

УДК 539.375

© 2000 г. Н.М. Бородачев

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЕ, К ПОВЕРХНОСТЯМ КОТОРОЙ ПРИЛОЖЕНЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛЫ

Приближенным методом получена формула для определения перемещений поверхностей внутренней эллиптической трещины в неограниченном упругом теле, когда к ее поверхностям приложены равные по величине и противоположно направленные сосредоточенные силы, линия действия которых перпендикулярна плоскости трещины и проходит через ее центр.

Известны решения для внутренней эллиптической трещины в случае, когда на ее поверхностях задаются нормальные и касательные напряжения, определяемые полиномами произвольных степеней [1–3]. Эти решения построены на основе использования свойств гармонических потенциалов эллиптического диска и характеризуются непрерывным распределением напряжений на поверхностях трещины.

Решение для внешней эллиптической трещины, находящейся под действием сосредоточенных сил, было получено [4] с использованием малоизученных функций Ламе второго рода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченное линейно-упругое тело с плоской внутренней эллиптической трещиной (разрезом). В прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 трещина расположена в плоскости $x_3 = 0$, ее центр совпадает с началом координат. Положительную ориентацию S^+ поверхности трещины S будем связывать с предельным значением $x_3 = 0^+$, а отрицательную ориентацию S^- – с $x_3 = 0^-$. К поверхностям трещины S^+ и S^- приложены равные, но противоположно направленные сосредоточенные силы P , линия действия которых совпадает с осью x_3 (фигура).

Интегральное уравнение теории трещин в случае нормального отрыва имеет вид [5, 6]

$$\sigma_{33}(x_1, x_2) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \nabla^2 \iint_{S^+} \frac{u_3(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}, \quad (x_1, x_2) \in S^+ \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$$

где u_3 – перемещение поверхности трещины, σ_{33} – нормальное напряжение, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

В (1.1) предполагается, что касательные напряжения σ_{12} и σ_{13} на поверхностях S^+ и S^- равны нулю.

Решение уравнения (1.1) для внутренней эллиптической трещины известно, лишь когда напряжение σ_{33} имеет вид полинома.

Рассмотрим случай, когда на трещину действуют сосредоточенные силы, т.е.

$$\sigma_{33}(x_1, x_2) = -P\delta(x_1)\delta(x_2), \quad (x_1, x_2) \in S^+ \quad (1.2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Для решения уравнения (1.1) с условием (1.2) применим полуобратный метод. Для эллиптической трещины он применялся [7, 8] в случае, когда напряжения на поверхностях трещины выражаются полиномами.

При использовании полуобратного метода нужно выбрать для перемещения $u_3(x_1, x_2)$ выражение, которое удовлетворяет уравнению (1.1) с условием (1.2) и в предельном случае $a_1 = a_2$ (a_1, a_2 – полуоси граничного эллипса) дает известный результат для круговой трещины.

Решение уравнения (1.1) с условием (1.2), для круговой трещины можно получить методом парных интегральных уравнений. В результате имеем

$$u_3(r) = \frac{P(1-\nu)}{\pi^2 \mu r} \arccos \frac{r}{a} = \frac{P(1-\nu)}{\pi^2 \mu r} \operatorname{arctg} \left[\frac{a}{r} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2} \right)^{1/2} \right] \quad (1.3)$$

$$r \leq a, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

где a – радиус трещины.

2. Построение решения. Введем в плоскости $x_3 = 0$ обобщенные полярные координаты

$$x_1 = a_1 \rho \cos \phi, \quad x_2 = a_2 \rho \sin \phi \quad (0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

и по аналогии с формулой (1.3) решение для эллиптической трещины будем искать в таком виде (полагаем $a_1 \geq a_2$):

$$u_3(\rho, \phi) = \frac{A}{r} \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta a_1}{r} (1 - \rho^2)^{1/2} \right], \quad \rho \leq 1; \quad A = \frac{P(1-\nu)}{\pi^2 \mu} \quad (2.1)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 = a_1^2 \rho^2 (1 - k^2 \sin^2 \phi), \quad k^2 = 1 - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2, \quad \rho^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}$$

где β – некоторая постоянная. Постоянная A определена в соответствии с тем, что при $a_1 \rightarrow \infty$ и $a_2 \rightarrow \infty$ упругое тело разделится на два не связанных между собой полупространства, нагруженных на границе сосредоточенными силами P ; в этом случае, как известно [9],

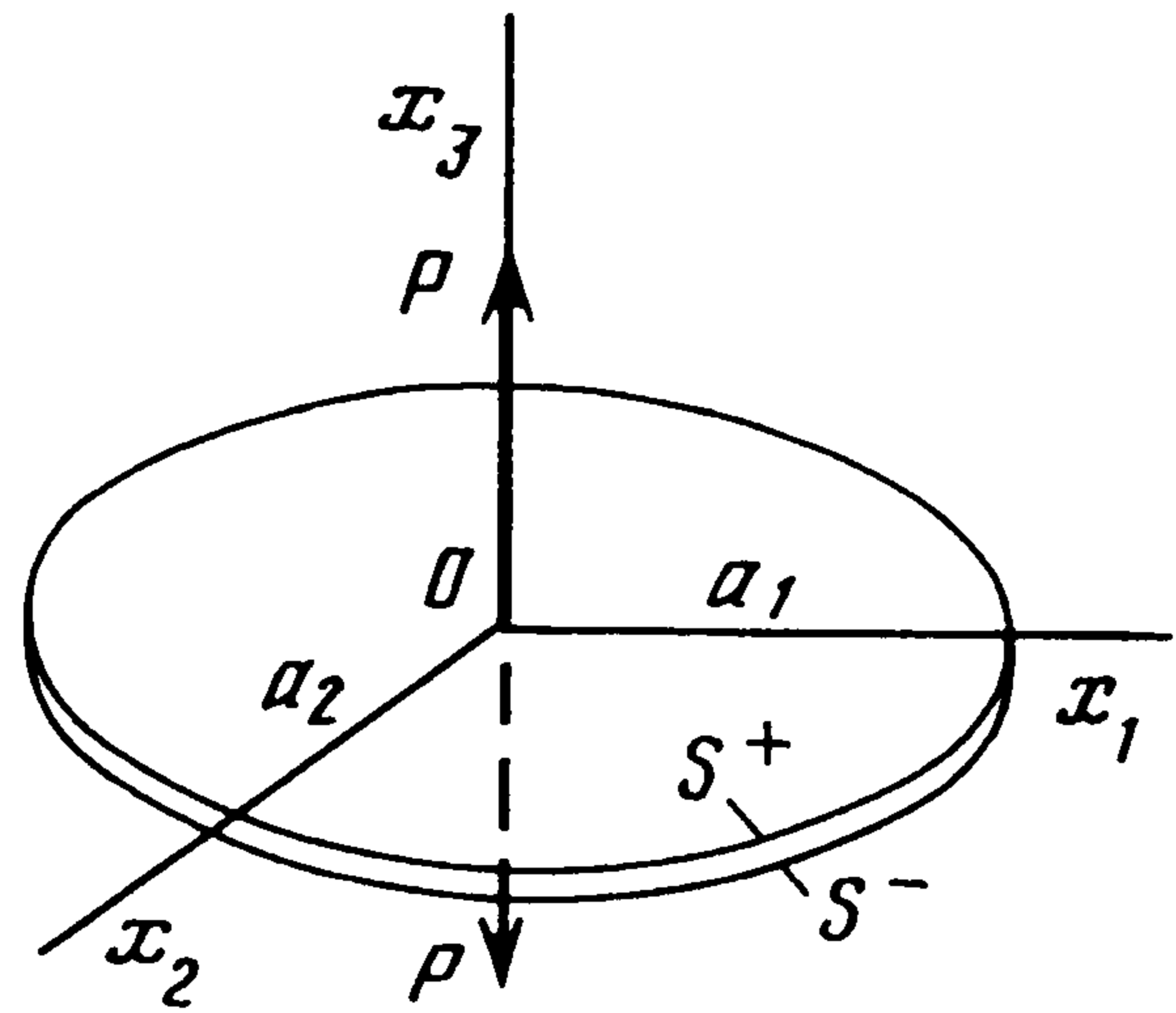
$$u_3 = P(1-\nu)/(2\pi\mu r)$$

Переходим к определению величины β . Для этого воспользуемся вариационной формулой для тела с трещиной [10, 11]. Эта формула в обобщенных полярных координатах для эллиптической трещины имеет вид

$$\delta_n u_3(\rho, \phi) = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu} \int_0^{2\pi} K_1(\phi; \rho, \phi) K_1(\phi) \delta n(\phi) \Pi^{1/2}(\phi) d\phi \quad (2.2)$$

$$\Pi(\phi) = a_1^2 \sin^2 \phi + a_2^2 \cos^2 \phi$$

где $\delta n(\phi)$ – вариация контура трещины, $\delta_n u_3(\rho, \phi)$ – вариация перемещения поверхности трещины, вызванная вариацией контура.



Пусть при вариации граничного контура эллиптической трещины выполняется условие

$$\delta a_2 / \delta a_1 = a_2 / a_1 = k_1 \quad (2.3)$$

Можно показать, что в этом случае

$$\delta n(\varphi) = a_2 \delta a_1 \Pi^{-1/2}(\varphi)$$

Тогда формула (2.2) принимает вид

$$\delta_n u_3(\rho, \varphi) = \frac{\pi(1-\nu)a_2 \delta a_1}{2\mu} \int_0^{2\pi} K_1(\varphi; \rho, \varphi) K_1(\varphi) d\varphi \quad (2.4)$$

Воспользуемся известным "пробным" решением, когда к поверхностям эллиптической трещины приложено постоянное давление, т.е. $p(\rho, \varphi) = p = \text{const}$. В этом случае имеем

$$u_3(\rho, \varphi) = \frac{(1-\nu)a_2 p}{\mu E(k)} (1-\rho^2)^{1/2}, \quad \rho \leq 1, \quad K_1(\varphi) = \frac{(k_1)^{1/2} p}{E(k)} \Pi^{1/4}(\varphi) \quad (2.5)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Используя первое соотношение (2.5) и учитывая условие (2.3), находим $\delta_n u_3(\rho, \varphi)$ и затем из формулы (2.4) получаем

$$k_1^{1/2} (1-\rho^2)^{-1/2} = \frac{\pi}{2} a_2 \int_0^{2\pi} K_1(\varphi; \rho, \varphi) \Pi^{1/4}(\varphi) d\varphi, \quad \rho \leq 1 \quad (2.6)$$

Величина $K_1(\varphi; \rho, \varphi)$ является весовой функцией для эллиптической трещины.

Используя формулу (2.1), определим величину $K_1(\varphi; 0, 0)$, которая соответствует приложению сил $P = 1$ в центре эллипса. Имеем

$$K_1(\varphi; 0, 0) = \frac{\mu}{(1-\nu)P} \lim_{r_1 \rightarrow 0} \frac{u_3(\rho, \varphi)}{(2r_1)^{1/2}}, \quad r_1 \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Функция $u_3(\rho, \varphi)$ определяется формулой (2.1), r_1 – расстояние между точками M и M_1 . Точка M расположена на контуре трещины, а точка M_1 – вблизи границы трещины на внутренней нормали к контуру трещины. Можно показать, что координаты точки M_1

$$x_1 = \cos \varphi (a_1 - a_2 r_1 \Pi^{-1/2}), \quad x_2 = \sin \varphi (a_2 - a_1 r_1 \Pi^{-1/2})$$

где членами порядка выше r_1 пренебрегли. Следовательно,

$$(1-\rho^2) = \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right) = \frac{2r_1}{a_1 a_2} \Pi^{1/2}(\varphi) + O(r_1^2) \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.1) в соотношение (2.7) и учитывая равенство (2.8), находим

$$K_1(\varphi; 0, 0) = \frac{\beta}{\pi^2 a_1^{3/2}} \Phi(\varphi, k) \quad (2.9)$$

$$\Phi(\varphi, k) = \left(1 + \frac{k^2}{1-k^2} \sin^2 \varphi\right)^{1/4} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1}$$

Здесь учтено, что

$$\Pi(\varphi) = a_2^2 \left(1 + \frac{k^2}{1-k^2} \sin^2 \varphi\right)$$

и что на контуре граничного эллипса (при $\rho = 1$)

$$r^2 = a_1^2(1 - k^2 \sin^2 \varphi)$$

Полагая в выражении (2.6) $\rho = 0$, $\phi = 0$ и подставляя $K_1(\varphi; 0, 0)$ из (2.9), находим

$$\beta = \frac{\pi}{2(1 - k^2)^{1/2} I(k)}, \quad I(k) = \int_0^{\pi/2} \Phi(\varphi, k) \left(1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \sin^2 \varphi \right)^{1/4} d\varphi \quad (2.10)$$

Численные значения β приведены ниже

k	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
β	1	0,998	0,976	0,992	0,875	0,806	0,697	0,512

Из формулы (2.9) следует, что коэффициент интенсивности напряжений для эллиптической трещины нормального отрыва при действии двух сосредоточенных сил P (направленных вдоль оси x_3) будет равен

$$K_1 = \frac{\beta P}{\pi^2 a_1^{3/2}} \Phi(\varphi, k) \quad (2.11)$$

Численные значения K_1 подсчитанные по формуле (2.11) и формуле (3.10) статьи [12], совпадают, хотя эти формулы получены разными методами и имеют различный вид. Это в какой-то мере подтверждает правильность выражения (2.1).

В предельном случае $a_1 = a_2 = a$ трещина становится круговой и формула (2.1) превращается в (1.3), а из (2.11) получаем $K_1 = P/(\pi^2 a^{3/2})$, что согласуется с известным результатом.

3. Геометрическая интерпретация. Рассмотрим геометрическую интерпретацию выражения (2.11). Для эллиптической трещины имеем

$$S = \pi a_1 a_2, \quad R = \Pi^{3/2}(\varphi)/(a_1 a_2), \quad ds = \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi \quad (3.1)$$

где S – площадь эллипса, R – радиус кривизны его контура. При учете соотношений (3.1) формулу (2.11) запишем в виде

$$K_1 = \frac{2}{\pi^{2/3}} \frac{PR^{1/6}}{S^{1/3} I_0 r_0^2}, \quad I_0 = \int_{\Gamma} \frac{ds}{r_0^2}, \quad r_0 = a_1(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (3.2)$$

где Γ – граничный контур трещины, r_0 – расстояние от центра трещины до точки лежащей на граничном контуре.

Для проверки правильности формулы (2.1) применим теорему о взаимности работ [9]

$$\iint_{S^+} \sigma'_{33} u''_3 dS = \iint_{S^+} \sigma''_{33} u'_3 dS \quad (3.3)$$

Рассмотрим два состояния $((x_1, x_2) \in S^+)$

$$\sigma'_{33}(x_1, x_2) = -p = \text{const} \quad (3.4)$$

$$u'_3(x_1, x_2) = \frac{(1 - \nu)a_2 p}{\mu E(k)} \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^{1/2}$$

$$\sigma''_{33}(x_1, x_2) = -P \delta(x_1) \delta(x_2) \quad (3.5)$$

$$u''_3(x_1, x_2) = \frac{P(1 - \nu)}{\pi^2 \mu r} \arctg \left[\frac{\beta a_1}{r} \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^{1/2} \right]$$

Подставляя выражения (3.4), (3.5) в равенство (3.3) и переходя к обобщенным полярным координатам, получим

$$\frac{1}{E(k)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi/2} \frac{F(t)dt}{(1-k^2 \sin^2 t)^{1/2}} \quad (3.6)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} \frac{m}{(m^2-1)^{1/2}} \operatorname{arctg}(m^2-1)^{1/2}, & m > 1 \\ 1, & m = 1 \\ \frac{m}{2(1-m^2)^{1/2}} \ln \frac{1+(1-m^2)^{1/2}}{1-(1-m^2)^{1/2}}, & m < 1 \end{cases}$$

$$m = \beta(1-k^2 \sin^2 t)^{-1/2}$$

Интеграл в правой части равенства (3.6) вычислялся с помощью квадратурной формулы Гаусса с 96 узлами. В результате была доказана справедливость равенства (3.6).

4. Проверка правильности решения. Теперь выполним главную проверку. Докажем, что выражение (2.1) удовлетворяет интегральному уравнению (1.1) с условием (1.2), т.е., что справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi^3} \nabla^2 \iint_{S^+} \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta a_1}{r} \left(1 - \frac{y_1^2}{a_1^2} - \frac{y_2^2}{a_2^2} \right)^{1/2} \right] [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{-1/2} dy_1 dy_2 = \quad (4.1)$$

$$= -\delta(x_1)\delta(x_2), \quad (x_1, x_2) \in S^+$$

Интеграл, входящий в равенство (4.1), вычислить в замкнутом виде, по-видимому, невозможно. При использовании численных методов целесообразно перейти к эллиптическим координатам u, v :

$$x_1 = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad x_2 = c \operatorname{sh} u \sin v \quad (u \geq 0, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

$$c = (a_1^2 - a_2^2)^{1/2}, \quad a_1 \geq a_2$$

В эллиптических координатах равенство (4.1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \int_0^{2\pi} dv_1 \int_0^{u_0} \frac{1}{r^* R^*} \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta}{kr^*} g(u_1, v_1) \right] (\operatorname{ch}^2 u_1 - \cos^2 v_1) du_1 = \quad (4.2)$$

$$= -\delta(u) \begin{cases} \delta(v - \pi/2) & (0 \leq u \leq u_0, 0 \leq v \leq \pi) \\ \delta(v - 3\pi/2) & (0 \leq u \leq u_0, \pi \leq v \leq 2\pi) \end{cases}$$

$$r^* = (\operatorname{ch}^2 u_1 - \sin^2 v_1)^{1/2}$$

$$R^* = [(\operatorname{ch} u \cos v - \operatorname{ch} u_1 \cos v_1)^2 + (\operatorname{sh} u \sin v - \operatorname{sh} u_1 \sin v_1)^2]^{1/2}$$

$$g(u_1, v_1) = \left[1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^2 (k_1^2 \operatorname{ch}^2 u_1 \cos^2 v_1 + \operatorname{sh}^2 u_1 \sin^2 v_1) \right]^{1/2}$$

$$k_1 = a_2 / a_1, \quad u_0 = \ln \frac{1+k_1}{k}$$

Применять численные методы непосредственно к выражению (4.2) нецелесообразно, так как получить численно дельта-функцию весьма затруднительно. В связи с

этим (4.2) заменим следующей системой:

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} dv_1 \int_0^{u_0} \frac{1}{r^* R^*} \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta}{kr^*} g(u_1, v_1) \right] (\operatorname{ch}^2 u_1 - \cos^2 v_1) du_1 \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f(u, v) = -\delta(u) \begin{cases} \delta(v - \pi/2) & \text{при } 0 \leq v \leq \pi \\ \delta(v - 3\pi/2) & \text{при } \pi \leq v \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.4)$$

В формулах (4.3), (4.4) $(u, v) \in S^+$, т.е. $0 \leq u \leq u_0$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Общее решение уравнения Пуассона (4.4) можно представить в виде суммы какого-либо его частного решения и гармонической внутри эллипса функции. Гармоническая внутри эллипса функция может быть представлена в таком виде [13]:

$$F(u, v) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\operatorname{ch} nu}{\operatorname{ch} nu_0} \cos nv + B_n \frac{\operatorname{sh} nu}{\operatorname{sh} nu_0} \sin nv \right) \quad (4.5)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются по предельному (граничному) условию

$$F(u, v) \Big|_{u=u_0} = F(u_0, v) \quad (4.6)$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(u_0, v) \cos nv dv \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.7)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(u_0, v) \sin nv dv \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.4) можно представить в такой форме:

$$f(u, v) = F(u, v) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{[\varphi(u, v)]^{1/2}} \quad (u, v) \in S^+ \quad (4.8)$$

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} u^2 + (v - \pi/2)^2 & \text{при } 0 \leq v \leq \pi \\ u^2 + (v - 3\pi/2)^2 & \text{при } \pi \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

Функция $f(u, v)$ вычислялась по формулам (4.3) и (4.8) и результаты сравнивались. Функция $f(u, v)$ вычислялась в ряде точек (u_i, v_j) при различных значениях параметра k ($0 \leq k \leq 0,9$). Погрешность вычисления функции $f(u, v)$ по формулам (4.3) и (4.8) не превышала 0,5%.

Интеграл (4.3) сходится для всех точек $(u, v) \in S^+$, кроме точки $u = 0$, $v = \pi/2$ (или $v = 3\pi/2$), в которой он имеет логарифмическую особенность.

Как показали обширные численные расчеты, выражение (4.2) удовлетворяется с высокой степенью точности. Отсюда следует, что выражение (2.1) для определения перемещений поверхности трещины S^+ удовлетворяет уравнению (1.1) с условием (1.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kassir M.K., Sih G.C. Three-Dimensional Crack Problems. Leyden: Noordhoff, 1975. 452 p.
2. Бородачев А.Н. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для плоской эллиптической трещины при произвольных граничных условиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 63–69.
3. Vijayakumar K., Atluri S.N. An embedded elliptical crack, in an infinite solid, subjected to arbitrary crack-face tractions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. № 1. P. 88–96.

4. *Stallybrass M.P.* On the concentrated loading of an external elliptical crack // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1982. V. 35. № 4. P. 441–459.
5. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
6. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения. Киев: Наук. думка, 1991. 415 с.
7. *Sneddon I.N.* The stress intensity factor for a flat elliptical crack in an elastic solid under uniform tension // *Intern. J. Engng. Sci.* 1979. V. 17. № 2. P. 185–191.
8. *Shibuya T.* Some mixed boundary value problems for an infinite solid containing a flat elliptical crack // *Bull. JSME.* 1977. V. 20. № 146. P. 909–914.
9. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. *Rice J.R.* First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. № 3. P. 571–579.
11. *Бородачев Н.М.* Об одном вариационном методе решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоской трещиной // *Прикл. механика.* 1986. Т. 22. № 4. С. 71–76.
12. *Бородачев Н.М.* Об одном методе построения весовой функции для тела с трещиной // *ПММ.* 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 329–333.
13. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холишевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 269 с.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Киев

Поступила в редакцию
16.VI.1998