

УДК 539.3

© 2000 г. А.Г. Колпаков, И.Г. Шерemet

ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН С ЗАДАНЫМИ ЖЕСТКОСТЯМИ

Исследуется задача проектирования слоистых пластин, заключающаяся в отыскании множества проектов, доставляющих пластине требуемые жесткостные характеристики. Задача рассматривается в дискретной постановке с учетом постоянства коэффициента Пуассона и переменности модуля Юнга по толщине пластинки. Исходная задача проектирования сводится к задаче о выпуклых комбинациях, для решения которой применяется метод свертывания.

Задаче проектирования слоистых пластин посвящено большое число работ. Хорошо изучена задача оптимального проектирования: получить проект пластины, минимизирующий какой-либо функционал (вес, прогиб и т.п.). Значительно менее изучена следующая задача проектирования [1–3]: указать способ создания пластины с заданными (не обязательно оптимальными) характеристиками. Для непрерывного распределения характеристик по толщине пластины эта задача была рассмотрена [4] на основе применения экстремальных принципов.

Ниже дается решение дискретной задачи проектирования, поставленной в [2–5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим слоистую пластину со слоями, параллельными координатной плоскости и образованными из однородных изотропных материалов. Требуется выбрать распределение материалов в слоях, дающее пластине заданные жесткости (жесткости в плоскости, несимметричные жесткости и изгибные жесткости).

Обозначим через y координату, отсчитываемую поперек пластины. В слоистой пластине модуль Юнга $E(y)$ и коэффициент Пуассона $\nu(y)$ – функции переменной y .

Задача проектирования состоит в следующем. Требуется найти распределение материальных характеристик, придающее пластине заданную жесткость в ее плоскости S^0 , несимметричную жесткость S^1 и жесткость на изгиб S^2 .

Для этого надо решить задачу

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)} dy = S^0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(y)y}{1-\nu^2(y)} dy = S^1, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(y)y^2}{1-\nu^2(y)} dy = S^2 \quad (1.1)$$

Интегралы в (1.1) дают выражение соответствующих жесткостей пластины через упругие постоянные образующих ее слоев [2–4].

Для простоты положим $\nu(y) = \text{const}$. Тогда (1.1) – задача относительно $E(y)$. Практически используется конечное (часто небольшое) число материалов.

Для дискретизации задачи условимся, что пластина разбита на m слоев равной толщины $1/m$, функция $E(y)$ постоянна на интервалах $[-1/2 + (i-1)/m, -1/2 + i/m]$. Здесь и всюду далее $i = 1, \dots, m$.

Искомymi величинами являются E_i . По физическому смыслу $E_i \geq 0$. Задача (1.1) может быть приведена к следующей:

$$\sum_i x_i = 1, \quad x_i = E_i / m S^0 > 0, \quad \sum_i \nu_i x_i = \nu \quad (1.2)$$

$$\nu_{il} = \frac{1}{m} \int_{-1/2+(i-1)/m}^{-1/2+i/m} y^l dy, \quad \nu_l = S^l / S^0, \quad l = 1, 2 \quad (\nu_i = (\nu_{i1}, \nu_{i2}), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2))$$

2. Дискретная задача о выпуклых комбинациях. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $Z_n \subset [0,1]$ – конечное множество (состоящее из n чисел), $v_i, v \in R^k$ – заданные векторы. Требуется указать числа x_i , являющиеся решением следующей задачи:

$$\sum_i v_i x_i = v \quad (2.1)$$

$$\sum_i x_i = 1 \quad (2.2)$$

$$x_i \in Z_n, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

Задача (2.1), (2.2) с условием

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (2.4)$$

есть задача о выпуклых комбинациях (ЗВК), рассмотренная ранее [1, 2]. Задача (2.1)–(2.3) – это дискретная ЗВК.

Цель работы – построение общего решения задачи (2.1)–(2.3), т.е. множества всех коэффициентов $x_i \in Z_n$ выпуклых комбинаций векторов v_i , дающих вектор v .

Снимем условие дискретности (2.3) и заменим его условием (2.4). Общее решение ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) известно и имеет вид [1,2]

$$x_i = \sum_{\gamma=1}^M P_{i\gamma} \lambda_{\gamma}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.5)$$

где $P_{\gamma} = (P_{1\gamma}, \dots, P_{m\gamma})$ – некоторый конечный набор решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4), а λ_{γ} ($\gamma = 1, \dots, M$) – любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{\gamma=1}^M \lambda_{\gamma} = 1, \quad 0 \leq \lambda_{\gamma} \leq 1 \quad (2.6)$$

Другими словами, множество $\Lambda(v)$ решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) имеет вид

$$\Lambda(v) = \text{conv} \{P_{\gamma}, \gamma = 1, \dots, M\}.$$

Метод построения системы векторов $\{P_{\gamma}, \gamma = 1, \dots, M\}$, описан ранее [1, 2], приведены примеры его использования [3–5]. Показано [2], что при случайных возмущениях данных в ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) с вероятностью единица система $\{P_{\gamma}, \gamma = 1, \dots, M\}$ совпадает с множеством крайних точек многогранника $\Lambda(v)$ решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4). Последнее означает, что $\{P_{\gamma}, \gamma = 1, \dots, M\}$ – минимальная система точек, порождающих множество решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4).

Множество $Z_n^m = \{x : x_i \in Z_n\}$ представляет собой дискретную сетку в R^m . Множество решений ЗВК (2.1)–(2.3) есть $\Lambda(v) \cap Z_n^m$.

Задача (2.1)–(2.3) будет решена, если укажем векторы, даваемые формулами (2.5), (2.6) и удовлетворяющие условию $x_i \in Z_n$.

Соотношения (2.5), (2.6) можно рассмотреть как ЗВК относительно λ_{γ} . Предложенный ранее [1,2] алгоритм свертывания указывает на следующий факт (он также следует из выпуклости множества $\Lambda(v)$): если первые $i-1$ уравнения в (2.5) удовлетворены, то последующее i -е уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$x_i \in I_i = [\min_i, \max_i] \quad (2.7)$$

Интервал I_i , вообще говоря, зависит от $x_1, \dots, x_{i-1}$.

Из (2.7) получаем необходимое и достаточное условие существования решения дискретной ЗВК

$$Z(i) = Z_n \cap I_i \neq \emptyset \quad \text{для всех } i \quad (2.8)$$

Поскольку интервалы I_i зависят от $x_1, \dots, x_{i-1}$, то возникает дерево T . Его вершина $T(0)$ соответствует $i = 1$ – отсутствию решения. Ветвление на уровне $T(i-1)$ соответствует точкам $Z(i)$.

Любая ветвь, идущая от корня $T(0)$ до уровня $T(m)$, дает решение дискретной ЗВК (2.1)–(2.3). Наоборот, любому решению дискретной ЗВК соответствует ветвь от корня $T(0)$ до уровня $T(m)$. Таким образом, указанное дерево дает множество всех решений дискретной ЗВК.

3. Численные алгоритмы. Переход от ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) к ЗВК (2.5), (2.6) – построение системы векторов $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$. Система векторов может быть построена на основе алгоритма свертывания, описанного ранее [1,2]. Ее свойства (в частности, свойство оптимальности) описаны выше. Подробнее см. [1–5].

Проверка разрешимости ЗВК (2.5), (2.6) для правых частей из множества Z_n – построение интервалов I_i . Для построения интервалов $[\min_i, \max_i]$ можно воспользоваться симплекс-методом. Для этого на $(i-1)$ -м шаге первые $i-1$ уравнения из (2.5) и уравнение (2.6) следует рассмотреть как ограничения, а целевую функцию $L(\lambda)$ построить на основе i -го уравнения из (2.5)

$$L(\lambda) = \sum_{\gamma=1}^M P_{i\gamma} \lambda_\gamma \quad (3.1)$$

и рассмотреть задачу

$$L(\lambda) \rightarrow \min(\max) \quad (3.2)$$

Решение задачи (3.2) (максимизации и минимизации) симплекс-методом требует меньших затрат памяти ЭВМ, чем методом свертывания.

Построение дерева. Построение дерева можно вести любым способом, поскольку его размеры практически оказываются не очень большими (см. далее).

Таким образом, численный алгоритм решения дискретной ЗВК свелся к решению хорошо известных задач – ЗВК и задаче линейного программирования.

4. Разрешимость ЗВК и структура ее решения. Рассмотрим относительно внутреннюю точку [6] x множества $\Lambda(v)$, т.е. точку, для которой найдется вектор u и число δ такие, что $x + \tau u$ лежит в $\Lambda(v)$ при $0 < \tau < \delta$. Подставив $x + \tau u$ в соотношения (2.1), (2.2) и дифференцируя по τ , получим, что вектор u удовлетворяет равенствам

$$\sum_i v_i u_i = 0, \quad \sum_i u_i = 0 \quad (4.1)$$

Введя векторы $w_l = (v_{l1}, \dots, v_{lm})$, $w_0 = (1, \dots, 1)$, можно переписать (4.1) в виде $w_l u = 0$ ($l = 0, 1, 2$) для каждого вектора u , соединяющего внутренние точки. Это означает что множество $\Lambda(v)$ лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнениями (4.1), и имеет размерность меньше m (напомним, что решения ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) – элементы R^m).

В силу этого свойства задача (2.5), (2.6) для произвольно заданного x , как правило, не будет иметь решения, так как случайное попадание точки на гиперплоскость имеет вероятность, равную нулю.

В связи с этим можно предложить производить возмущение множества $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ с целью придания выпуклой оболочке возмущенного множества телесности (размерности равной m). Из (4.1) заключаем, что возмущать множество $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ следует векторами $w_i = (v_i, 1)$ (являющимися решениями (4.1) и "перпендикулярными" $\Lambda(v)$).

Рассмотрим возмущение множества $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ вида $\{P_\gamma + r\xi w_{\gamma \bmod 3}, \gamma = 1, \dots, M\}$, где ξ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, а r – характерная величина возмущения, $\bmod$ означает деление по модулю. С вероятностью единица $\text{conv} \{P_\gamma + r\xi w_{\gamma \bmod 3}\}$ имеет размерность m .

Пусть задача (2.5) с векторами $\{P_\gamma + r\xi w_{\gamma \bmod 3}, \gamma = 1, \dots, M\}$ вместо $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ имеет решение x . Это решение представимо в виде выпуклой комбинации

$$x = \sum_{\gamma=1}^M (P_\gamma + r\xi w_{\gamma \bmod 3}) \lambda_\gamma \quad (4.2)$$

Подставляя это выражение в (2.1) и учитывая, $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ удовлетворяют равенствам (2.1), получаем

$$\left| \sum_{\gamma=1}^M \sum_i v_i (P_{i\gamma} + r\xi w_{i\gamma \bmod 3}) - v \right| \leq \sum_{\gamma=1}^M \sum_i |v_i r\xi w_{i\gamma}|$$

Последнее выражение есть погрешность, с которой решение x удовлетворяет уравнению (2.1). Видно, что она имеет порядок r .

5. Численные тесты. Были составлены программы для получения симплицальных решений ЗВК, для построения дерева и для решения задачи линейного программирования.

Тестовая задача. В качестве тестовой задачи использовалась следующая. Задавалась некоторая структура слоистой пластинки E_i^* и для нее подсчитывались жесткости S^v ($v = 0, 1, 2$) по формулам (1.1). Затем для этих жесткостей решалась задача проектирования. В множестве ее решений должно было присутствовать решение E_i^* . Это свойство и проверялось. Решения проводились для числа слоев m от 8 до 12. Число решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) M не превышало 100. Как следствие, ЗВК (2.5), (2.6) представляла собой 8–12 уравнений с числом переменных не более 100. В просчитанных примерах решение оказалось единственным: E_i^* . Это соответствует сказанному в разд. 4.

Задача с возмущенной системой $\{P_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$. В качестве типичного примера приведем следующую задачу. Число слоев $m = 7$. Проект $\{E_i^*, i = 1, \dots, 7\} = \{3, 5, 3, 5, 3, 5, 3\}$ возьмем за известный. Соответствующие ему жесткости $S^0 = 3,8571$, $S^1 = 0$, $S^2 = 1,1348$. Число решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) $M = 12$.

Для проектирования используется набор материалов $Z_6 = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$.

Параметр возмущения был взят равным $r = 0,05$. Количество узлов дерева T на уровнях приведено ниже

Уровень i	0	1	2	3	4	5	6	7
Число узлов	1	5	19	49	157	80	12	4

Получены проекты $E_1 = \{5, 3, 5, 5, 1, 7, 1\}$, $E_2 = \{3, 5, 5, 5, 1, 5, 3\}$, $E_3 = \{3, 5, 3, 5, 3, 5, 3\}$, $E_4 = \{1, 7, 3, 5, 3, 3, 5\}$. Проект E_3 совпадает с исходным.

Соответствующие полученным проектам жесткости $S^0 = 3,857$ и $S^2 = 1,135$ для всех проектов, а жесткости S^1 равны 0,163; 0,245; 0,000; 0,082.

6. Другие задачи проектирования. *Задача с жесткостями из заданного интервала.* Как было отмечено в разд. 4 решение задачи проектирования часто отсутствует. При проведении численных расчетов видно, что в ряде случаев возникают решения, доставляющие пластине жесткости близкие к требуемым, но не равные им точно [7]. Ослабим равенства, потребовав чтобы жесткости S^v ($v = 0, 1, 2$) принадлежали заданным интервалам $[S^v - \delta S^v, S^v + \delta S^v]$ ($v = 0, 1, 2$). После введения дополнительных переменных $x_{m+1}, \dots, x_{m+5}$ неравенства

$$S^v - \delta S^v \leq \sum_i d_{vi} x_i \leq S^v + \delta S^v$$

сводятся к следующей ЗВК:

$$\sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \tag{6.1}$$

$$\sum_i v_{li} x_i - x_{m+2l-1} = v_l$$

$$\sum_i v_{li} x_i + x_{m+2l} = v_l + \delta S^l / (S^l - \delta S^l)$$

Величины $\{v_{li}\}$ определены выше, а

$$x_i = (E_i / m)(S^0 - \delta S^0), \quad v_l = (S^l + \delta S^l) / (S^l - \delta S^l), \quad l = 1, 2$$

Задача дискретной оптимизации пластин. Пусть для пластины задана целевая функция (вес, цена) $M(x)$. Требуется решить задачу минимизации $M(x)$ при ограничениях (2.1)–(2.3). Для решения этой задачи построим множество X решений ЗВК (2.1)–(2.3) изложенным выше методом, после чего решение получается путем минимизации функции $M(x)$ на конечном множестве X .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolpakov A.G., Kolpakova I.G.* Convex combinations problem and its application for problem of design of laminated composite materials // IMACS'91, 13th World Congr. on Computational and Applied Mathematics. Dublin, Ireland: Trinity College, 1991. V. 4. P. 1955–1956.
2. *Колпаков А.Г.* К решению задачи о выпуклых комбинациях // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1992. Т. 32. № 8. С. 1323–1330.
3. *Kolpakov A.G., Kolpakova I.G.* Design of laminated composites possessing specified homogenized characteristics // Computers and Structures. 1995. V. 57. № 4. P. 599–604.
4. *Аннин Б.Д., Каламкаров А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З.* Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: ВО "Наука", 1993. 256 с.
5. *Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G.* Analysis, Design and Optimization of Composite Structures. Chichester et al.: Wiley, 1997. 356 p.
6. *Rocafellar R.T.* Convex analysis. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press 1970. = Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 467 с.
7. *Kolpakov A.G.* Conves combinations problem and its application to design of laminated structures // ENUMATH'99, The Third European Conference Numer. Math. and Advanced Applications. Jyvaskyla, Finland: Book of Abstracts, 1999. C. 103–104.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.I.1999