10.1)$$

Условия (10.1) означают, что на точку P_q и звено $P_q P_{q+1}$ не оказывается никакого воздействия слева, а на точку P_r и звено $P_{r-1} P_r$ – справа.

Так как в разд. 2 силы R_i определены при $1 \leq i \leq N$, а моменты M_i – при $1 \leq i \leq N-1$, то соотношения (10.1) имеют смысл лишь при $0 < q < r < N-1$. Доопределим эти силы и моменты при $i = 0, N, N+1$, в соответствии с их смыслом (см. разд. 2), следующим образом:

$$R_0 = R_{N+1} = 0, \quad M_0 = M_N = M_{N+1} = 0$$

Тогда равенства (10.1) и последующие формулы разд. 10, как нетрудно видеть, будут справедливы при всех q, r , таких, что $0 \leq q < r \leq N$.

Если многозвенник находится в равновесии или в квазистатическом движении, то из одной пары условий (10.1) вытекает другая пара. В самом деле, согласно соотношениям (2.2), имеем

$$R_{r+1} = F_r + R_r = F_r + F_{r-1} + R_{r-1} = \dots = \sum_{i=q}^r F_i + R_q \quad (10.2)$$

Так как в состоянии равновесия все силы трения, действующие на активные точки, уравновешены, то из (10.2) следует, что равенства $R_q = 0$ и $R_{r+1} = 0$ эквивалентны друг другу.

Подсчитаем момент, действующий в i -м шарнире. Применяя равенства (2.2), получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} M_i &= M_{i-1} + r_{i,i-1} \times (F_{i-1} + R_{i-1}) = r_{i,i-1} \times F_{i-1} + M_{i-2} + r_{i-1,i-2} \times (F_{i-2} + R_{i-2}) + \\ &+ r_{i,i-1} \times (F_{i-2} + R_{i-2}) = r_{i,i-1} \times F_{i-1} + r_{i,i-2} \times F_{i-2} + M_{i-2} + r_{i,i-2} \times R_{i-2} = \\ &= \dots = \sum_{j=q}^{i-1} r_{i,j} \times F_j + M_q + r_{i,q} \times R_q \end{aligned} \quad (10.3)$$

Так как $R_q = 0, M_q = 0$, то из (10.3) вытекает формула для определения момента в i -м шарнире

$$M_i = \sum_{j=q}^{i-1} r_{i,j} \times F_j, \quad q \leq i \leq r+1 \quad (10.4)$$

Полагая $i = r+1$ в (10.4) и учитывая, что силы трения, приложенные к многозвеннику во всех активных точках, имеют нулевой суммарный момент, получим $M_{r+1} = 0$.

Таким образом, выполнение одной пары условий (10.1) влечет за собой выполнение другой пары этих условий.

Формула (10.4) позволяет оценить потребную величину моментов двигателей, установленных в шарнирах многозвенника. Используя решения для сил трения, полученные в разд. 6–9, подсчитаем по формуле (10.4) моменты в шарнирах для всех активных точек на этапах движения А – Д. Оказывается, что во всех случаях и для всех значений угла α_0 имеем

$$|M_i| \leq 2mgka \quad (10.5)$$

Рассчитанные в данном разделе моменты в шарнирах M_i обеспечивают в каждом положении равновесие многозвенника. Для того чтобы создать желаемое квазистатическое движение по схеме разд. 3 или 4, необходимо задать моменты в виде

$$M_i^* = M_i + \Delta M_i \quad (10.6)$$

Моменты M_i определены выше, а дополнительные малые моменты ΔM_i должны формироваться по принципу обратной связи. Для этого нужно сначала задать желаемый закон движения, например, в виде зависимости от времени обобщенных координат многозвенника $q_k = q_k^0(t)$ ($k = 1, \dots, N+2$). Эта зависимость должна быть задана так, чтобы при изменении t от нуля до T многозвенник последовательно проходил состояния, описанные в разд. 3 или 4. При

этом скорости и ускорения должны быть достаточно малы, так чтобы возникающие силы инерции были много меньше сил трения. Это условие выражается неравенствами

$$(\dot{\alpha})^2 a \ll gk, \quad \ddot{\alpha} a \ll gk$$

Дополнительные моменты ΔM_i можно задавать, например, в виде обратной связи

$$\Delta M_i = \sum_{k=1}^{N+2} \{W_{ik}[q_k - q_k^0(t)] + W_{ik}^*[\dot{q}_k - \dot{q}_k^0(t)]\} \quad (10.7)$$

где матрицы W_{ik} и W_{ik}^* должны подбираться из соображений устойчивой реализации заданного движения. Текущие обобщенные координаты и скорости q_k , $\dot{q}_k$ должны измеряться сенсорными устройствами. Представляется, что таким образом можно с заданной точностью отследить желаемое движение. Однако эта задача требует дополнительного исследования.

Отметим лишь, что дополнительные моменты ΔM_i могут быть сделаны весьма малыми по сравнению с M_i за счет выбора медленного квазистатического движения $q_k^0(t)$. Поэтому полученные формулы (10.4) и оценки (10.5) определяют главную часть потребных моментов, развиваемых двигателями.

11. Обсуждение результатов. Как показано в разд. 6, 7, на начальном и конечных этапах А – В волнообразного движения должно быть не менее четырех неподвижных активных точек, на этапе Г – не менее двух, а на этапе Д – не менее трех таких точек. Поэтому волнообразное движение многозвенника с тремя подвижными звеньями может реализоваться, если он имеет не менее шести точек или пяти звеньев ($N \geq 5$). Для осуществления волнообразного движения с четырьмя подвижными звеньями многозвенник должен иметь не менее семи точек (шести звеньев, $N \geq 6$). Движение с тремя подвижными звеньями проще, но, как показано ниже, требует больших углов наклона звеньев к оси x .

Оценим максимальные углы наклона звеньев к оси x для движения с тремя и с четырьмя подвижными звеньями при одном и том же полном перемещении многозвенника L . Так как формула (3.1) справедлива для обоих типов движения, то значение α_0 при одном и том же L для обоих типов будет одним и тем же. При этом угол наклона звеньев к оси x в случае четырех подвижных звеньев не будет превышать α_0 .

Определим максимальный угол наклона звеньев к оси x в случае движения с тремя подвижными звеньями. Из фиг. 5 ясно, что наибольший угол наклона к оси x имеет среднее из подвижных звеньев $P_{i+1}P_{i+2}$. Обозначая через γ угол между этим звеном и осью x , имеем (см. фиг. 5)

$$a(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = l = a + 2a \cos \alpha_0 \quad (11.1)$$

Второе равенство (11.1) соответствует случаю, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ на фиг. 5. Наибольший наклон звена $P_{i+1}P_{i+2}$ отвечает наименьшему значению $\cos \gamma$ или, в силу равенства (11.1), максимальному значению суммы $(\cos \alpha + \cos \beta)$. Используя равенства (8.1), запишем условие равенства длины звена $P_{i+1}P_{i+2}$ величине a . Имеем

$$[l - a(\cos \alpha + \cos \beta)]^2 + a^2(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = a^2 \quad (11.2)$$

После упрощений из (11.2) получим

$$l(\cos \alpha + \cos \beta) - a \cos(\alpha - \beta) = (l^2 + a^2)(2a)^{-1} \quad (11.3)$$

Найдем условный экстремум величины $(\cos \alpha + \cos \beta)$ при условии (11.3). Составим функцию Лагранжа

$$G = \cos \alpha + \cos \beta + \lambda(l(\cos \alpha + \cos \beta) - a \cos(\alpha - \beta)) \quad (11.4)$$

где λ – множитель Лагранжа, и приравняем нулю ее частные производные $\partial G / \partial \alpha$ и $\partial G / \partial \beta$.

Имеем

$$-(1 + \lambda l) \sin \alpha + \lambda a \sin(\alpha - \beta) = 0 \quad (11.5)$$

$$-(1 + \lambda l) \sin \beta - \lambda a \sin(\alpha - \beta) = 0$$

Складывая полученные уравнения, получим

$$(\sin \alpha + \sin \beta)(1 + \lambda l) = 0 \quad (11.6)$$

Так как углы α и β лежат в интервале $[0, \alpha_0]$, где $\alpha_0 < \pi/2$, и не могут равняться нулю одновременно, то из (11.6) имеем $1 + \lambda l = 0$. Тогда из (11.5) получим $\alpha = \beta$. Подставляя это условие в равенство (11.3) и учитывая выражение (11.1) для l , найдем

$$\cos \alpha = \cos \beta = (1 + \cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0)(1 + 2 \cos \alpha_0)^{-1} \quad (11.7)$$

Найденный экстремум, как нетрудно проверить, отвечает искомому максимуму величины $(\cos \alpha + \cos \beta)$ и лежит в интервале $(0, \alpha_0)$.

Соответствующее минимальное значение $\cos \gamma$ получим из равенства (11.1)

$$\cos \gamma = (2 \cos \alpha_0 + 2 \cos^2 \alpha_0 - 1)(1 + 2 \cos \alpha_0)^{-1} \quad (11.8)$$

Формулы (11.7) и (11.8) позволяют сделать следующие выводы. Всегда имеем $\cos \gamma < \cos \alpha_0$, т.е. угол наклона в случае трех подвижных звеньев больше, чем в случае четырех подвижных звеньев. Если же $\alpha_0 > 69^\circ$, т.е. $\cos \alpha_0 < (3^{1/2} - 1)/2$, то $\cos \gamma < 0$, т.е. угол наклона звена $P_{i+1}P_{i+2}$ становится больше $\pi/2$. Если же $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$, то $\gamma \rightarrow \pi$. Таким образом, в случае трех подвижных звеньев многозвенник изгибается значительно сильнее, особенно при больших значениях α_0 .

Если число звеньев N достаточно велико, то по многозвеннику может двигаться одновременно несколько волн рассмотренных выше типов. Когда первая из волн с тремя или четырьмя подвижными звеньями продвинется достаточно далеко вперед, в конце многозвенника (при $i = 0, 1, 2$) может начаться новая волна того же самого или другого типа, которая будет двигаться по многозвеннику вслед за первой. Таким образом, средняя скорость перемещения всего многозвенника как целого может быть увеличена в несколько раз.

В заключение отметим, что в отличие от способов перемещения многозвенника, описанных ранее [8, 9], где для осуществления быстрых фаз движения требуются моменты, значительно превосходящие моменты сил трения $mgka$, здесь требования к моментам более умеренные. Они выражаются неравенством (10.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray J. Animal Locomotion. N.Y.: Norton, 1968. 479 p.
2. Добролюбов А.И. Бегущие волны деформации. Минск: Наука и техника, 1987. 142 с.
3. Hirose S., Morishima A. Design and control of a mobile robot with an articulated body // Intern. J. Robot. Research. 1990. V. 9. N 2. P. 99–115.
4. Chirikjan G.S., Burdick J.W. Kinematics of hyper-redundant robot locomotion with applications to grasping // Proc. 1991 IEEE Intern. Conf. on Robot. and Automat. Sacramento. Washington etc.: IEEE Comput. Soc. Press, 1991. V. 1. P. 720–725.
5. Burdick J.W., Radford J., Chirikjan G.S. A "sidewinding" locomotion gait for hyper-redundant robots // Proc. 1993. IEEE Intern. Conf. on Robot. and Automat. Atlanta. Piscataway, N.Y.: IEEE Service Center, 1993. V. 3. P. 101–106.

6. *Hirose S.* Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators. Oxford: Univ. Press, 1993. 220 p.
7. *Ostrowski J., Burdick J.* Gait kinematics for a serpentine robot // Proc. 1996 IEEE Intern. Conf. on Robot. and Automat. Minneapolis. N.Y.: IEEE, 1996. V. 2. P. 1294–1299.
8. Черноусько Ф.Л. Движение плоского многозвенника по шероховатой горизонтальной плоскости. Докл. РАН 2000. Т. 370. № 2. С. 186–189.
9. Черноусько Ф.Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.

Москва

Поступила в редакцию
9.XI.1999