

УДК 539.375

© 2000 г. В.М. Александров, Д.А. Пожарский

К ЗАДАЧЕ О КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕЩИНЕ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СЛОЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Исследуется осесимметричная задача о кольцевой трещине, возникающей на границе раздела упругого слоя, сцепленного с упругим полупространством из другого материала, когда к поверхности такого двухслойного тела приложена нормальная нагрузка, распределенная по круговой области. Для решения системы интегральных уравнений относительно скачков компонент вектора перемещений в зоне трещины применяется регулярный асимптотический метод [1], эффективный для достаточно узкого кольца трещины. После решения указанной системы уравнений для определения истинных размеров трещины предлагается использовать интегральный критерий разрушения типа критерия В.В. Новожилова [2].

Ранее изучались задачи о круговых дефектах типа трещины или включения в плоскости смены упругих свойств материалов [3, 4], а также аналогичные плоские задачи, например [5].

1. Постановка задачи и сведение ее к системе двух интегральных уравнений. Рассмотрим упругое тело, состоящее из слоя толщины h с упругими характеристиками G_1 (модуль сдвига) и ν_1 (коэффициент Пуассона), сцепленного с полупространством с характеристиками G_2 и ν_2 . В условиях осевой симметрии используем цилиндрические координаты r, φ, z . Пусть к границе слоя $z = h$ приложена нормальная нагрузка интенсивности $q(r)$, распределенная по кругу радиуса c . Вне этого круга поверхность тела предполагается не нагруженной. Предположим, что под действием приложенной нормальной нагрузки в плоскости смены упругих свойств $z = 0$ в силу недостаточной адгезионной прочности между слоем (покрытием) и полупространством (подложкой) образуется кольцевая трещина $a \leq r \leq b$ (заметим, что круговая трещина могла бы образоваться при действии кольцевой нагрузки). На трещине терпят разрыв нормальные и радиальные перемещения. Предполагая сперва известными величины a и b , получим систему интегральных уравнений относительно скачков перемещений на трещине.

Граничные условия задачи запишем в форме (верхний индекс 1 соответствует слою, верхний индекс 2 – полупространству)

$$\begin{aligned} z = h: \quad \sigma_z^{(1)} &= -q(r) (r \leq c), \quad \sigma_z^{(1)} = 0 (r > c); \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0 \\ z = 0: \quad u_r^{(1)} - u_r^{(2)} &= u(r) (r \in (a, b)); \quad u_z^{(1)} - u_z^{(2)} = w(r) (r \in (a, b)) \\ u_r^{(1)} &= u_r^{(2)} (r \notin (a, b)); \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} (r \notin (a, b)) \\ \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(2)}; \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}; \quad \sigma_z^{(1)} = \tau_{rz}^{(1)} = 0 (r \in (a, b)) \end{aligned} \quad (1)$$

Кроме того, при $z \rightarrow -\infty$ перемещения и напряжения исчезают. Для решения краевой задачи (1.1) используем четыре функции Папковича–Нейбера $\Phi_n^m(r, z)$ ($n, m = 1, 2$): по

две для слоя (верхний индекс 1) и полупространства (верхний индекс 2). Перемещения и напряжения выражаются через эти функции по формулам (59.3) [6].

Полагая ($J_n(r)$ – цилиндрическая функция Бесселя)

$$\begin{aligned}\Phi_1^1(r, z) &= \int_0^\infty [A \operatorname{sh} \lambda z + B \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \\ \Phi_1^2(r, z) &= \int_0^\infty [C \operatorname{sh} \lambda z + D \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \\ \Phi_2^1(r, z) &= \int_0^\infty E e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad \Phi_2^2(r, z) = \int_0^\infty F e^{\lambda z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda\end{aligned}\quad (1.2)$$

на основании условий (1.1) (кроме последних двух равенств) для шести неизвестных функций параметра λ – A, B, C, D, E, F – получим следующую систему шести линейных алгебраических уравнений ($u = \lambda h$):

$$\begin{aligned}2(1 - \nu_1)(C \operatorname{ch} u + D \operatorname{sh} u) - A \operatorname{sh} u - B \operatorname{ch} u - u(C \operatorname{sh} u + D \operatorname{ch} u) &= -Q \\ (1 - 2\nu_1)(C \operatorname{sh} u + D \operatorname{ch} u) - A \operatorname{ch} u - B \operatorname{sh} u - u(C \operatorname{ch} u + D \operatorname{sh} u) &= 0 \\ B = E + U, \quad (3 - 4\nu_1)D - A = (3 - 4\nu_2)F - E + W \\ G_1[2(1 - \nu_1)C - B] = G_2[2(1 - \nu_2)F - E] \\ G_1[(1 - 2\nu_1)D - A] = G_2[(1 - 2\nu_2)F - E]\end{aligned}\quad (1.3)$$

где на основании преобразования Ганкеля имеем

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{2G_1\lambda_0} \int_0^a q(\rho) J_0(\lambda \rho) \rho d\rho \\ U &= \int_a^b u(\rho) J_1(\lambda \rho) \rho d\rho, \quad W = \int_a^b w(\rho) J_0(\lambda \rho) \rho d\rho\end{aligned}\quad (1.4)$$

Определитель системы (1.3) – известная функция [7], равная (с точностью до несущественного множителя)

$$\begin{aligned}\Delta(u) &= M - (1 + 4u^2 + LM)e^{-2u} + Le^{-4u} \\ L &= \frac{G_1\kappa_2 - G_2\kappa_1}{G_1\kappa_2 + G_2}, \quad M = \frac{G_1 + G_2\kappa_1}{G_1 - G_2}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (1.5)$$

В каждом конкретном случае значений постоянных M, L непосредственно проверяется, что функция $\Delta(u) \neq 0$ при $u \geq 0$. После решения системы (1.3), удовлетворив оставшимся двум условиям (1.1), получим систему интегральных уравнений относительно функций $u(r), w(r)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b u(\rho) K_{2-l,1}^{2,l}(r, \rho) \rho d\rho + \int_a^b w(\rho) K_{2-l,0}^{2,l+1}(r, \rho) \rho d\rho &= (-1)^l \frac{h(1 - \nu_1)}{G_1} F_{2-l,0}^{1,l}(r) \\ (a \leq r \leq b, \quad l = 1, 2)\end{aligned}\quad (1.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}K_{mn}^{kl}(r, \rho) &= \int_0^\infty J_m\left(\frac{ur}{h}\right) J_n\left(\frac{u\rho}{h}\right) \frac{u^k}{\Delta(u)} K_l(u) du \\ K_s(u) &= A_0 + [A_1 + (2 - s)A_2u + 2A_1u^2]e^{-2u} - (A_0 + A_1)e^{-4u}, \quad s = 1, 3\end{aligned}$$

$$K_2(u) = B_0 + (B_1 + B_2 u^2) e^{-2u} + B_0 e^{-4u}$$

$$A_0 = \frac{1 + M(L-2)}{2}, \quad A_1 = M - L, \quad A_2 = 2(L-1)(M-1) \quad (1.7)$$

$$B_0 = \frac{LM-1}{2}, \quad B_1 = 1 - \frac{L^2 + M^2}{2}, \quad B_2 = 4 - 2(L+M)$$

$$F_{mn}^{kl}(r) = \int_0^c q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty J_m\left(\frac{ur}{h}\right) J_n\left(\frac{u\rho}{h}\right) \frac{u^k}{\Delta(u)} f_l(u) du$$

$$f_l(u) = [2(l-1)M - (-1)^l LM - 1 + 2(M-1)u] e^{-u} + \\ + (-1)^l [2(l-1)L - (-1)^l LM - 1 - 2(L-1)u] e^{-3u}$$

2. Асимптотическое решение для случая относительно узкой кольцевой трещины.
При учете формул [8]

$$\int_0^r J_0\left(\frac{ur}{h}\right) r dr = \frac{hr}{u} J_1\left(\frac{ur}{h}\right), \quad \int_0^r J_1\left(\frac{ur}{h}\right) dr = \frac{h}{u} \left[1 - J_0\left(\frac{ur}{h}\right) \right] \quad (2.1)$$

и того, что $u(a) = u(b) = w(a) = w(b) = 0$, проинтегрируем по частям по переменной ρ левые части системы (1.6) и применим оператор $\int_0^r \dots dr$ к уравнению (1.6) при $l = 1$ и оператор $-\frac{1}{r} \int_0^r \dots r dr$ при $l = 2$.

Далее ограничимся важным частным случаем $q(r) = q = \text{const}$ и введем безразмерные обозначения по формулам (E_1, E_2 – неизвестные пока постоянные интегрирования)

$$\lambda = 2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1}, \quad \mu = \frac{h}{a}, \quad c_* = \frac{c}{h}, \quad q_* = \frac{qc\lambda}{\theta_1 a}, \quad E_1^* = \frac{E_1 \lambda}{q_* \mu a^2}, \quad E_2^* = \frac{E_2 \lambda}{q_* \mu a^3} \quad (2.2)$$

$$x = \lambda \ln \frac{r}{a} - 1, \quad \xi = \lambda \ln \frac{\rho}{a} - 1, \quad \varphi_1(x) = \frac{[u(r)r]' r^{1/2}}{q_* a^{3/2}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{w'(r)r^{3/2}}{q_* a^{3/2}}$$

После преобразований получим систему уравнений ($|x| \leq 1$)

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) K_{l-1,0}^l(x, \xi) d\xi - \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) K_{l-1,1}^{l+1}(x, \xi) d\xi = \\ = (-1)^{l-1} \pi \left\{ F_{l-1}^l(x) + \mu E_l^* \exp \left[(-1)^{l-1} \frac{1+x}{2\lambda} \right] \right\} \quad (2.3)$$

ядра и функции в правой части которой имеют вид

$$K_{mn}^k(x, \xi) = \pi \exp \frac{2+x+\xi}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{K_k(u)}{\Delta(u)} J_m\left(\frac{u}{\mu} \exp \frac{1+x}{\lambda}\right) J_n\left(\frac{u}{\mu} \exp \frac{1+\xi}{\lambda}\right) du \quad (2.4)$$

$$F_m^l(x) = -\mu \exp \frac{1+x}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{f_l(u)}{u \Delta(u)} J_m\left(\frac{u}{\mu} \exp \frac{1+x}{\lambda}\right) J_1(uc_*) du$$

Для решения системы (2.3), (2.4) применим асимптотический метод "больших λ " [1], эффективный для достаточно узкого кольца трещины и относительно толстого упру-

гого слоя ($h > b$). Выделяя в символах ядер (2.4) главные при $u \rightarrow \infty$ части по формулам

$$\frac{K_s(u)}{\Delta(u)} = \frac{A_0}{M} + L_s(u), \quad s = 1, 3; \quad \frac{K_2(u)}{\Delta(u)} = \frac{B_0}{M} + L_2(u) \quad (2.5)$$

представим функции $K_{mn}^k(x, \xi)$ вида (2.4) в форме комбинации рядов по степеням параметра λ^{-1} . Разложения, отвечающие первому слагаемому в правой части первой формулы (2.5), получаются при помощи разложений для функций $l(t)$ ([9], с. 17–19) и $l_1(t)$ ([9], с. 99) и сходятся при $\lambda > 2/\pi$. Разложение, соответствующее первому слагаемому в правой части второй формулы (2.5), находится с использованием интеграла [8]

$$\int_0^\infty J_0(ur)J_1(u\rho)du = \begin{cases} \rho^{-1}, & \rho > r \\ 0, & \rho < r \end{cases}$$

и сходится при любых λ . Можно показать, что разложения в ряды Маклорена, содержащие функции $L_k(u) \sim \exp(-2u)$ ($u \rightarrow \infty$) ($k = 1, 2, 3$), сходятся при $\mu > 1$, $\lambda > 2/\ln \mu$, т.е. при $h > b$.

Пару функций $\varphi_l(x)$ ($l = 1, 2$) будем искать в форме

$$\varphi_l(x) = \sum_{m,n=0}^\infty \lambda^{-m} \ln^n \lambda \varphi_l^{mn}(x) \quad (2.6)$$

В силу приведенных выше оценок ряды (2.6), как можно показать [9–11], по крайней мере являются асимптотическими внутри области $\Omega = \{\mu > 1, \lambda > \max(2/\pi, 2/\ln \mu)\}$ на плоскости μ, λ .

Внося в уравнения (2.3) разложения ядер $K_{mn}^k(x, \xi)$ и представление (2.6), раскладывая правые части уравнений (2.3) по степеням λ^{-1} и приравнивая члены при одинаковых множителях $\lambda^{-m} \ln^n \lambda$, получим цепочку последовательно решаемых систем уравнений

$$\begin{aligned} \int_{-1}^l \varphi_l^{mn}(\xi) \left[-\ln \left| \frac{\xi - x}{\lambda} \right| + a_{00}^{(l)} \right] d\xi + (-1)^l \frac{\pi}{2} \varepsilon \int_{-1}^1 \varphi_{3-l}^{mn}(\xi) \operatorname{sgn} \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = \\ = \pi f_l^{mn}(x) + \frac{\pi}{2} \varepsilon c_{00} P_{3-l}^{mn} \quad (|x| \leq 1, \quad l = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{B_0}{A_0}, \quad P_l^{mn} = \int_{-1}^1 \varphi_l^{mn}(x) dx \\ a_{00}^{(l)} = 2(2-l) + 0,07944 + \frac{\pi M}{\mu A_0} \int_0^\infty L_{2l-1}(u) J_{l-1}^2 \left(\frac{u}{\mu} \right) du \\ c_{00} = 1 + \frac{2M}{\mu B_0} \int_0^\infty L_2(u) J_0 \left(\frac{u}{\mu} \right) J_1 \left(\frac{u}{\mu} \right) du \end{aligned}$$

а функции $f_l^{mn}(x)$ ($m + n \geq 1$) зависят от функций $\varphi_l^{jk}(x)$ ($l = 1, 2$), определенных из предыдущих систем (постоянные E_1^*, E_2^* входят в них линейным образом).

Вещественные интегральные уравнения (2.7) можно представить в виде одного комплексного уравнения ($|x| \leq 1$)

$$\int_{-1}^1 \varphi^{mn}(\xi) \left[-\ln |\xi - x| - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th}(\pi A) \operatorname{sgn}(\xi - x) \right] d\xi = \pi f^{mn}(x) + Q^{mn} \quad (2.8)$$

$$Q^{mn} = -(\ln \lambda + a_{00}^{(1)})P_1^{mn} + \frac{1}{2}\pi\epsilon c_{00}P_2^{mn} + i[\frac{1}{2}\pi\epsilon c_{00}P_1^{mn} - (\ln \lambda + a_{00}^{(2)})P_2^{mn}]$$

$$\varphi^{mn}(x) = \varphi_1^{mn}(x) + i\varphi_2^{mn}(x), \quad f^{mn}(x) = f_1^{mn}(x) + if_2^{mn}(x), \quad A = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$$

Можно доказать, что если коэффициенты Пуассона упругих тел $\nu_n \in (0, \frac{1}{2}]$ ($n = 1, 2$), то постоянная $\epsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Дифференцируя обе части уравнения (2.8) по x , будем иметь интегральное уравнение ($|x| \leq 1$)

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi^{mn}(\xi)}{\xi - x} d\xi + i\pi \operatorname{th}(\pi A) \varphi^{mn}(x) = \pi [f^{mn}(x)]' \quad (2.9)$$

решение которого известно в замкнутом виде [1, 12]

$$\varphi^{mn}(x) = \frac{\operatorname{ch}(\pi A)}{\pi S(x)} \left[P^{mn} - \operatorname{ch}(\pi A) \int_{-1}^1 \frac{[f^{mn}(\xi)]' S(\xi)}{\xi - x} d\xi \right] + \frac{i}{2} \operatorname{sh}(2\pi A) [f^{mn}(x)]' \quad (2.10)$$

$$S(x) = (1+x)^{1/2+iA} (1-x)^{1/2-iA}, \quad P^{mn} = P_1^{mn} + iP_2^{mn}$$

Для определения комплексной постоянной P^{mn} умножим обе части уравнения (2.8) на $S_1(x) = (1+x)^{1/2-iA} (1-x)^{1/2+iA}$ и проинтегрируем по x в пределах от -1 до 1 . Используя соотношения (1.23), (1.24) [1], получим линейное уравнение

$$BP^{mn} - Q^{mn} = \operatorname{ch}(\pi A) \int_{-1}^1 \frac{f^{mn}(x)}{S_1(x)} dx \quad (2.11)$$

$$B = -\ln 2 - C - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2} + iA) - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2} - iA)$$

Здесь $\psi(x)$ – пси-функция, C – постоянная Эйлера. Отделяя в (2.11) вещественную и мнимую части, найдем, что определитель системы уравнений относительно P_1^{mn}, P_2^{mn} равен

$$D = (\ln \lambda + a_{00}^{(1)} + B)(\ln \lambda + a_{00}^{(2)} + B) - \frac{1}{4}(\pi\epsilon c_{00})^2 \quad (2.12)$$

Задача исследования нулей этого определителя на плоскости μ, λ сводится к решению квадратного уравнения относительно $\ln \lambda$. Численный анализ, проведенный для различных пар упругих материалов, показывает, что в реальных ситуациях корни уравнения $D = 0$ лежат вне области Ω .

Отметим, что ряд интегралов, в том числе сингулярных, содержащих функции $S(x)$, $S_1(x)$ и встречающихся в формулах (2.10), (2.11), вычисляются по формулам (1.6), (1.7) [13]. В частности ($|\xi| \leq 1$),

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{S(x)} = -i \frac{2\pi A}{\operatorname{ch}(\pi A)}, \quad \int_{-1}^1 \frac{S(x) dx}{x - \xi} = -i\pi \operatorname{th}(\pi A) S(\xi) - \frac{\pi(\xi + i2A)}{\operatorname{ch}(\pi A)} \quad (2.13)$$

Приведем ниже несколько первых членов разложений (2.6). В нулевом приближении

$$f_l^{00}(x) = f_l^{00} + E_l^*, \quad f_l^{00} = -\frac{M}{A_0} \int_0^\infty \frac{f_l(u)}{u\Delta(u)} J_{l-1}\left(\frac{u}{\mu}\right) J_1(uc_*) du$$

$$\varphi^{00}(x) = \frac{\operatorname{ch}(\pi A)}{\pi S(x)} P^{00} \quad (2.14)$$

$$P_l^{00} = \frac{\pi}{D} [(\ln \lambda + a_{00}^{(3-l)} + B)(f_l^{00} + E_l^*) + \frac{1}{2}\pi\epsilon c_{00}(f_{3-l}^{00} + E_{3-l}^*)]$$

Случай	Сталь на латуни			Латунь на стали		
μ	2	3	4	2	3	4
a_{00}^1	1,500	1,655	1,748	1,397	1,579	1,688
$a_{00}^2 \times 10^5$	-6107	3013	5724	-1168	907	4750
c_{00}	-3,525	-1,262	-0,3324	2,375	1,841	1,531
$a_{10}^1 \times 10^5$	-6433	-5601	-4712	-7611	-6558	-5534
$a_{10}^2 \times 10^5$	5433	2127	999	7351	2995	1427
$c_{10}^1 \times 10^5$	2969	2391	1631	-1233	337	457
$c_{10}^2 \times 10^5$	-18370	-9523	-5706	-4803	-3296	-2185
$f_1^{00} \times 10^4$	8418	8885	9052	3521	3801	3901
$f_2^{00} \times 10^4$	3961	2735	2076	2470	1713	1302
$f_1^{10} \times 10^4$	5114	7363	8187	1539	2892	3385
$f_2^{10} \times 10^4$	-10860	-7902	-6101	-6686	-4928	-3818

Для первого приближения

$$\begin{aligned}
f_l^{10}(x) = & -a_{10}^{(l)}(r_l P_l^{00} + 2AP_{3-l}^{00}) - c_{10}^{(3-l)}(r_l P_{3-l}^{00} - 2AP_l^{00}) + \\
& + r_l \frac{1+x}{2} [f_l^{10} + E_l^* + 2(r_l a_{10}^{(l)} P_l^{00} + c_{10}^{(l)} P_{3-l}^{00})] + \varepsilon \int_x^{\eta} \varphi_{3-l}^{00}(\xi) \frac{x-\xi}{2} d\xi \\
a_{10}^{(l)} = & \frac{M}{\mu A_0} \int_0^\infty L_{2l-1}(u) J_{l-1}\left(\frac{u}{\mu}\right) R_l\left(\frac{u}{\mu}\right) du \\
c_{10}^{(l)} = & \frac{M}{\mu A_0} \int_0^\infty L_2(u) J_{2-l}\left(\frac{u}{\mu}\right) R_l\left(\frac{u}{\mu}\right) du \\
f_l^{10} = & -\frac{M}{A_0} \int_0^\infty \frac{2f_l(u)}{u\Delta(u)} J_1(uc_*) R_l\left(\frac{u}{\mu}\right) du \\
r_l = & (-1)^{l-1}, \quad R_l(x) = \frac{1}{2} J_{l-1}(x) - x J_{2-l}(x)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Функция $\varphi^{10}(x)$ находится по формулам (2.10), (2.11), (2.15) с использованием интегралов (2.13). Интегралы с переменным пределом интегрирования в формулах (2.15) следует находить численно.

В таблице даны значения постоянных, входящих в формулы (2.14), (2.15), при $c_* = 1$ и разных μ для двух случаев: сталь на латуни и латунь на стали. Для стали полагали [14] модуль Юнга $E \times 10^{-4} = 200$ кг/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$ (модуль сдвига $G = E/[2(1 + \nu)]$); для латуни $E \times 10^{-4} = 90$ кг/см², $\nu = 0,35$.

Искомые функции $u(r)$, $w(r)$ выражаются через функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, согласно соотношениям (2.2), по формулам

$$\begin{aligned}
u(r) = & \frac{1}{r} \int_a^r [u(\rho)\rho]' d\rho = \frac{qca}{\theta_1 r} I_1(r), \quad w(r) = \int_a^r w'(\rho) d\rho = \frac{qc}{\theta_1} I_2(r) \\
I_l(r) = & \int_{-1}^{\lambda \ln(r/a)-1} \varphi_l(x) \exp\left(r_l \frac{1+x}{2\lambda}\right) dx
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ограничившись в рядах (2.6) конечным числом членов в соответствии с требуемой точностью, определим, наконец, постоянные E_1^*, E_2^* из условий $u(b) = w(b) = 0$ (условия $u(a) = w(a) = 0$ на основании формул (2.16) уже выполнены). Из формул (2.16) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно E_1^*, E_2^*

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(x) \exp\left(r_l \frac{1+x}{2\lambda}\right) dx = 0, \quad l = 1, 2 \quad (2.17)$$

Осцилляции функций $\varphi_l(x)$ ($l = 1, 2$) в окрестности точек $x = \pm 1$ (см. (2.10)) приводят к осцилляциям функций $u(r)$, $w(r)$ в окрестности контуров $r = a + 0$ и $r = b - 0$, а также осцилляции напряжений σ_z , τ_{rz} в окрестности контуров $r = a - 0$ и $r = b + 0$.

3. Условия для определения размеров кольцевой трещины. После решения системы интегральных уравнений (1.6) и построения асимптотики напряжений в слое и полупространстве по r в окрестности контуров $r = a - 0$ и $r = b + 0$ вопрос об определении внутреннего радиуса a и внешнего радиуса b кольцевой трещины в зависимости от нагрузки $q(r)$ может быть решен следующим образом.

Допустим, что зоны осцилляции напряжений σ_z и τ_{rz} , как и зоны осцилляции перемещений $u(r)$ и $w(r)$, относительно малы, т.е. максимальная ширина зон осцилляции $\delta_0 \ll b - a$. Это, например, должно иметь место, когда подложка (полупространство) значительно жестче покрытия (слоя) или наоборот (см. оценку ширины зон осцилляции в § 114а [15]).

Заметим, что между слоем (покрытием) и полупространством (подложкой) всегда существует переходная зона [16] – переходный слой толщины $\delta \ll h$ (обычно несколько микрон), более хрупкий, чем основные материалы, с упругими характеристиками G_3 и ν_3 ($E_3 = 2G_3(1 + \nu_3)$), получаемыми некоторым осреднением G_1, G_2 и ν_1, ν_2 . Пусть также $\delta > \delta_0$.

Поскольку трещина образовалась на границе $z = 0$ из-за недостаточной прочности указанного переходного слоя, то весьма вероятно, что при увеличении нагрузки $q(r)$ она будет и далее распространяться в плоскости наименьшего сопротивления $z = 0$. В силу этого для определения величин a и b можно, например, использовать следующие дополнительные условия при $z = 0$:

$$\frac{1}{\delta} \int_{a-\delta}^a U dr = A_*, \quad \frac{1}{\delta} \int_b^{b+\delta} U dr = A_* \quad (3.1)$$

являющиеся некоторым аналогом интегрального критерия разрушения В.В. Новожилова [2]. Здесь U – упругая энергия единицы объема переходного слоя, а именно

$$U = \frac{1}{2E_3} [\sigma_r^{*2} + \sigma_\varphi^{*2} + \sigma_z^2 - 2\nu_3(\sigma_r^* \sigma_\varphi^* + \sigma_r^* \sigma_z + \sigma_\varphi^* \sigma_z)] + \frac{1}{2G_3} \tau_{rz}^2$$

$$\sigma_r^* = \frac{1}{2}(\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)}), \quad \sigma_\varphi^* = \frac{1}{2}(\sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(2)}) \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^{(1)} + \tau_{rz}^{(2)}$$

A_* – экспериментально определяемая физическая постоянная пары материалов (критическая величина упругой энергии единицы объема переходного слоя). Конкретное использование критерия (3.1) пока затруднено ввиду отсутствия необходимого экспериментального материала.

Авторы благодарят Н.А. Воронина, С.Е. Михайлова и Н.Ф. Морозова за консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (95-IN-RU-492) и Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения / ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
2. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
3. Моссаковский В.И., Беркович П.Е., Рыбка В.М. Смешанная осесимметричная задача теории упругости для кусочно-однородного пространства с круговой щелью в плоскости соединения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. № 9. С. 812–816.
4. Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 42–58.
5. Александров В.М., Сумбатян М.А. Периодическая система трещин на границе контакта двух упругих полуплоскостей // Труды 3-й Междунар. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону: МП "Книга", 1997. Т. 1. С. 26–29.
6. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
7. Александрова Г.П. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
9. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
10. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
11. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
13. Соловьев А.С. Об одном интегральном уравнении и его приложениях к контактным задачам теории упругости с учетом сил трения и сцепления // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 1042–1050.
14. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1988. 254 с.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Гнесин Г.Г., Фоменко С.Н. Износостойкие покрытия на инструментальных материалах // Порошковая металлургия. 1996. № 9/10. С. 17–28.

Москва, Ростов-на-Дону
e-mail: alexand @ ipmnet. ru

Поступила в редакцию
16.III.1999