

УДК 539.375

Я. Соколовский, А.М. Хлуднев

О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ПО ДЛИНЕ ТРЕЩИНЫ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В ограниченной двумерной или трехмерной области, содержащей разрез (трещину), рассматривается задача о равновесии линейного упругого тела. Краевые условия на берегах трещины имеют вид неравенств и описывают условие взаимного непроникания берегов. Длина трещины может меняться. Найдена производная функционала энергии по длине трещины и установлена формула Гриффитса. В двумерном случае построен интеграл Эшелби–Черепанова–Райса по кривой, окружающей вершину трещины, и показано, что он не зависит от пути интегрирования. Для трехмерного случая построен аналог интеграла Эшелби–Черепанова–Райса.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейно-упругое тело, занимающее в недеформированном состоянии область $D \subset R^p$ ($p = 2, 3$) и содержащее трещину. Трещина моделируется разрезом (при $p = 2$) и поверхностью (при $p = 3$)

$$\Xi_{l+\delta} = \{(x_i) \mid x_p = 0, \quad 0 < x_1 < l + \delta, \quad p = 3 : -h < x_2 < h\}$$

где $h > 0$, $l > 0$, δ – малый параметр; индекс i (а ниже и индекс j) принимает значения 1, 2 при $p = 2$ и 1, 2, 3 при $p = 3$ (фиг. 1). Предположим, что $\Xi_{l+\delta} \subset D$ для всех достаточно малых δ и обозначим $\Omega_\delta = D \setminus \Xi_{l+\delta}$, $\Omega = D \setminus \Xi_l$.

Задача о равновесии упругого тела, содержащего трещину, формулируется следующим образом: требуется найти вектор-функцию $W = (w^i)$, такую, что

$$-\sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{в } \Omega; \quad f = (f_1, f_2) \in C^1(\bar{D}) \quad (1.1)$$

$$W = 0 \quad \text{на } \Gamma; \quad [W]n \geq 0 \quad \text{на } \Xi_l \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$ – компоненты тензора напряжений, f_i – компоненты вектора внешних нагрузок, $[W] = W^+ - W^-$ – скачок вектора W на Ξ_l . Индексы плюс и минус соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали n к прямой ($p = 2$) или к поверхности ($p = 3$) $\Xi_{l+\delta}$. По повторяющимся индексам производится суммирование.

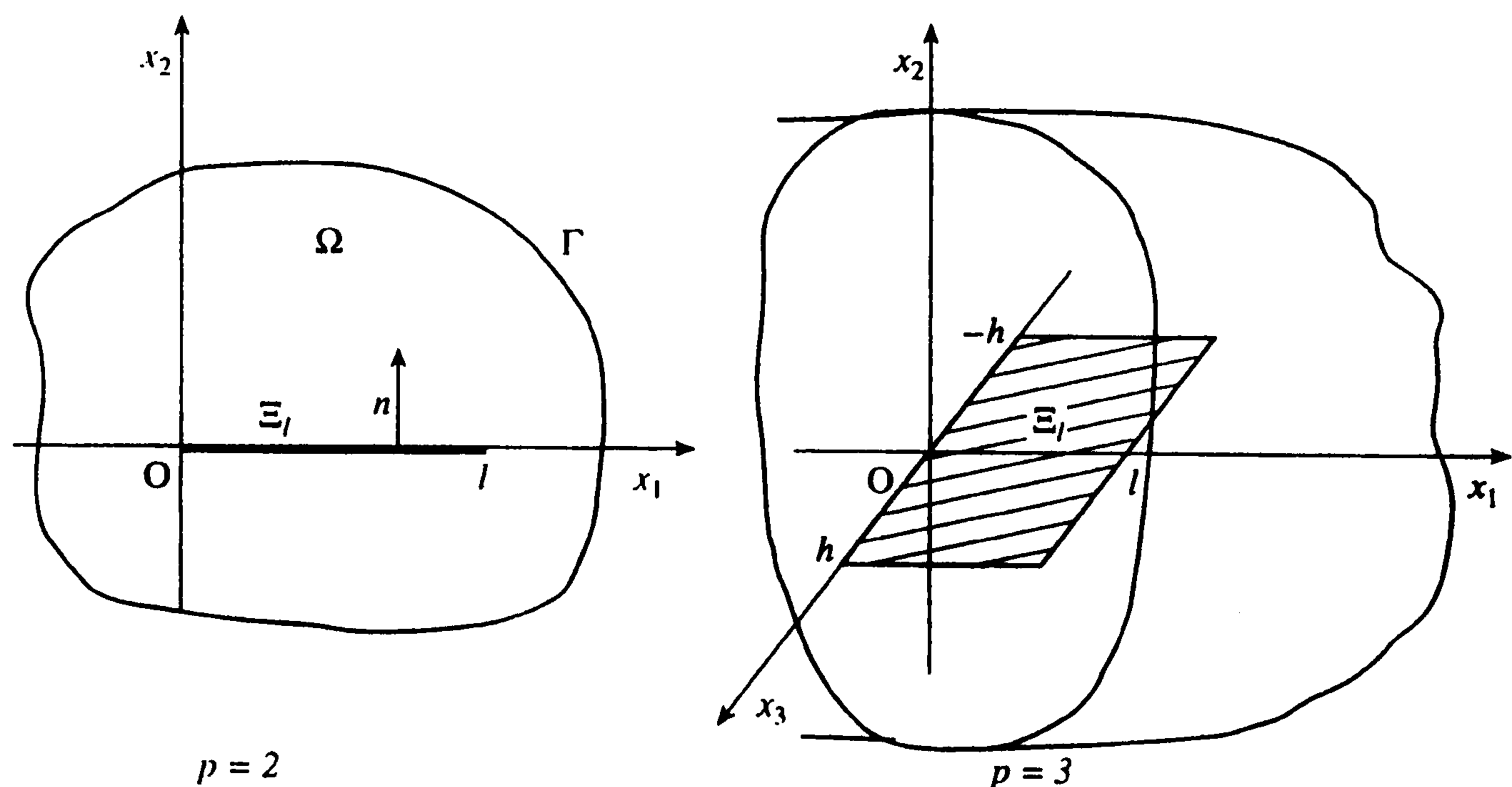
Будем полагать, что выполнен закон Гука

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_j^i \operatorname{div} W, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W) = (w_{,j}^i + w_{,i}^j)/2 \quad (1.3)$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ – параметры Ламе.

Формулировка задачи (1.1), (1.2) не является полной. Фактически рассматриваем задачу минимизации функционала (всюду далее область интегрирования не указывается)

$$I(\Omega; W) = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) d\Omega - \int f W d\Omega \quad (1.4)$$



Фиг. 1

на выпуклом замкнутом множестве

$$K_0 = \{(w^i) \in H^1(\Omega) \mid w^i = 0 \text{ на } \Gamma, [w^p] \geq 0 \text{ на } \Xi_l\} \quad (1.5)$$

При этом решение W задачи минимизации удовлетворяет вариационному неравенству (1.10) при $\delta = 0$ (см. ниже). В частности, выполнены уравнения равновесия (1.1) и краевые условия (1.2). В дополнение к последнему условию (1.2) на множестве Ξ_l будут выполнены и другие краевые условия (см. (2.14) при $p = 2$ и (3.3) при $p = 3$).

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим семейство возмущенных задач. Именно, требуется найти вектор-функцию $W^\delta = (w^{i\delta})$, такую, что

$$-\sigma_{ij,j} = f_i \text{ в } \Omega_\delta; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W^\delta) \quad (1.6)$$

$$W^\delta = 0 \text{ на } \Gamma; \quad [W^\delta]n \geq 0 \text{ на } \Xi_{l+\delta} \quad (1.7)$$

причем σ_{ij} , ϵ_{ij} связаны законом Гука (1.3).

Как и в случае задачи (1.1), (1.2), формулировка задачи (1.6), (1.7) не полна. В действительности, говоря о задаче (1.6), (1.7), будем иметь в виду задачу минимизации функционала $I(\Omega_\delta; W)$ на множестве K_δ . От соответствующего функционала (1.4) и множества (1.5) они отличаются заменой области Ω на Ω_δ и множества Ξ_l на $\Xi_{l+\delta}$.

Решение W^δ задачи минимизации удовлетворяет вариационному неравенству (см. ниже неравенство (1.10)), а второе соотношение (1.7) является частью полной системы краевых условий, выполняющихся на множестве $\Xi_{l+\delta}$.

Скорость изменения функционала энергии по длине трещины часто участвует в формулировке критериев разрушения [1]. Анализировались [2, 3] (см. также [4–7]) производные функционала энергии для уравнения Пуассона и линейных уравнений теории упругости (при $p = 2$) с классическими краевыми условиями вида

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{на } \Xi_l \quad (1.8)$$

Для неклассических краевых условий (1.2) вопрос о производных функционала энергии до настоящего времени оставался открытым. Изучалась [8–12] регулярность решений эллиптических краевых задач в негладких областях, рассматривались [11–17] другие аспекты эллиптических проблем в областях с негладкими границами. Исследовалась [18] зависимость решений краевых задач от формы области. Были построены [19–20] асимптотические разложения функционала энергии при возмущении размеров трещины.

Цель данной работы – отыскание производной функционала энергии по длине трещины для случая краевых условий (1.2) на Ξ_l , обеспечивающих взаимное непроникание берегов:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [I(\Omega_\delta; W^\delta) - I(\Omega; W)] / \delta = dJ(\Omega_\delta) / d\delta \Big|_{\delta=0} \quad (J(\Omega_\delta) = I(\Omega_\delta; W^\delta)) \quad (1.9)$$

Здесь W^δ , W – решения задач (1.6), (1.7) и (1.1), (1.2) соответственно.

Фактически W^δ – решение следующего вариационного неравенства:

$$W^\delta \in K_\delta : \int \sigma_{ij}(W^\delta)(\epsilon_{ij}(V) - \epsilon_{ij}(W^\delta)) d\Omega_\delta \geq \int f(V - W^\delta) d\Omega_\delta \quad \forall V \in K_\delta \quad (1.10)$$

а W – решение аналогичного неравенства при замене K_δ и Ω_δ на K_0 и Ω соответственно.

Для того чтобы найти производную (1.9), осуществим взаимнооднозначное отображение области Ω_δ на Ω . Далее воспользуемся вариационными свойствами решений, что позволит избежать необходимости вычисления материальной производной от W^δ .

2. Двумерный случай. Выберем произвольную функцию $\theta \in C_0^\infty(D)$, такую, что $\theta = 1$ в некоторой окрестности точки $x_l = (l, 0)$. Для упрощения следующих ниже формул предполагаем, что $\theta = 0$ в окрестности точки $(0, 0)$. Преобразование независимых переменных выбираем в виде

$$y_1 = x_1 - \delta\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2; \quad (y_1, y_2) \in \Omega, (x_1, x_2) \in \Omega_\delta \quad (2.1)$$

Якобиан $q_\delta = 1 - \delta\theta_{x_1}$ преобразования (2.1) положителен для малых δ .

Пусть $x = x(y, \delta)$ – преобразование, обратное к (2.1), а $W^\delta(x)$ – решение задачи (1.6), (1.7). Тогда $W^\delta(x) = W_\delta(y)$, $y \in \Omega$. Пусть также W – решение задачи (1.1), (1.2). Тогда

$$\|W_\delta - W\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Доказательство этой сходимости приводить не будем. Оно аналогично доказательству леммы 1 в работе [21], где рассматривалось уравнение Пуассона в области с разрезом.

Более того, аналогично изложенному ранее [21] можно доказать, что существует постоянная $c > 0$, такая, что

$$\|W_\delta - W\|_{H^1(\Omega)} \leq c\delta \quad (2.3)$$

Используя преобразование (2.1), получаем (всюду далее $i, j = 1, 2$)

$$\int f_i w^\delta d\Omega_\delta = \int f_i^\delta w_\delta d\Omega, \quad w^\delta(x) = w_\delta(y), \quad f_i^\delta(y) = \frac{f_i(x(y, \delta))}{1 - \delta\theta_{x_1}}$$

Теперь можно найти производные

$$f_i'(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_i^\delta(y) - f_i^0(y)}{\delta} = \frac{df_i^\delta}{d\delta} \Big|_{\delta=0}$$

В самом деле, предполагая, что y, δ – независимые переменные в (2.1), получаем $x = x(y, \delta)$. Дифференцирование равенств (2.1) по δ дает

$$\frac{dx_1}{d\delta} = \frac{\theta}{1 - \delta\theta_{x_1}}, \quad \frac{dx_2}{d\delta} = 0$$

Таким образом,

$$\left. \frac{\partial f_i(x(y, \delta))}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = f_{ix_1} \left. \frac{dx_1}{d\delta} \right|_{\delta=0} + f_{ix_2} \left. \frac{dx_2}{d\delta} \right|_{\delta=0} = f_{iy_1} \theta \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что

$$f'_i(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{f_i(x(y, \delta))}{1 - \delta \theta_{x_1}} - f_i(y) \right) \frac{1}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_i(x(y, \delta)) - f_i(y)}{\delta} +$$

$$+ \theta_{x_1} f_i(y) \Big|_{\delta=0} = f_{iy_1} \theta + \theta_{y_1} f_i = \frac{\partial(\theta f_i)}{\partial y_1}(y) \quad (2.5)$$

Кроме того, учитывая включения $f_i \in C^1(\bar{\Omega})$, получаем при $\delta \rightarrow 0$

$$(f_i^\delta(y) - f_i^0(y)) / \delta \rightarrow f'_i(y) \quad \text{в} \quad L^\infty(\Omega) \quad (2.6)$$

Пусть теперь $W^\delta = (w^{i\delta})$ – решение задачи (1.6), (1.7). Введем обозначения

$$w^{i\delta}(x) = w_{\delta y_1}^i(y), \quad W^\delta(x) = W_\delta(y), \quad x \in \Omega_\delta, \quad y \in \Omega, \quad x = x(y, \delta)$$

В силу преобразования (2.1) имеют место соотношения

$$w_{x_1}^{1\delta} = w_{\delta y_1}^1 (1 - \delta \theta_{x_1}), \quad w_{x_2}^{1\delta} = w_{\delta y_1}^1 (-\delta \theta_{x_2}) + w_{\delta y_2}^1 \quad (2.7)$$

$$w_{x_1}^{2\delta} = w_{\delta y_1}^2 (1 - \delta \theta_{x_1}), \quad w_{x_2}^{2\delta} = w_{\delta y_1}^2 (-\delta \theta_{x_2}) + w_{\delta y_2}^2$$

Поскольку справедливо равенство

$$\sigma_{ij}(W^\delta) \varepsilon_{ij}(W^\delta) = (2\mu + \lambda)(\varepsilon_{11}^2(W^\delta) + \varepsilon_{22}^2(W^\delta)) + 2\lambda \varepsilon_{11}(W^\delta) \varepsilon_{22}(W^\delta) + 4\mu \varepsilon_{12}^2(W^\delta)$$

то ввиду соотношений (2.7) можно сделать замену области интегрирования Ω_δ на Ω в формуле для функционала энергии. Именно (всюду далее $w_\delta^1 = u_\delta$, $w_\delta^2 = v_\delta$),

$$\frac{1}{2} \int \sigma_{ij}(W^\delta) \varepsilon_{ij}(W^\delta) d\Omega_\delta - \int f W^\delta d\Omega_\delta = \frac{1}{2} \int \frac{1}{q_\delta} (u_{\delta y_1}^2 ((2\mu + \lambda) q_\delta^2 - \mu \delta^2 \theta_{x_2}^2) +$$

$$+ \mu u_{\delta y_2}^2 + v_{\delta y_1}^2 ((2\mu + \lambda) \delta^2 \theta_{x_2}^2 + \mu q_\delta^2) + (2\mu + \lambda) v_{\delta y_2}^2 - 2\delta \mu u_{\delta y_1} u_{\delta y_2} \theta_{x_2} -$$

$$- 2\delta(\mu + \lambda) u_{\delta y_1} v_{\delta y_1} \theta_{x_2} q_\delta + 2\lambda u_{\delta y_1} v_{\delta y_2} q_\delta + 2\mu u_{\delta y_2} v_{\delta y_1} q_\delta -$$

$$- 2\delta(2\mu + \lambda) v_{\delta y_1} v_{\delta y_2} \theta_{x_2}) d\Omega - \int f^\delta W_\delta d\Omega \quad (2.8)$$

Формулу (2.8), дающую преобразование функционала энергии, можно переписать в виде

$$I(\Omega_\delta; W^\delta) = I_\delta(\Omega; W_\delta) \quad (2.9)$$

Включение $W_\delta \in K_0$ влечет $W^\delta \in K_\delta$ и наоборот, $W^\delta \in K_\delta$ влечет $W_\delta \in K_0$. Это означает, что преобразование (2.1) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между K_δ и K_0 . В частности, сказанное означает, что

$$\min_{U \in K_\delta} I(\Omega_\delta; U) = \min_{U \in K_0} I_\delta(\Omega; U) \quad (2.10)$$

Далее, в силу (2.9), (2.10) имеем

$$\Delta J / \delta = (I_\delta(\Omega; W_\delta) - I(\Omega; W)) / \delta \leq \{I_\delta(\Omega; W)\} / \delta$$

$$(\Delta J = J(\Omega_\delta) - J(\Omega), \quad \{I_\delta(\Omega; W)\} = I_\delta(\Omega; W) - I(\Omega; W))$$

откуда следует

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \Delta J / \delta \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \{I_\delta(\Omega; W)\} / \delta \quad (2.11)$$

С другой стороны,

$$\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \Delta J / \delta \geq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \{I_\delta(\Omega; W_\delta)\} / \delta \quad (2.12)$$

Принимая во внимание соотношения (2.8), (2.6), (2.2), можно показать, что правые части неравенств (2.11) и (2.12) совпадают. Это означает существование производной (1.9). Непосредственное вычисление правых частей неравенств (2.11), (2.12) дает формулу Гриффитса

$$dJ(\Omega_\delta) / d\delta|_{\delta=0} = \frac{1}{2} \int (-(2\mu + \lambda)u_{y_1}^2 \theta_{y_1} + \mu u_{y_2}^2 \theta_{y_1} - 2\mu u_{y_1} u_{y_2} \theta_{y_2} - \mu v_{y_1}^2 \theta_{y_1} + (2\mu + \lambda) \times$$

$$\times v_{y_2}^2 \theta_{y_1} - 2(\mu + \lambda)u_{y_1} v_{y_1} \theta_{y_2} - 2(2\mu + \lambda)v_{y_1} v_{y_2} \theta_{y_2}) d\Omega -$$

$$- \int (\theta f_1)_{y_1} u d\Omega - \int (\theta f_2)_{y_1} v d\Omega \quad (2.13)$$

Она дает значение производной функционала энергии по длине трещины для двумерной теории упругости с нелинейными краевыми условиями (2.14) (см. ниже) на берегах трещины.

Прежде всего проанализируем краевые условия на Ξ_l в задаче (1.1), (1.2). Согласно полученным ранее результатам [11], решение W задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$[v] \geq 0, \quad \sigma_{22} \leq 0, \quad [\sigma_{22}] = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22}[v] = 0 \quad \text{на } \Xi_l \quad (2.14)$$

Более того, как следует из полученных ранее результатов [8], решение задачи (1.1), (1.2) (т.е., фактически задачи (1.10) при $\delta = 0$) имеет дополнительную гладкость по сравнению с вариационной. Именно, для любого $x \in \Xi_l$ существует окрестность V точки x , такая, что $W \in H^2(V \cap \Xi_l)$. Следовательно, согласно теоремам вложения, функция W непрерывна вплоть до берегов трещины, и условия (2.14) выполнены почти всюду на Ξ_l . Заметим, что $\sigma_{22} = (2\mu + \lambda)v_{y_2} + \lambda u_{y_1}$. В дополнение к условиям (2.14) можно доказать, что

$$[\sigma_{22} v_{y_1}] = \sigma_{22}[v_{y_1}] = 0 \quad \text{почти всюду на } \Xi_l \quad (2.15)$$

Действительно, в силу непрерывности функции v вплоть до Ξ_l , множество

$$M = \{y \in \Xi_l \mid [v(y)] > 0\}$$

открыто на Ξ_l . Согласно последнему равенству (2.14), в любой точке $y \in M$ имеем $\sigma_{22}(y) = 0$. Отсюда следует, что $\sigma_{22}[v_{y_1}] = 0$ почти всюду на M . На множестве $\Xi_l \setminus M$ имеем $[v] = 0$. Следовательно, $[v_{y_1}] = 0$ (см. [22], гл. 2, теорема А.1), что и доказывает равенство (2.15).

Докажем теперь, что правая часть равенства (2.13) не зависит от выбора функции θ . Как было установлено, левые части неравенств (2.11) и (2.12) совпадают. Они не зависят от θ , поэтому предел $\lim \Delta J / \delta$ при $\delta \rightarrow 0$ существует и от θ не зависит.

В некоторых частных случаях можно установить дополнительные свойства гладкости вблизи точки x_l . Например, предположим, что решение W задачи (1.1), (1.2) об-

ладает свойством $[W] = 0$ на $B_{x_l} \cap \Xi_l$, где B_{x_l} – круг с центром в точке x_l . Тогда, используя метод работы [12], можно доказать, что уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(W) = f_i$$

выполнены в смысле распределений в B_{x_l} . Следовательно, $W \in H_{\text{loc}}^3(B_{x_l})$. В дополнение к сказанному, в силу включения $f \in H^1(D)$, получаем $W \in H_{\text{loc}}^3(\Omega)$. В этом случае будем иметь

$$dJ(\Omega(l))/dl = 0 \quad (\Omega = \Omega(l)) \quad (2.16)$$

В самом деле, интегрирование по частям в правой части равенства (2.13) дает

$$\begin{aligned} dJ(\Omega(l))dl = & \int \theta((\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2})u_{y_1} + (\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2})v_{y_1})d\Omega(l) + \\ & + \int \theta(f_1u_{y_1} + f_2v_{y_1})d\Omega(l) + \int \theta(\sigma_{22}[v_{y_1}] + [\sigma_{12}u_{y_1}])d\Xi_l \end{aligned} \quad (2.17)$$

Согласно соотношениям (1.1), (2.14), (2.15) правая часть выражения (2.17) равна нулю, что и доказывает равенство (2.16).

Отметим, что гладкость функции $W \in H^2(B_{x_l} \setminus \Xi_l)$ достаточна для справедливости равенства (2.16). В этом случае можно повторить приведенные выше рассуждения и показать, что правая часть выражения (2.17) равна нулю.

Формула Гриффитса (2.13) может быть записана в форме, не содержащей функцию θ . Для этого выберем круг $B_{x_l}(r)$ с радиусом r и границей $\Gamma(r)$, такой, что $\theta = 1$ на $B_{x_l}(r)$. Тогда интегрирование по частям в (2.13) дает

$$dJ(\Omega(l))/dl = I_{\Gamma(r)} + \int (f_1u_{y_1} + f_2v_{y_1})d(B_{x_l}(r) \setminus \Xi_l) \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\Gamma(r)} = & \frac{1}{2} \int v_1((2\mu + \lambda)(u_{y_1}^2 - v_{y_2}^2) + \mu(v_{y_1}^2 - u_{y_2}^2))d\Gamma(r) + \\ & + \int v_2((2\mu + \lambda)v_{y_1}v_{y_2} + (\mu + \lambda)u_{y_1}v_{y_1} + \mu u_{y_1}u_{y_2})d\Gamma(r) \end{aligned} \quad (2.19)$$

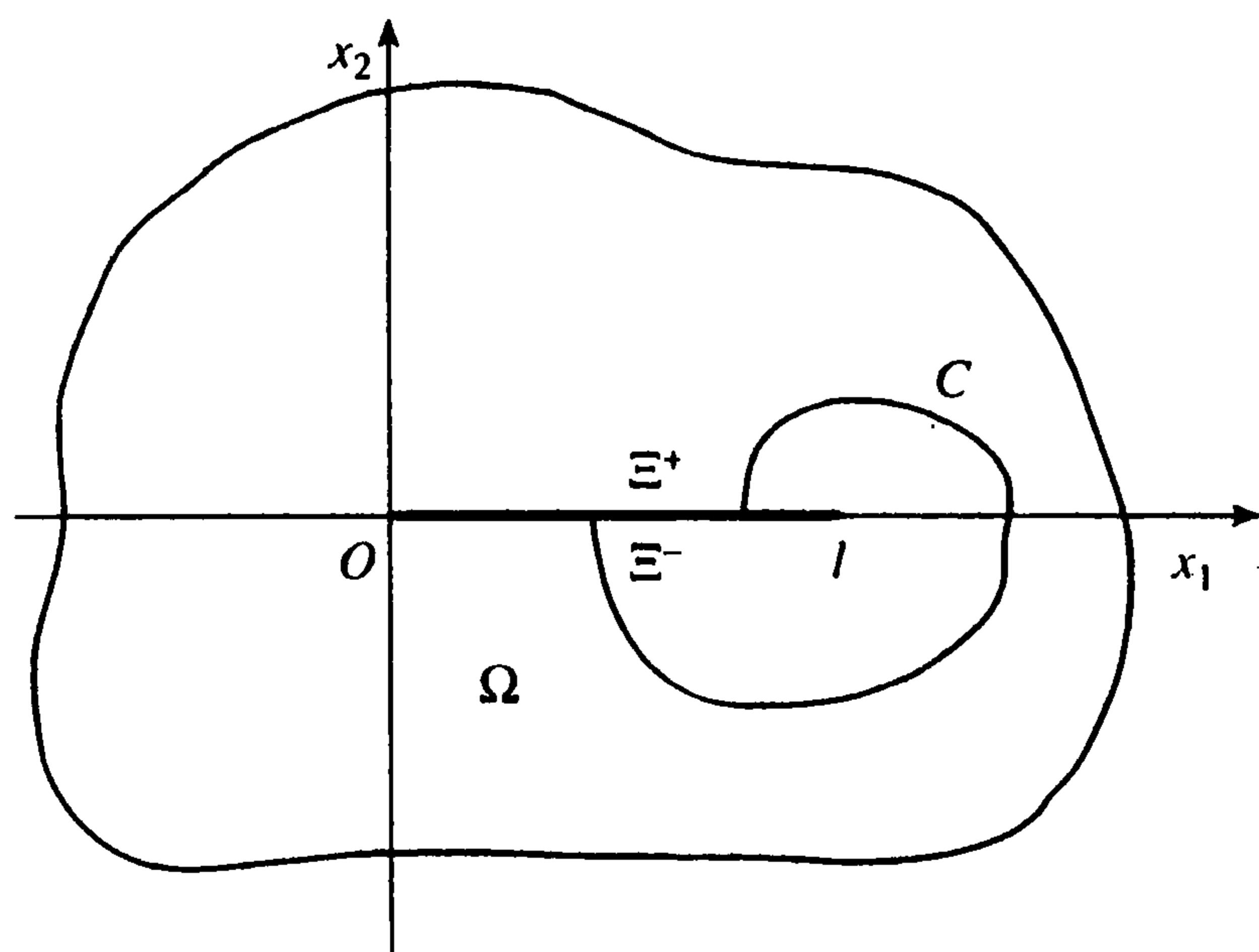
а (v_1, v_2) – единичная внешняя нормаль к $\Gamma(r)$.

Предположим теперь, что $f = 0$ в некоторой окрестности V точки x_l . Для достаточно малых r имеем $B_{x_l}(r) \subset V$. Правая часть равенства (2.18) не зависит от r , поэтому доказано следующее свойство. Пусть W – решение задачи (1.1), (1.2), и $f = 0$ в некоторой окрестности точки x_l . Тогда интеграл $I_{\Gamma(r)}$ не зависит от r для всех достаточно малых r . Больше того, предыдущие рассуждения показывают, что интеграл I_C , отличающийся от $I_{\Gamma(r)}$ заменой окружности $\Gamma(r)$ на произвольную кривую C , окружающую точку x_l , не зависит от кривой C (фиг. 2); в этом случае $v = (v_1, v_2)$ – единичный вектор нормали к кривой C . Часть этой кривой может совпадать с Ξ_l . Пусть $\Xi = \Xi_l \cap C$. Тогда в силу соотношения (2.15) интегрировать в I_C можно как по берегу Ξ^+ так и по берегу Ξ^- .

Подчеркнем, что указанная независимость интеграла I_C от кривой C имеет место в случае когда $f = 0$ в области с границей C . Интеграл вида I_C носит название интеграла Эшелби–Черепанова–Райса. Отметим, что установленный результат о независимости интеграла от пути получен для случая нелинейных краевых условий (2.14).

Известные утверждения о независимости интеграла Эшелби–Черепанова–Райса от пути интегрирования относятся к случаю краевых условий (1.8) (см. [23]). В этом случае интеграл обычно записывают в виде

$$\int (\sigma_{ij}v_j w_{y_1}^i - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij}v_1)dC((w^1, w^2) = (u, v)) \quad (2.20)$$



Фиг. 2

Ясно, что при краевых условиях (1.8) интегрировать по $\Xi^\pm$ нет необходимости, так как соответствующие интегралы равны нулю. Отпадает необходимость и в использовании равенства (2.15). Непосредственной проверкой убеждаемся, что подынтегральные выражения в I_C и (2.20) совпадают, так что интеграл I_C имеет классическую форму.

Если раскрытие трещины вблизи x_l в задаче (1.1), (1.2) – ненулевое, то вблизи x_l краевые условия имеют вид $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, и приходим к классическому случаю. Отметим

здесь, что достаточные условия, обеспечивающие отсутствие контакта берегов трещины, были приведены [24].

Существуют и другие инвариантные интегралы по контурам, охватывающим вершину трещины для случая краевых условий (1.8) [25].

3. Трехмерный случай. Рассмотрим функцию $\theta \in C_0^\infty(D)$, $\theta = 1$ в окрестности множества

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = l, -h < x_2 < h, x_3 = 0\}$$

Полагаем, что $\theta = 0$ в окрестности множества $L_0 = L|_{l=0}$. Преобразование независимых переменных

$$y_1 = x_1 - \delta\theta(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 \quad (3.1)$$

при малых δ взаимно-однозначно отображает область Ω_δ на Ω ($(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_\delta$ ($y_1, y_2, y_3) \in \Omega$).

Далее можно рассуждать так же, как и в разд. 2, что дает формулу Гриффитса для производной функционала энергии (всюду далее $w^1 = u$, $w^2 = v$, $w^3 = w$)

$$\begin{aligned} dJ(\Omega_\delta)/d\delta|_{\delta=0} = & \frac{1}{2} \int ((2\mu + \lambda) \{-u_{y_1}^2 \theta_{y_1} + v_{y_2}^2 \theta_{y_1} + w_{y_3}^2 \theta_{y_1} - 2v_{y_1} v_{y_2} \theta_{y_2} - \\ & - 2w_{y_1} w_{y_3} \theta_{y_3}\} + \mu \{u_{y_2}^2 \theta_{y_1} - v_{y_1}^2 \theta_{y_1} - w_{y_1}^2 \theta_{y_1} + u_{y_3}^2 \theta_{y_1} + v_{y_3}^2 \theta_{y_1} + \\ & + w_{y_2}^2 \theta_{y_1} - 2u_{y_1} u_{y_3} \theta_{y_3} - 2u_{y_1} w_{y_1} \theta_{y_3} - 2v_{y_1} v_{y_3} \theta_{y_3} - 2v_{y_1} w_{y_2} \theta_{y_3} - 2v_{y_3} w_{y_1} \theta_{y_2} - \\ & - 2w_{y_1} w_{y_2} \theta_{y_2} - 2u_{y_1} u_{y_2} \theta_{y_2} - 2v_{y_1} u_{y_1} \theta_{y_2} + 2v_{y_3} w_{y_2} \theta_{y_1}\} + 2\lambda \{v_{y_2} w_{y_3} \theta_{y_1} - u_{y_1} w_{y_1} \theta_{y_3} - \\ & - v_{y_2} w_{y_1} \theta_{y_3} - v_{y_1} w_{y_3} \theta_{y_2} - u_{y_1} v_{y_1} \theta_{y_2}\}) d\Omega - \int (\theta f_1)_{y_1} u d\Omega - \\ & - \int (\theta f_2)_{y_1} v d\Omega - \int (\theta f_3)_{y_1} w d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

Можно показать, что правая часть равенства (3.2) не зависит от θ .

Было показано [11], что решение W задачи (2.1), (2.2) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$[w] \geq 0, \quad [\sigma_{33}] = 0, \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{33}[w] = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad \text{на } \Xi_l \quad (3.3)$$

Кроме того, показывается, что

$$\sigma_{33}[w, l] = 0 \quad \text{почти всюду на } \Xi_l \quad (3.4)$$

Запишем формулу (3.2) в виде, не содержащем функцию θ . С этой целью рассмотрим окрестность S_L множества L с гладкой границей Γ_L , предполагая, что $\theta = 1$ на S_L .

Обозначим через (v_1, v_2, v_3) единичную внешнюю нормаль к Γ_L . Интегрируя по частям в (3.2), получим

$$\begin{aligned} dJ(\Omega_\delta)/d\delta|_{\delta=0} = & \int (f_1 u_{y_1} + f_2 v_{y_1} + f_3 w_{y_1}) dS_L + \frac{1}{2} \int v_1 ((2\mu + \lambda)(u_{y_1}^2 - v_{y_2}^2 - w_{y_3}^2) + \\ & + \mu(v_{y_1}^2 + w_{y_1}^2 - u_{y_2}^2 - u_{y_3}^2 - v_{y_3}^2 - w_{y_2}^2 - 2v_{y_3} w_{y_2}) - 2\lambda v_{y_2} w_{y_3}) d\Gamma_L + \\ & + \int v_2 ((2\mu + \lambda)v_{y_1} v_{y_2} + \mu(u_{y_1}(u_{y_2} + v_{y_1}) + w_{y_1}(v_{y_3} + w_{y_2})) + \\ & + \lambda(v_{y_1}(u_{y_1} + w_{y_3})) d\Gamma_L + \int v_3 ((2\mu + \lambda)w_{y_1} w_{y_3} + \\ & + \mu(u_{y_1}(u_{y_3} + w_{y_1}) + v_{y_1}(v_{y_3} + w_{y_2})) + \lambda w_{y_1}(u_{y_1} + v_{y_2})) d\Gamma_L \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначая через $k(l, h, f)$ функционал, определяемый правой частью формулы Гриффитса (3.5), получаем

$$J(\Omega_\delta) = J(\Omega) + k(l, h, f)\delta + o(\delta)$$

Заметим, что $k(l, h, f)$ не зависит от выбора окрестности S_L .

Предложенный способ получения производной функционала энергии дает возможность рассматривать и более сложные возмущения фронта трещины в трехмерном случае. Пусть, например, фронт трещины в невозмущенном состоянии определяется уравнением $x_1 = g(x_2)$, где g — заданная функция, удовлетворяющая условию Липшица, такая, что

$$g(-h) = g(h) = l$$

Возмущенный фронт трещины описывается уравнением $x_1 = g(x_2) + \delta$. Предположим, что преобразование независимых переменных совпадает с (3.1), где $\theta \in C_0^\infty(D)$, $\theta = 1$ в окрестности множества

$$\{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = g(x_2), -h < x_2 < h, x_3 = 0\}$$

В этом случае формула Гриффитса также имеет вид (3.2) с областью Ω , соответствующей фронту $x_1 = g(x_2)$.

Аналогично, пусть фронт трещины определяется уравнением $x_1 = l$, а возмущение фронта имеет вид $x_1 = l + \delta g(x_2)$. Известная функция g предполагается достаточно гладкой и такой, что

$$g(-h) = g(h) = 0$$

Продолжим функцию g вне интервала $(-h, h)$ нулем. Выберем функцию θ так же как и в (3.1). При этом преобразование независимых переменных можно выбрать в виде, отличающемся от (3.1) введением перед функцией $\theta(x_1, x_2, x_3)$ множителя $g(x_2)$, а формула Гриффитса имеет вид (3.2), где функцию θ следует заменить на $g\theta$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00896).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Мазья В.Г., Назаров С.А. Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
3. Grisvard P. Singularities in boundary value problems. Paris: Masson; Berlin: Springer, 1992. 198 p.
4. Ohtsuka K. Mathematical aspects of fracture mechanics // Lect. Notes in Numer. Appl. Anal. 1994. V. 13. P. 39–59.

5. *Blat J., Morel J.-M.* Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory // Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems: Proc Intern. Conf. Eds. P. Benilan et al. Harlow: Longman Scient. and Techn., 1989. P. 216–228.
6. *Destuynder P., Djaoua M.* Sur une interprétation mathématique de l'Intégrale de Rice et théorie de la rupture fragile // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1981. V. 3. N 1. P. 70–87.
7. *Bonnet M.* Equations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire // C.r. Acad. sci. Paris, sér. II, 1994. V. 318. N 4. P. 429–434.
8. *Khludnev A.M.* On a Signorini problem for inclusions in shells // Europ. J. Appl. Math. 1996. V. 7. N 5. P. 499–510.
9. *Khludnev A.M.* Contact problem for a plate having a crack of minimal opening // Control and Cybernetics, 1996. V. 25. No. 3. P. 605–620.
10. *Кондратьев В.А., Копачек И., Олейник О.А.* О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки // Труды семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ. 1982. Т. 8. С. 135–152.
11. *Khludnev A.M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel, etc.: Birkhauser, 1997. 384 p.
12. *Хлуднев А.М.* Контактная задача для полой оболочки с трещиной // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 318–326.
13. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston, etc.: Pitman, 1985. 410 p.
14. *Dauge M.* Elliptic boundary value problems on corner domains // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1988. N 1341. 259 p.
15. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
16. *Захаревич И.С.* О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961–968.
17. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
18. *Sokolowski J., Zolesio J.P.* Introduction to shape optimisation. Shape sensitivity analysis. Berlin: Springer, 1992. 250 p.
19. *Mazja W.G., Nazarov S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten I. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 430 S.
20. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Тр. Моск. мат. о-ва. 1996. Т. 57. С. 16–74.
21. *Khludnev A.M., Sokolowski J.* The Griffith formula and the Rice-Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10. No 4. P. 379–394.
22. *Kinderlehrer D., Stampacchia G.* An introduction to variational inequalities and their applications. N.Y., etc.: Academic Press, 1980. = *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
23. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
24. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
25. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 104–119.