

УДК 539.375

© 2000 г. С.А. Назаров

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИН ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ. СИЛОВОЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

Изучается квазистатическое развитие системы трещин на основе записи критериев разрушения как вариационных неравенств, которые позволяют проследивать удлинения трещин в зависимости от временноподобного параметра нагружения. Анализируется взаимодействие трещин, их устойчивость или лавинообразный рост. Обсуждаются сходство и различия критериев Ирвина и Гриффитса как в обычных, так и в уточненных формулировках.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерное однородное тело Ω , ослабленное семейством прямолинейных трещин M^j ($j = 1, \dots, J$). Занумеруем $P^1, \dots, P^N$ вершины трещин, расположенные внутри Ω (у краевой трещины помечается лишь одна вершина, т.е. $N \leq 2J$). В каждой точке P^n вводится своя система полярных координат (r_n, φ_n) , причем $r_n = |x - P^n|$ и $\varphi_n = \pm\pi$ – уравнения берегов $M_{\pm}^j$ трещины с вершиной P^n . Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в P^n , вызванные нагрузкой p^0 на внешней поверхности Γ тела Ω , обозначаем K_1^{n0} и K_2^{n0} (для простоты пренебрегаем массовыми силами). Введем временноподобный параметр нагружения $\tau \in [0, \tau_0)$ и представим нагрузку в виде

$$p^\tau = p^0 + \tau p' + \tau^2 p'' + \dots \quad (1.1)$$

Соответствующие КИН в теле $\Omega(0) = \Omega \setminus \{M^1 \cup \dots \cup M^J\}$ с начальной конфигурацией повреждений также становятся суммами

$$K_i^{n\tau} = K_i^{n0} + \tau K_i^{n'} + \tau^2 K_i^{n''} + \dots, \quad n = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

Если в процессе нагружения хотя бы одна трещина оказалась неравновесной, семейство трещин $\{M^1, \dots, M^J\}$ начнет развиваться. Цель работы – на основе различных критериев разрушения дать формулировки задач, позволяющие предсказать конфигурацию семейства $\{M^j(\tau): j = 1, \dots, J\}$ в момент $\tau > 0$. При этом предполагается, что трещины растут прямолинейно и не могут сливаться. Последнее условие обеспечивается малостью параметра τ , а первое обсуждается в разд. 3 и 7. Малость τ позволяет также заменить ряды Тейлора квадратичными приближениями, т.е. удалить "+..." из (1.1) и (1.2). КИН $K_i^n(\tau)$, отвечающие нагрузке $p(\tau) = p^\tau$ и смещенной вершине $P^n(\tau)$, разумеется, могут отличаться от $K_i^{n\tau}$. Удлинение трещины M^j в сторону ее вершины P^n обозначим $h_n(\tau) = |P^n - P^n(\tau)|$. Считаем, что все трещины раскрыты (нет контакта берегов) и не могут зарастать (процесс разрушения необратим); иными словами,

$$K_1^n(\tau) > 0, \quad h_n(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [0, \tau_0), \quad n = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

Обычные формулировки $K_1^{n0} \geq K_{lc}$ и $\Delta U + 2\gamma(h_1 + \dots + h_N) \leq 0$ критериев разрушения Ирвина и Гриффитса дают значение критической, вызывающей старт трещин, нагрузки. Известные подходы к уточнению формулировок критериев (см. [1, 2] для силового и [3, 4] для энергетического) требуют обращения к задачам с односторонними связями.

В разд. 3 и 4 воспроизводятся вариационные неравенства, получающиеся на пути апостериорного анализа (иными словами, условия равновесности соотносятся с промежуточными и конечным положениями трещин). Такие неравенства позволяют описать квазистатическое развитие семейства $\{M^1, \dots, M^J\}$, т.е. найти функции $h_1, \dots, h_N$ из (1.3) и определить условия возникновения бифуркаций или перехода к динамическому разрушению. Основой для вывода вариационных неравенств служат разнообразные асимптотические формулы для напряженного состояния тела при произвольной, но малой вариации длин трещин (разд. 2). В обоих случаях данные задач выражены через одни и те же характеристики тела в момент $\tau = 0$, что дало возможность в разд. 5 сравнить результаты, полученные в указанных выше предположениях на основе вариационно-асимптотических моделей разных критериев. Эти модели не всегда являются эквивалентными, причем при определенных условиях модель критерия Ирвина предсказывает большее продвижение трещин, чем модель критерия Гриффитса (предложения 2 и 3). Примеры и обобщения обсуждаются в заключительных разд. 6–8.

2. Асимптотические формулы. Поле смещений в теле $\Omega(0)$ под нагрузкой (1.1) обозначим $u^\tau(x)$. Вблизи вершины P^n справедливо разложение

$$u^\tau(x) = \Lambda^\tau(x) + \sum_i \left\{ K_i^{n\tau} r_n^{1/2} \Phi^{1i}(\varphi^n) + k_i^{n\tau} r_n^{3/2} \Phi^{3i}(\varphi^n) \right\} + O(r_n^2) \quad (2.1)$$

Всюду в статье суммирование по i, l ведется от 1 до 2, а по m, n – от 1 до N . В (2.1) Λ^τ – линейная вектор-функция переменных x , Φ^{mi} – известные угловые части (см., например, [5, § 1]), а $k_i^{n\tau}$ – "младшие" КИН (они не связываются с сингулярностями напряжений, но оказывают влияние на продвижение трещины). Кроме того, аналогично соотношению (1.2) имеем

$$u^\tau(x) = u^0(x) + \tau u'(x) + \tau^2 u''(x), \quad k_i^{n\tau} = k_i^{n0} + \tau k_i^{n'} + \tau^2 k_i^{n''} \quad (2.2)$$

Введем весовые функции ζ^{ni} с особенностями в точке P^n (см. [6, 7], а также [5, § 1]), т.е. неэнергетические решения однородной задачи в области $\Omega(0)$

$$\zeta^{ni}(x) = \delta_{nm} r_m^{-1/2} \Psi^{1i}(\varphi^m) + \sum_l A_{nm}^{il} r_m^{1/2} \Phi^{1l}(\varphi^m) + c^{nmi} + O(r_m) \quad (2.3)$$

Здесь c^{nmi} – постоянные векторы, Ψ^{1i} – угловые части сингулярных полей смещений (они выписаны, например, в [5, § 1]), A_{nm}^{il} – подобные КИН множители, являющиеся геометрическими характеристиками поврежденного тела, а δ_{nm} – символ Кронекера. Весовые функции ζ^{ni} введены в [6, 7] для вычисления КИН

$$K_i^{n\tau} = \int p^\tau(x) \cdot \zeta^{ni}(x) ds_x \quad (2.4)$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется по поверхности Γ тела Ω .

Формула (2.4) доказывается при помощи интегрирования по частям в области $\Omega(0)$ с вырезанным малым кругом $\{x : r_n < 0\}$ и последующего предельного перехода $\delta \rightarrow +0$. Такие же манипуляции с ζ^{ni} и ζ^{ml} приводят к равенствам

$$A_{nm}^{il} = A_{mn}^{li} \quad (2.5)$$

Подчеркнем, что все введенные величины относятся к начальному положению трещин и потому могут служить данными задачи о развитии семейства.

Незначительная модификация процедуры из [8] (см. также [5, § 3] и [9, § 7.2]) позволяет построить асимптотику решения $u(\tau; x)$ задачи о деформации тела $\Omega(\tau) = \Omega \setminus \{M^1(\tau) \cup \dots \cup M^J(\tau)\}$ нагрузкой $p(\tau)$ (в отличие от $u^\tau(x)$ это реальное поле смещений, учитывающее рост трещин). "Дальнее" поле, служащее приближением к $u(\tau; x)$ вне окрестностей вершин трещин, выражается в терминах внешнего разложения

$$u(\tau; x) \sim u^0(x) + \tau u'(x) + \alpha \sum_n h_n(\tau) \sum_i K_i^{n0} \zeta^{ni}(x) \quad (2.6)$$

Иными словами, применяется метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [10, 11] и др.). Помимо поправки $\tau u'(x)$ из (2.2) правая часть (2.6) содержит линейную комбинацию весовых функций, появляющуюся в связи с удлинением трещин. Множитель α уравнивает сингулярную часть $r^{-1/2} \Psi^{li}(\varphi)$ с продифференцированной вдоль трещины корневой составляющей $r^{1/2} \Phi^{li}(\varphi)$ [12, 13] и в изотропном случае вычисляется по постоянным Ламе λ и μ упругого материала

$$\alpha = (\lambda + 2\mu)[2\mu(\lambda + \mu)]^{-1} \quad (2.7)$$

Поскольку явный вид угловых частей $\Phi^{\dots}$ и $\Psi^{\dots}$ в статье не используется, согласно известным результатам [13], в некоторых случаях рассмотрение ортотропных тел требует лишь изменения множителя (2.7).

Точность приближения (2.6) определяется квадратами величин τ и $h(\tau) = \max \{h_1(\tau), \dots, h_N(\tau)\}$ (максимальное из удлинений). Из-за особенностей $O(r_n^{-1/2})$ вблизи вершины P^n внешнее разложение (2.6) заменяется внутренним разложением, записываемым при помощи быстрых переменных $\xi^n = h_n(\tau)^{-1}(x - P^n(\tau))$ и отражающим эффекты пограничного слоя. Явный вид этого разложения представлен ранее ([8] и [5, §§ 3, 5]). В нем фигурируют все асимптотические члены из (2.1) и (2.3), однако гладкие составляющие $\Lambda^\tau(x)$ и c^{nmi} не сказываются ни на дальнем поле (2.6), ни на следующей асимптотике КИН:

$$K_i^n(\tau) = K_i^{n0} + \tau K_i^{n'} + h_n(\tau) k_i^{n0} / 2 + \alpha \sum_{m,l} A_{nm}^{il} h_m(\tau) K_l^{m0} + O(\tau^2 + h(\tau)^2) \quad (2.8)$$

Поправки $h_n(\tau) k_i^{n0} / 2$ и $\tau K_i^{n'}$ обусловлены смещением вершины P^n и линейным изменением внешнего воздействия $p^\tau \sim p^0 + \tau p'$, а сумма по m и l описывает взаимовлияние растущих трещин.

Рассмотрим теперь потенциальную энергию деформации $U(\tau) = E(\tau) - R(\tau)$, где $E(\tau)$ — упругая энергия, запасенная телом $\Omega(\tau)$, а $R(\tau)$ — работа внешних сил $p(\tau)$. Используя соотношения (1.1), (2.6) и (2.4), приходим к известной формуле Гриффитса, которая дополнена членом $\tau U'$, порожденным варьированием нагрузки,

$$\begin{aligned} U(\tau) &= -\frac{1}{2} R(\tau) = -\frac{1}{2} \int p(\tau; x) \cdot u(\tau; x) ds_x = \\ &= U^0 + \tau U' - \frac{\alpha}{2} \sum_{n,i} h_n(\tau) K_i^{n0} \int p^0 \cdot \zeta^{ni} ds_x + O(\tau^2 + h(\tau)^2) = \\ &= U^0 + \tau U' - \frac{\alpha}{2} \sum_{n,i} h_n(\tau) (K_i^{n0})^2 + O(\tau^2 + h(\tau)^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$U^0 = -\frac{1}{2} R^0 = -\frac{1}{2} \int p^0 \cdot u^0 ds_x, \quad U' = -\frac{1}{2} \int (p^0 \cdot u' + p' \cdot u^0) ds_x$$

Далее понадобится уточненная формула (2.9), которую можно вывести и обосновать, построив очередные члены внутреннего и внешнего разложений для $u(\tau; x)$ [5]. Однако тот же результат достигается более простым путем: соотношения (2.9) и (2.8)

дают возможность вычислить с надлежащей точностью производную $\partial^2 U / \partial \tau^2$. Таким образом,

$$U(\tau) = U^0 + \tau U' + \tau^2 U'' - \frac{\alpha}{2} \sum_{n,i} h_n(\tau) K_i^{n0} \left\{ K_i^{n0} + 2\tau K_i^{n'} + \frac{1}{2} h_n(\tau) k_i^{n0} + \right. \\ \left. + \alpha \sum_{m,l} A_{il}^{nm} h_m(\tau) K_l^{m0} \right\} + O(\tau^3 + h(\tau)^3) \quad (2.10)$$

$$U'' = -\frac{1}{2} \int (p^0 \cdot u'' + 2p' \cdot u' + p'' \cdot u^0) ds_x$$

Подчеркнем, что выражение из фигурных скобок отличается от правой части (2.8) множителем 2 при величине $\tau K_i^{n'}$.

3. Вариационное неравенство на основе критерия Ирвина. Критерий Ирвина подразумевает, что вблизи вершин $P^1, \dots, P^N$ превалирует напряженное состояние первой моды (нормальный разрыв), т.е. КИН $K_2^1, \dots, K_2^N$ аннулируются или пренебрежимо малы, что согласуется с предположением о сохранении прямолинейности. Такое состояние может быть реализовано для трещин, лежащих на одной прямой, или для нескольких подобных шеренг, удаленных одна от другой.

Введем удобные обозначения. В качестве неизвестного примем столбец $H = (H_1, \dots, H_N)'$ с компонентами (см. (1.3))

$$H_n(\tau) = h_n(\tau) K_1^{n0} \geq 0 \quad (3.1)$$

Из коэффициентов A_{nm}^{11} (см. (2.3)) образуем матрицу A размером $N \times N$; она симметрическая в силу (2.5). Скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^N$ обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В согласии с формулой (3.1) столбец H принадлежит квадранту $(\mathbf{R}_+)^N$ (индекс плюс указывает на неотрицательность компонент).

Согласно силовому критерию разрушения, трещина покоится, если K_1^n не превосходит критического значения КИН K_{1c} . Это условие запишем в развернутом виде, отслеживая в каждый момент τ как неподвижные, так и смешивающиеся вершины,

$$h_n(\tau) = 0 \Rightarrow K_1^n(\tau) \leq K_{1c} \quad (3.2)$$

$$h_n(\tau) > 0 \Rightarrow K_1^n(\tau) = K_{1c} \quad (3.3)$$

Пояснение к последней строке: неравенство $K_1^n(\tau) < K_{1c}$, означающее остановку трещины до момента τ , исключено из (3.3) потому, что благодаря малости τ квазистатический процесс разрушения естественно считать непрерывным. По существу такие же импликации применялись ранее [1, 2, 14].

Действуя по обычной схеме (см., например, [15]), преобразуем формулы (3.2), (3.3) в неравенство, справедливое при любом $X_n \geq 0$,

$$(K_1^n(\tau) - K_{1c})(H_n(\tau) - X_n) \geq 0 \quad (3.4)$$

Оно действительно является краткой записью соотношений (3.2) и (3.3), поскольку последние вытекают из (3.4), если взять $X_n = H_n(\tau) \pm H_n(\tau)$ при $H_n(\tau) > 0$ и $X_n > 0$ при $H_n(\tau) = 0$.

Заменим $K_1^n(\tau)$ асимптотическим представлением из (2.8), просуммируем неравенства (3.4) по $n = 1, \dots, N$ и после перегруппировки членов получим

$$\alpha \langle AH(\tau), H(\tau) - X \rangle + \langle BH(\tau), H(\tau) - X \rangle \geq \langle F^I(\tau), H(\tau) - X \rangle, \quad \forall X \in (\mathbf{R}_+)^N \quad (3.5)$$

$$B = \text{diag}\{B_1, \dots, B_N\}, \quad F^I(\tau) = (F_1^I(\tau), \dots, F_N^I(\tau))' \quad (3.6)$$

$$B_n = (2K_1^{n0})^{-1} k_1^{n0}, \quad F_n^I(\tau) = K_{1c} - K_1^{n0} - \tau K_1^{n'}$$

Алгебраическое вариационное неравенство (3.5) (назовем его неравенством, соответствующим задаче I) следует интерпретировать как модель силового критерия разрушения, учитывающую приращение нагрузки и взаимодействие трещин. Все данные задачи I определяются по линейной части $p^0 + \tau p^1$ усилий p^τ и начальному положению трещин $M^1, \dots, M^I$. При помощи равенства (3.1) по решению $H(\tau)$ восстанавливаются удлинения $h_1(\tau), \dots, h_N(\tau)$ трещин как функции параметра нагружения τ . Взаимодействие трещин описывается матрицей A . В диагональной $(N \times N)$ -матрице B фигурируют характеристики начального напряженного состояния вблизи вершин трещин, а правая часть F^I вбирает в себя всю зависимость от процесса нагружения, т.е. от p' .

4. Вариационное неравенство на основе критерия Гриффитса. Согласно критерию Гриффитса, семейство трещин развивается так, что в любой момент τ реализуется минимум полной энергии $U(\tau) + \Pi(\tau)$. Обозначив γ плотность поверхностной энергии, находим соответствующее приращение

$$\Delta \Pi(\tau) = 2\gamma(h_1(\tau) + \dots + h_N(\tau)) \quad (4.1)$$

Примем те же условия нормального разрыва, что и в разд. 3. Заменим в минимизационной задаче приращение потенциальной энергии $\Delta U(\tau)$ его асимптотическим представлением из (2.10). Рассчитывая вариацию полученного функционала относительно аргументов $H_1(\tau), \dots, H_N(\tau)$, приходим к вариационному неравенству (назовем его неравенством, соответствующим "задаче G"), отличающемуся от (3.5) лишь заменой $F^I(\tau)$ на

$$F^G(\tau) = (F_1^G(\tau), \dots, F_N^G(\tau))' \quad (4.2)$$

где

$$F_n^G(\tau) = \frac{2}{K_1^{n0}} \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{2} K_1^{n0} - \tau K_1^{n'} = \frac{1}{2} \left[\frac{K_{1c}^2}{K_1^{n0}} - K_1^{n0} \right] - \tau K_1^{n'} \quad (4.3)$$

$$\alpha K_{1c}^2 = 4\gamma \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) выражает обычную зависимость между прочностными характеристиками K_{1c} и γ .

Подчеркнем, что в равенстве (2.10) фигурировали величины p'' и u'' из (1.1) и (2.2), но они исчезли при вычислении вариации функционала, т.е. модель, отвечающая задаче G, приобрела ту же точность, что и модель (3.5), а нагружение (1.1) можно было считать линейным. Все сказанное в конце разд. 3 в равной мере относится к задаче G. Таким образом, приведенная формулировка энергетического критерия разрушения позволяет находить распределение удлинений трещин как функцию параметра нагружения τ и номера n вершины. Это обстоятельство вместе с результатами [4, 14] о вариации фронта трещин в трехмерных телах опровергает мнение Си и Либовица [16] о недостаточности критерия Гриффитса и невозможности его строгой формулировки. В [16] заключения делались на основе анализа скорости высвобождения

дения энергии, которая возникает естественным образом, но никак не заменяет весь критерий.

5. Сравнение решений задач. Стандартная трактовка результатов исследования вариационных неравенств в задачах I и G приводит к следующим заключениям.

1°. Если задача имеет лишь тривиальное решение $H(\tau) = 0$, то система трещин неподвижна.

2°. Если существует и единственно малое (при $\tau \rightarrow +0$) решение, то семейство трещин развивается квазистатически и устойчиво.

3°. При наличии нескольких малых решений могут наблюдаться бифуркации.

4°. Отсутствие решения или нарушение требования $H(\tau) = o(1)$ при $\tau \rightarrow +0$ хотя бы одним из решений обуславливают лавинообразный рост трещин и требуют учета динамических эффектов.

Установим достаточное условие существования и единственности решения задачи I или задачи G . Ввиду схожести записи обеих задач далее ссылаемся только на вариационное неравенство (3.5), а индексы I и G у столбцов $F^I(\tau)$ и $F^G(\tau)$ не указываем.

Предложение 1. Если матрица $\alpha A + B$ отрицательно определена, то существует и единственное решение $H(\tau)$ задачи (3.5), причем справедлива оценка

$$c|H(\tau)|^2 + \langle F(\tau)_+, H(\tau) \rangle \leq \langle F(\tau)_-, H(\tau) \rangle \leq |F(\tau)_-| \cdot |H(\tau)| \quad (5.1)$$

$$c > 0, \quad F(\tau)_\pm = (F_1(\tau)_\pm, \dots, F_N(\tau)_\pm), \quad F_n(\tau)_\pm = \frac{1}{2}(|F_n(\tau)| \pm F_n(\tau)) \geq 0$$

Доказательство разрешимости подобной (3.5) задачи при сформулированном условии можно найти в любой книге по выпуклому анализу (например, в [15]). Нужная оценка получается, если положить $X = 0$ и заметить, что $F(\tau) = F(\tau)_+ - F(\tau)_-$. В самом деле, имеем

$$c|H(\tau)|^2 \leq \langle -(\alpha A + B)H(\tau), H(\tau) \rangle \leq -\langle F(\tau), H(\tau) \rangle = \langle F(\tau)_-, H(\tau) \rangle - \langle F(\tau)_+, H(\tau) \rangle$$

Остается упомянуть, что компоненты столбцов $H(\tau)$ и $F(\tau)_\pm$ неотрицательны.

Пусть условие $\alpha A + B < 0$ выполнено. Если $F_n(\tau) \geq 0$, то $H(\tau) = 0$ и реализуется ситуация 1°. Поэтому разумно в качестве начала отсчета взять момент $\tau = 0$, для которого хотя бы один из КИН K_1^{n0} совпадает с K_{1c} (согласно определениям (3.6) и (4.4), эта критическая отметка одинакова для обоих критериев). Тогда $F_n(\tau)_- \leq \tau(K_1^{n'})_+$ и в силу (5.1)

$$|H(\tau)| \leq c^{-1} \tau((K_1')_+ + \dots + (K_1^{N'})_+)$$

Итак, трещины подрастают устойчиво и квазистатически, но остаются неподвижными, если все $K_1^{n'}$ отрицательны (изменение нагрузки вызывает уменьшение КИН).

Обратим внимание на эффект, связанный с взаимодействием трещин: страгиваются не только неравновесные ($K_1^{n0} = K_{1c}$, $K_1^{n'} > 0$) трещины, но при увеличении параметра τ в процесс разрушения вовлекаются и те трещины, у которых КИН близок к критическому. При этом в соответствии с оценкой (5.1) равенство $H_n(\tau) = 0$ (неподвижность вершины P^n) можно гарантировать лишь в случае $F_n(\tau)_+ > |F(\tau)_-|$, т.е. когда КИН K_1^{n0} значительно меньше критического.

Поскольку всегда $K_1^{n0} \leq K_{1c}$, из формул (3.6) и (4.4) выводим, что

$$F_n^G(\tau) \geq F_n^I(\tau), \quad n = 1, \dots, N$$

Эти неравенства позволяют сравнить решения $H^G(\tau)$ и $H^I(\tau)$ задачи G и задачи I .

Предложение 2. Пусть $\alpha A + B < 0$ и внедиагональные элементы матрицы A неотрицательны. Тогда решения задачи I и задачи G связаны соотношением

$$H^I(\tau) \geq H^G(\tau) \quad (5.2)$$

Доказательство. Положим $X = H^I + H_+^0$, отвечающем задаче I в неравенстве (3.5) и $X = H^G - H_+^0$ в аналогичном неравенстве для задачи G ; при этом $H^0 = H^G - H^I$ (аргумент τ не пишем). Складывая эти неравенства, получаем

$$\alpha \langle AH^0, H_+^0 \rangle + \langle BH^0, H_+^0 \rangle \geq \langle F^G - F^I, H_+^0 \rangle$$

Так как B – диагональная матрица, имеем

$$\langle BH^0, H_+^0 \rangle = \langle BH_+^0, H_+^0 \rangle$$

Кроме того,

$$\langle AH^0, H_+^0 \rangle = \langle AH_+^0, H_+^0 \rangle - \langle AH_-^0, H_+^0 \rangle$$

причем вычитаемое положительно благодаря свойству внедиагональных элементов у A . Таким образом,

$$0 \geq -c |H_+^0|^2 \geq \langle (\alpha A + B)H_+^0, H_+^0 \rangle - \langle AH_-^0, H_+^0 \rangle \geq \langle F^G - F^I, H_+^0 \rangle \geq 0$$

Отсюда вытекает, что $H_+^0 = (H^G + H^I)_+ = 0$, а значит, искомое неравенство (5.2) установлено.

В условиях предложения 2 модель критерия Ирвина (задача I) предсказывает большее продвижение трещины, чем модель критерия Гриффитса (задача G), причем верна очевидная оценка

$$|H^I(\tau) - H^G(\tau)|^2 \leq C \max\{(K_{lc} - K_n^0)^2 (K_n^0)^{-1} (H_n^I(\tau) - H_n^G(\tau))\}$$

Следовательно, расхождение $H^I(\tau)$ и $H^G(\tau)$ увеличивается при прогнозировании старта трещин со значительными отклонениями КИН K_n^0 от критического. Оба критерия приводят к одинаковому результату в случае, если растущими оказались лишь изначально неравновесные трещины (в первую очередь это касается одиночных трещин, см. [5], § 5).

Предложение 3. Допустим, что $\alpha A + B < 0$ и $H_n^I(\tau) = H_n^G(\tau) = 0$ в случае $K_1^{n0} < K_{lc}$. Тогда $H^I(\tau) = H^G(\tau)$.

Доказательство. Сложим отвечающее задаче I неравенство (3.5), где $X = H^G$, и аналогичное неравенство для задачи G , в котором положим $X = H^I$. Имеем

$$c |H^0|^2 < -\langle (\alpha A + B)H^0, H^0 \rangle \leq \sum_n (F_n^I - F_n^G)(H_n^G - H_n^I)$$

Все члены последней суммы нулевые, поскольку в силу (3.5), (4.2) $F_n^I = F_n^G$ при $K_1^{n0} = K_{lc}$ и по предположению $H_n^G = H_n^I = 0$ при $K_1^{n0} < K_{lc}$. Таким образом, $H^0 = H^G - H^I = 0$.

Как показывает предложение 2, установленная в предложении 3 эквивалентность вариационно-асимптотических моделей критериев Ирвина и Гриффитса выполняется не всегда, хотя равенство (4.4) и фиксирует один и тот же порог равновесности трещин. Рост трещин в условиях взаимодействия может приводить к расхождению решений $H^I(\tau)$ и $H^G(\tau)$ за пределами точности моделей (при выводе вариационных неравенств из асимптотических формул были удалены младшие члены). Поскольку бифуркации весьма чувствительны к возмущениям данных задачи, в ситуации 3° могут получаться качественно различающиеся картины развития трещин.

Очередное утверждение относится к случаю лавинообразного роста трещин, т.е. к ситуации 4°.

Предложение 4. Если матрица $\alpha A + B$ положительно определена и все компоненты правой части $F(\tau)$ отрицательны, то вариационное неравенство (3.5) решений не имеет.

Доказательство. Достаточно заметить, что для обоих критериев вариационное неравенство (3.5) эквивалентно задаче о стационарных точках функционала

$$(\mathbf{R}_+)^N \ni H \mapsto -\langle (\alpha A + B), H \rangle + 2\langle F, H \rangle$$

Очевидно, что в указанных условиях таких точек нет.

6. Примеры. Эффекты, о которых шла речь в предыдущем разделе, прослеживаются даже в простейшей задаче об одиночной внутренней трещине (т.е. $I = 1$ и $N = 2$, а P^1 и P^2 – вершины разреза M^1). Если расстояние d от центра O трещины M^1 до внешнего контура Γ много больше ее длины $a = |P^1 - P^2|$, то можно приближенно вычислить (2×2) -матрицу A , заменив Ω всей плоскостью $\mathbf{R}^2$ и воспользовавшись представлением весовой функцией через потенциалы Колосова – Мусхелишвили (см. [17, § 11.3])

$$A = \frac{1}{4a\alpha} \left[\mathbf{A} + O\left(\frac{a^2}{d^2}\right) \right], \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Оценка остатка в (6.1) получается при помощи общих результатов о задачах в областях с сингулярно возмущенной границей (см. [11, 18], а также [5, 19, 20] для теории упругости). Отметим, что матрица A не является знакоопределенной – ее собственные числа равны 1 и -3 . Предположим, что область $\Omega(0) = \Omega \setminus M^1$ симметрична относительно декартовых осей Ox_1 и Ox_2 . Симметричность нагрузки относительно оси трещины Ox_1 обеспечивает отсутствие сдвиговой моды в напряженном состоянии вблизи вершин P^1 и P^2 . Кроме того, для матрицы A из (6.1) сохраняются соотношения

$$A_{11} = A_{22} < 0, \quad A_{12} = A_{21} > 0 \quad (6.2)$$

Поэтому в дальнейших расчетах устраним малую величину $O([a/d]^2)$ из (6.1) – это не изменит картину роста трещины качественно, а лишь придаст незначительные возмущения пороговым значениям параметров.

Пусть сначала нагрузка p^τ симметрична также и относительно оси Ox_2 , а значит, $K_1^1(\tau) = K_1^2(\tau)$. Поскольку для младших КИН k_1^{10} справедливы аналогичные (2.4) интегральные представления (см. [7], а также [5, 9]), за счет выбора подходящих усилий p^0 и p' можно обеспечить любые значения КИН, в частности

$$K_1^{10} = K_1^{20} = K_{1c}, \quad k_1^{10} = k_1^{20}, \quad K_1^{1'} = K_1^{2'} > 0 \quad (6.3)$$

Задача I или задача G удовлетворяет условиям предложения 1 лишь в случае $2ak_1^{10} < -K_1^{10}$, когда трещина развивается симметрично и квазистатически, а единственное решение принимает вид

$$H_1(\tau) = H_2(\tau) = 4\alpha\tau K_1^{1'} (-K_1^{10} - 2ak_1^{10})^{-1} K_1^{10} \quad (6.4)$$

В (6.4) множитель при K_1^{10} (положительный) совпадает с удлинением трещины в каждой из вершин. При $2ak_1^{10} \geq -K_1^{10}$ решений у задачи (3.5) нет (динамический рост). В самом деле, сначала заметим, что $H(\tau) = 0$ не может быть решением. Если имеет-ся нетривиальное решение, то неравенство (3.5), в котором $X_i = H_i(\tau) + 1$, приводит к

противоречию

$$-(2aK_0^{10})^{-1}(K_1^{10} + 2ak_1^{10})(H_1(\tau) + H_2(\tau)) \geq \tau K_1^{1'} > 0$$

В частности, $2ak_1^{10} > -K_1^{10}$ в случае однородного поля напряжений и именно поэтому энергетический баланс при квазистатическом страгивании трещин невозможен (по поводу неоднородного поля см. [21]). Очевидно, что при $K_1^{1'} < 0$ решения задач I и G тривиальны, т.е. трещина стоит.

В согласии с предложением 3 критерии Ирвина и Гриффитса приводят к одинаковым результатам в случае (6.3). Рассмотрим теперь такое нагружение p^τ , что составляющая p' не обладает симметрией относительно оси Ox_2 и при малом $s > 0$

$$K_1^{10} = K_1^{20}(1+s) = K_{1c}, \quad k_1^{10} = k_1^{20}(1+s), \quad K_1^{1'} = K_1^{2'} \quad (6.5)$$

При условии $2ak_1^{10} < -K_1^{10}$ однозначной разрешимости задачи I и задачи G имеем

$$F_1(\tau) = -\tau K_1^{1'}, \quad F_2 = \delta - \tau K_1^{1'} \quad (\delta = \delta_I \quad \text{или} \quad \delta = \delta_G)$$

$$\delta_I = \frac{s}{1+s} K_{1c}, \quad \delta_G = \left(1 + \frac{s}{2}\right) \frac{s}{1+s} K_{1c}$$

$$H_1(\tau) = \tau c b^{-1}, \quad H_2(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau \leq T \quad (6.6)$$

$$H_1(\tau) = \frac{\tau c}{b-2} - \frac{8a\delta}{b^2-4}, \quad H_2(\tau) = \frac{\tau c}{b-2} - \frac{4a\delta b}{b^2-4} \quad \text{при} \quad \tau \geq T$$

$$b = 1 - 2ak_1^{10}(K_1^{10})^{-1} > 2, \quad c = 4aK_1^{1'}, \quad T = \frac{\delta b}{b+2}(K_1^{1'})^{-1}$$

Итак, в обоих критериях до некоторого момента продвигается только вершина P^1 (в ней $K_1^{10} = K_{1c}$), а затем трещина растет в обе стороны. Скорости смещения вершин одинаковы лишь потому, что по предположению (6.5) $k_1^{10}/K_1^{10} = k_1^{20}/K_1^{20}$. Вместе с тем старт вершины P^2 в рамках модели критерия Гриффитса наступает позднее, чем для модели критерия Ирвина, поскольку в (6.6)

$$T_I = \frac{s}{1+s} \frac{b}{2+b} K_{1c}(K_1^{1'})^{-1}, \quad T_G = \left(1 + \frac{s}{2}\right) T_I$$

Впрочем, ошибка порядка s^2 в определении T выходит за рамки точности используемой модели, поскольку при составлении задач I и G отбрасывались величины $O(\tau^2)$ и $O(h(\tau)^2)$. Увеличение параметров $s > 0$ и $b > 2$ оттягивает момент подключения вершины P^2 к процессу разрушения. Указанные в (6.6) функции непрерывны по параметру τ . Наконец, в критерии Ирвина вершина P^2 начинает движение до того момента, как гипотетический КИН $K_1^{2\tau}$ из (1.2) достиг критического значения K_{1c} . То же самое верно и для критерия Гриффитса, так как число s в (6.5) мало.

В предыдущих примерах наблюдалась альтернатива: задача (3.5) или неразрешима, или имеет единственное решение. Как видно из дальнейшего, бифуркации могут возникнуть, если элементы $A_{12} = A_{21}$ матрицы из (6.1) отрицательны. При помощи представления Папковича – Нойбера и принципа максимума устанавливается, что внедиагональные элементы матрицы A положительны, если семейство трещин расположено на прямой L , но удалено от внешней поверхности $\partial\Omega$ (тем самым обеспечиваются условия предложения 2). То же касается и семейства, содержащего одну или две длинные краевые трещины на L . Таким образом, бифуркации обнаруживаются

разве лишь за счет взаимодействия трещин с остальной частью границы тела. Многочисленные расчеты КИН в подобных ситуациях см. в [22] и др.

Бифуркационные явления подробно исследовались в [1, 23], но здесь ограничимся простейшим примером: примем условия (6.3) и заменим матрицу (6.1) на

$$A = \frac{1}{4a\alpha} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Как и ранее, проверяется, что при $2ak_1^{10} \geq K_1^{10}$ у задачи (3.5) решений нет. В случае $2ak_1^{10} < -3K_1^{10}$ предложение 1 гарантирует единственность решения

$$H_1(\tau) = H_2(\tau) = 4a\tau K_1^{1'} (K_1^{10} - 2ak_1^{10})^{-1} K_1^{10} \quad (6.7)$$

То же симметричное решение (6.7) сохраняется при $2ak_1^{10} < K_1^{10}$, однако для $2ak_1^{10} \in [-3K_1^{10}, -K_1^{10})$ возникают еще два решения, оказывающиеся несимметричными,

$$H_i(\tau) = 4a\tau K_1^{1'} (-K_1^{10} - 2ak_1^{10})^{-1} K_1^{10}, \quad H_{3-i}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2$$

Согласно известным результатам [1, 23], симметричное решение (6.7) неустойчивое.

7. Обобщения – критерий Гриффитса. Откажемся от предположения о малости КИН K_2^{n0} . Помимо столбца $H^{(1)}(\tau)$ с компонентами (3.1) введем столбец $H^{(2)}(\tau) = (H_1^{(2)}(\tau), \dots, H_N^{(2)}(\tau))^t$ с компонентами

$$H_n^{(2)}(\tau) = h_n(\tau) K_2^{n0} \quad (7.1)$$

Никаких ограничений на компоненты (7.1), отвечающие сдвиговой моде, вводить не приходится. Теперь задача о минимизации функционала $\Delta U(\tau) + \Delta \Pi(\tau)$ приводится к такому вариационному неравенству:

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{i,l} \langle A^{(i,l)} H^{(i)}(\tau), H^{(l)}(\tau) - X^{(l)} \rangle + \langle B^{(1)} H^{(1)}(\tau), H^{(1)}(\tau) - X^{(1)} \rangle \geq \\ & \geq \langle F^{(1)}(\tau), H^{(1)}(\tau) - X^{(1)} \rangle + \langle F^{(2)}(\tau), H^{(2)}(\tau) - X^{(2)} \rangle \\ & \forall X^{(1)} \in (\mathbf{R}_+)^N, \quad X^{(2)} \in \mathbf{R}^N \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь $A^{(i,l)}$ – $(N \times N)$ -матрицы с элементами A_{nm}^{il} из (2.3), а компоненты N -столбцов $F^{(1)}(\tau)$, $F^{(2)}(\tau)$ и элементы диагональной матрицы $B^{(1)}$ имеют вид

$$F_n^{(1)}(\tau) = (K_1^{n0})^{-1} \{K_{1c}^2 - (K_2^{n0})^2\} - K_1^{n0} - \tau K_1^{n'}, \quad F_n^{(2)}(\tau) = -\tau K_2^{n'}$$

$$B_n^{(1)} = (2K_1^{n0})^{-1} \{k_1^{n0} + k_2^{n0} K_2^{n0} (K_1^{n0})^{-1}\}$$

Для сформулированной задачи можно доказать утверждение, аналогичное предложению 1. Однако истолкование решения $H^{(1)}(\tau)$, $H^{(2)}(\tau)$ не столь очевидно, как в случае задачи G . Разумеется, в соответствии с (3.1) удлинения $h_1(\tau), \dots, h_N(\tau)$ восстанавливаются по первому столбцу $H^{(1)}(\tau)$. Вместе с тем найденные значения $h_n(\tau)$ могут вступить в противоречие с формулой (7.1), поскольку все входящие в нее величины уже вычислены. По всей видимости, обнаруженное несоответствие вызвано предположением о прямолинейном росте трещин – наличие сдвиговой составляющей должно вызывать искривление траекторий, но вопрос о возможности определить их форму по решению $H^{(1)}(\tau)$, $H^{(2)}(\tau)$ остается открытым (упомянем имеющие отношение к нему статьи [24–27]). Впрочем, переход к рассмотрению изогнутых трещин может

изменить существо вариационного неравенства за счет присоединения новых неизвестных.

8. Обобщения – критерий Ирвина. Для построения вариационного неравенства (3.5) использовалась двучленная асимптотика (2.8). Можно уточнить формулировку критерия разрушения, опираясь на более полные асимптотические представления КИН. Так, например, в условиях разд. 3 выводится трехчленная асимптотика (см. [4] и [5, §§ 3, 5])

$$K_1^n(\tau) = K_1^{n0} + \tau K_1^{n'} + \tau^2 K_1^{n''} + \frac{1}{2} h_n(\tau) k_1^{n0} + \alpha \sum_m A_{nm} H_m(\tau) + K_n(H; \tau) + O(\tau^3 + h(\tau)^3) \quad (8.1)$$

$$K_n(H; \tau) = \alpha \sum_m A_{nm} h_m(\tau) \left\{ \tau K^{m'} + \alpha \sum_q A_{mq} H_q(\tau) + \frac{1}{4} h_m(\tau) k_1^{m0} \right\} + \frac{1}{2} h_n(\tau) \left(\tau k_1^{n'} + \frac{3}{4} h_n(\tau) k_1^{n0} \right) + \frac{\alpha}{2} \sum_m (h_n(\tau) D_{nm} + D_{mn} h_m(\tau)) H_m(\tau) \quad (8.2)$$

Здесь суммирование по q ведется от 1 до N , k_1^{n0} – коэффициент при сингулярной составляющей $r_n^{5/2} \Phi^{5,1}(\varphi^n)$ в разложении вида (2.1) решения u^0 (формула для $\Phi^{5,1}$ указана в [5, § 1]), D_{nm} – множители при $r_m^{3/2} \Phi^{3,1}(\varphi^m)$ в уточненных разложениях (2.3) весовой функции ζ^{n1} , а в представлении нелинейного оператора (8.2) подразумевается замена $h_n(\tau)$ на $H_n(\tau)$ согласно формуле (3.1). Действуя так же, как в разд. 3, при помощи асимптотики (8.1) преобразуем соотношения (3.2), (3.3) в задачу с односторонними связями

$$\langle (\alpha A + B)H(\tau), H(\tau) - X \rangle + \langle K(H; \tau), H(\tau) - X \rangle \geq \langle F(\tau), H(\tau) - X \rangle, \quad \forall x \in (\mathbf{R}_+)^N \quad (8.3)$$

$$F(\tau) = K_{lc} - K_1^{n0} - \tau K_1^{n'} - \tau^2 K_1^{n''}$$

В (8.3) задействованы слагаемые $\tau^2 K_1^{n''}$ и $\tau k_1^{n'}$ из (1.2) и (2.2), не востребованные ранее в (3.5).

Использование усложненных асимптотических формул позволяет ожидать, что задача (8.3) будет описывать развитие семейства трещин на большем промежутке значений параметра τ , чем задача I. Вместе с тем присутствие в (8.3) коэффициентов k_1^{n0} , D_{nm} и нелинейного оператора $K = (K_1, \dots, K_N)'$ затрудняет как подготовку данных, так и решение самой задачи. Поэтому весьма вероятно, что более экономичным, но обеспечивающим ту же точность подходом оказывается пошаговое решение вариационного неравенства (3.5) с пересчетом начальных данных.

Подобная (8.3) уточненная формулировка критерия Гриффитса требует построения очередных членов асимптотики (2.10) потенциальной энергии деформации. Они весьма громоздки и здесь не выписываются. Исследование возникающих вариационных неравенств проводится по прежней схеме.

Автор благодарит Н.Ф. Морозова и И.И. Аргатова за обсуждение статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00974).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L.M.* Unstable growth of tension cracks in brittle solids: stable and unstable bifurcation, snap-through and imperfection sensitivity // Intern. J. Solids and Structures. 1980. V. 16. № 11. P. 1017–1033.
2. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
3. *Nguyen Quoc Son.* Stabilité et bifurcation en rupture et en plasticité // C.r. Acad. sci. Paris. Sér. 2. 1981. T. 292. № 11. P. 817–820.
4. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 101–113.
5. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Тр. моск. мат. о-ва. 1996. Т. 57. С. 16–75.
6. *Bueckner H.F.* A novel principle for the computation of stress intensity factors // ZAMM. 1970. V. 50. № 9. P. 529–546.
7. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. В. 76. S. 29–60.
8. *Назаров С.А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.
9. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 524 p.
10. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964. = *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
11. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
12. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычисл. механика деформируемого твердого тела. 1990. № 1. С. 17–31.
13. *Назаров С.А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 489–502.
14. *Kolton L.H., Nazarov S.A.* Quasistatic propagation of a mode-I crack in an elastic space // C.r. Acad. sci. Paris. Sér. 2. 1992. T. 315. № 12. P. 1453–1457.
15. *Lions J.-L.* Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires. Paris: Dunod, 1969. = *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
16. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. / Под ред. Либовица Г. М.: Мир, 1975. С. 83–204 (Fracture / Ed. Libowitz H. N.Y.; L.: Acad. Press, 1968).
17. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
18. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. В. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. 432 S.
19. *Назаров С.А., Шнековиус-Нойгебауер М.* Аппроксимация неограниченных областей ограниченными. Краевые задачи для оператора Ламе // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 5. С. 229–268.
20. *Назаров С.А., Шнековиус-Нойгебауер М.* О погрешностях при аппроксимации неограниченных упругих тел ограниченными // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 650–663.
21. *Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Возникновение трещины Гриффитса в неоднородном поле напряжений // Физ.-хим. механика материалов. 1990. № 1. С. 26–31.
22. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2).
23. *Колтон Л.Г.* Медленный рост системы трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 95–100.
24. *Банничук Н.В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.
25. *Гольдштейн Р.В., Салганик Р.Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 69–82.

26. *Melin S.* Fracture from a straight crack subjected to mixed mode loading // *Inter. J. Fracture*. 1987. V. 32. № 4. P. 257–263.
27. *Мовчан А.Б., Назаров С.А., Полякова О.Р.* Приращение коэффициентов интенсивности напряжений при удлинении криволинейной трещины // *Изв. РАН. МТТ*. 1992. № 1. С. 84–93.

Санкт-Петербург
serna@snark.ipme.ru

Поступила в редакцию
9.II.1999