

УДК 539.3

© 2000 г. И.И. Аргатов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОЛУНЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Изучается задача о давлении на границу упругого полупространства, занимающего в плане круг штампа с основанием в форме эллиптического параболоида, близкого к круговому. Трение между контактирующими телами не учитывается; допускается отрыв кромки штампа от упругого основания. Предполагается, что неизвестная априори область контакта близка к круговой. Решение задачи строится методом сращиваемых асимптотических разложений. В явном виде выписывается асимптотика границы области контакта.

1. Постановка задачи. Пусть в упругое полупространство $x_3 > 0$ без трения вдавлируется штамп с подошвой в форме эллиптического параболоида

$$x_3 = -\Phi_\varepsilon(x_1, x_2); \quad \Phi_\varepsilon(x_1, x_2) = A[x_1^2 + x_2^2 + \varepsilon(x_1^2 - x_2^2)] \quad (1.1)$$

где ε – малый положительный параметр. Предполагается, что штамп занимает в плане круг ω_0 с центром в начале координат и радиусом a .

Через δ_ε обозначим поступательное смещение штампа и положим

$$\delta_\varepsilon = \delta_0 + \varepsilon\delta_1; \quad \delta_0 = 2Aa^2 \quad (1.2)$$

Тогда (см., например, [1], гл. 3, § 2) в случае $\varepsilon = 0$ штамп контактирует с основанием по всей области ω_0 , причем на ее границе Γ_0 контактное давление обращается в нуль.

В общей ситуации область контакта ω_ε оказывается некоторой заранее неизвестной подобластью ω_0 . При помощи представления Папковича – Нейбера задача сводится [2, 3] к отысканию исчезающей на бесконечности гармонической функции u^ε , удовлетворяющей краевым условиям

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \geq \delta_\varepsilon - \Phi_\varepsilon(x_1, x_2), \quad \partial_3 u^\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$[u^\varepsilon(\mathbf{x}) - \delta_\varepsilon + \Phi_\varepsilon(x_1, x_2)]\partial_3 u^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 \quad x_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega_0 \quad (1.3)$$

$$\partial_3 u^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\omega_0} \quad (1.4)$$

Граница Γ_ε области контакта ω_ε определяется условием положительности контактных давлений

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) = -\alpha^{-1}\partial_3 u^\varepsilon(x_1, x_2, 0); \quad \alpha \equiv 2(1 - \nu^2)E^{-1} \quad (1.5)$$

Здесь E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства.

В полученном ранее аналитическом решении рассматриваемой задачи [4] коэффициенты тригонометрического разложения функции h_ε , характеризующей отклонение области контакта от круга, вычислялись методом коллокации. В данной статье применяется асимптотический метод, развитый С.А. Назаровым [5, 6]. Для кусочно гладкой функции h_ε выводится простого вида замкнутое выражение.

2. Внешнее асимптотическое представление. На удалении от возмущенного участка границы контакта решение задачи (1.3), (1.4) назовем в виде

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

где правая часть служит решением линейной контактной задачи о вдавлении штампа (1.1) на глубину (1.2). Соответственно для контактного давления имеем представление

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) \approx p^0(x_1, x_2) + \varepsilon p^1(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

На основании известных результатов (см. [1, 2, 7] и др.) находим

$$p^0(x_1, x_2) = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \frac{2\delta_0}{a^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad (2.3)$$

$$p^1(x_1, x_2) = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \frac{\delta_1 - (8/3)A(x_1^2 - x_2^2)}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}} \quad (2.4)$$

Установим поведение функции (2.1) в окрестности границы контакта. В трехмерной окрестности контура Γ_0 введем локальные координаты $y_1, y_2 = x_3, \sigma$, где σ – полярный угол. Кроме того, в плоских, ортогональных к Γ_0 , введем полярные координаты r и φ , причем $y_1 = r \cos \varphi$, $y_2 = r \sin \varphi$ и $\varphi \in [0, \pi]$.

Непосредственными вычислениями для плотностей (2.3), (2.4) получаем следующие асимптотические формулы:

$$p^0(x_1, x_2) = -(2\pi)^{-1/2} k^0(\sigma) r^{1/2} + O(r^{3/2}), \quad r \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

$$p^1(x_1, x_2) = -(2\pi)^{-1/2} K^1(\sigma) r^{-1/2} + O(r^{1/2}), \quad r \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

При этом, согласно нормировке [5], имеем

$$k^0(\sigma) = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{4\delta_0}{\sqrt{\pi} a^{3/2}} \quad (2.7)$$

$$K^1(\sigma) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\delta_1}{\sqrt{\pi} a} - \frac{8Aa^2}{3\sqrt{\pi} a} \cos 2\sigma \right) \quad (2.8)$$

Наконец, для функций v^0, v^1 при $r \rightarrow 0$ справедливы асимптотические разложения (см., например, [8, 5])

$$v^0(\mathbf{x}) = Aa^2 + 2Aar \cos \varphi + \alpha(2\pi^{-1})^{1/2} 3^{-1} k^0(\sigma) r^{3/2} \sin(3\varphi/2) + O(r^2) \quad (2.9)$$

$$v^1(\mathbf{x}) = \delta_1 - Aa^2 \cos 2\sigma + \alpha(2\pi^{-1})^{1/2} K^1(\sigma) r^{1/2} \sin(\varphi/2) + O(r) \quad (2.10)$$

Отметим, что для функции (2.1) в краевом условии (1.3) нарушается только второе неравенство, причем в окрестности тех точек контура Γ_0 , где положительным оказывается коэффициент интенсивности напряжений (2.8).

3. Внутреннее асимптотическое представление. В плоскостях, нормальных к Γ_0 , перейдем к "растянутым" переменным

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2); \quad \eta_i = \varepsilon^{-1} y_i \quad (3.1)$$

Решение задачи (1.3), (1.4) вблизи Γ_0 будем искать в форме

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx w^0(\sigma; \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon^{1/2} w^1(\sigma; \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon w^2(\sigma; \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon^{3/2} w^3(\sigma; \boldsymbol{\eta}) \quad (3.2)$$

Подставим разложения (2.9), (2.10) и (2.1) и осуществим замену координат, обратную к (3.1). Полагая $r = \varepsilon \rho$, будем иметь

$$\begin{aligned} v^0(\mathbf{x}) + \varepsilon v^1(\mathbf{x}) = & Aa^2 + \varepsilon[2Aa\eta_1 + \delta_1 - Aa^2 \cos 2\sigma] + \\ & + \varepsilon^{3/2} \alpha (2\pi^{-1})^{1/2} [3^{-1} k^0(\sigma) \rho^{3/2} \sin(3\varphi/2) + K^1(\sigma) \rho^{1/2} \sin(\varphi/2)] + O(\varepsilon^2 \rho^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Согласно методу сращиваемых асимптотических разложений (см. [9–11] и др.), первые слагаемые справа в (3.3) определяют старшие члены пограничного слоя:

$$w^0(\sigma; \boldsymbol{\eta}) \equiv Aa^2, \quad w^1(\sigma; \boldsymbol{\eta}) \equiv 0, \quad w^2(\sigma; \boldsymbol{\eta}) \equiv 2Aa\eta_1 + \delta_1 - Aa^2 \cos 2\sigma \quad (3.4)$$

Ввиду второго равенства (3.4) функция w^3 должна быть гармонической в полуплоскости $\eta_2 > 0$ (см. [5], разд. 3).

4. Вариация границы области контакта. Предположим, что кривая Γ_ε в локальных координатах описывается уравнением

$$y_1 = h_\varepsilon(\sigma); \quad h_\varepsilon(\sigma) = \varepsilon h(\sigma) \quad (4.1)$$

или $\eta_1 = h(\sigma)$, где $h(\sigma)$ – функция, подлежащая определению. Наряду с координатами ρ и φ введем еще полярные координаты ρ_h и $\varphi_h \in [0, \pi]$ с полюсом в точке $\eta_1 = h(\sigma)$, $\eta_2 = 0$.

Следуя изложенному ранее [6], младший член внутреннего асимптотического представления (3.2) назовем в виде

$$w^3(\sigma; \boldsymbol{\eta}) = \alpha (2\pi^{-1})^{1/2} 3^{-1} N(\sigma) \rho_h^{3/2} \sin(3\varphi_h/2) \quad (4.2)$$

Для функции (3.2) в зоне контакта $\eta_1 > h(\sigma)$ в главном выполняется второе неравенство в (1.3), если только $N(\sigma) < 0$. При этом контактное давление обращается в нуль на возмущенном участке контура Γ_ε . Кроме того, вследствие соотношений (3.4), (4.2) в первом неравенстве (1.3) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ реализуется знак равенства. Наконец, функции N и h определяются в результате сращивания асимптотических представлений (2.1) и (3.2).

Используя формулы [5]

$$\partial r_h / \partial h = -\cos \varphi, \quad \partial \varphi_h / \partial h = r^{-1} \sin \varphi \quad \text{при} \quad h = 0$$

для больших значений ρ выводим соотношение

$$\rho_h^{3/2} \sin(3\varphi_h/2) = \rho^{3/2} \sin(3\varphi/2) - (3/2) \rho^{1/2} h(\sigma) \sin(\varphi/2) + O(\rho^{-1/2}) \quad (4.3)$$

Подставив выражение (4.3) в (4.2), после замены переменных (3.1) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/2} w^3(\sigma; \boldsymbol{\eta}) = & \alpha (2\pi^{-1})^{1/2} 3^{-1} N(\sigma) r^{3/2} \sin(3\varphi/2) - \\ & - \varepsilon \alpha (2\pi^{-1})^{1/2} 2^{-1} N(\sigma) h(\sigma) r^{1/2} \sin(\varphi/2) + O(\varepsilon^2 r^{-1/2}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Сопоставляя теперь соотношения (3.3) и (3.2) при учете равенств (3.4), (4.4), заключаем, что в зоне сращивания, где $r/a = O(\varepsilon^{2/3})$, внешнее и внутреннее представления будут различаться на малые $O(\varepsilon^{4/3})$ величины, если будут соблюдены условия $N(\sigma) = k^0(\sigma)$ и

$$h(\sigma) = (-2K^1(\sigma)/k^0(\sigma))_+ \quad (4.5)$$

Индекс "плюс" означает операцию взятия положительного выражения, заключенного в скобки. Подчеркнем, что в тех точках σ , где $K^1(\sigma) < 0$ и тем самым возле

кромки штампа развиваются сжимающие напряжения, формула (4.5) дает $h(\sigma) = 0$ и граница Γ_ε совпадает с Γ_0 . Согласно соотношениям (2.7), (2.8), зависимость (4.5) можно записать в виде

$$h(\sigma) = ((\frac{4}{3})a \cos 2\sigma - (\frac{1}{4})\delta_1)_+$$

или при учете равенств (1.2) и (1.4) так:

$$h_\varepsilon(\sigma) = \left(-\frac{1}{4Aa}(\delta_\varepsilon - \delta_0) + \frac{2}{3}\varepsilon a \cos 2\sigma \right)_+ \quad (4.6)$$

Формула (4.6) в главном определяет местоположение границы Γ_ε .

5. Условия безотрывности и полного отрыва кромки штампа от поверхности основания.

Нетрудно видеть, что контактное давление (2.2) на ω_0 оказывается положительным, если $\delta_1 - (\frac{8}{3})Aa^2 \cos 2\sigma \geq 0$ для $\sigma \in [0, 2\pi)$ или $\delta_1 \geq (\frac{8}{3})Aa^2$. Следовательно, условие полного контакта оказывается таким (см. также [12], § 1.5.2):

$$\delta_0 + \varepsilon(\frac{8}{3})Aa^2 \leq \delta_\varepsilon \quad (5.1)$$

Отметим, что граница (5.1) в точности совпадает с получаемой по асимптотической формуле (4.6). Действительно, если будет выполнено неравенство (5.1), то функция (4.6) будет тождественно-равной нулю.

С другой стороны, формула (4.6) предсказывает отрыв всей кромки штампа от упругого основания при

$$\delta_\varepsilon \leq \delta_0 - \varepsilon(\frac{8}{3})Aa^2 \quad (5.2)$$

Сравним результат (5.2) с точным, получаемым по формулам Герца ([13], гл. V, § 6.5). В данном случае площадка контакта ограничена эллипсом с большей полуосью a и эксцентриситетом e , определяемым из уравнения

$$\frac{(1-e^2)[K(e)-E(e)]}{E(e)-(1-e^2)K(e)} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Используя разложения полных эллиптических интегралов K и E для малых значений модуля (см., например, [14]), при $\varepsilon \rightarrow 0$ находим

$$e^2 = (\frac{8}{3})\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

С помощью этого соотношения из уравнения

$$a = \sqrt{\frac{\delta_\varepsilon}{2A} \left(\frac{E(e)}{K(e)(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

вычисляем асимптотику величины перемещения штампа

$$\delta_\varepsilon = 2Aa^2 - \varepsilon(\frac{8}{3})Aa^2 + O(\varepsilon^2) \quad (5.3)$$

Формула (5.3) при учете (1.2) в главном согласуется с оценкой (5.2).

6. Заключение. В окрестности возмущенного участка границы контакта возникает явление плоского пограничного слоя. Здесь для контактного давления (согласно соотношениям (3.2), (4.2)) верна формула

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) \approx -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} k^0(\sigma) \sqrt{y_1 - h_\varepsilon(\sigma)}$$

где $y_1 \geq h_\varepsilon(\sigma)$.

Следует отметить, что существенным моментом при асимптотическом решении задачи оказывается то обстоятельство, что в случае $\varepsilon = 0$ контактное давление обра-

щается в нуль вдоль всей границы Γ_0 . В задаче об отрыве от упругого основания кромки штампа, имеющего плоское основание (см. [15, 16]), требуются более сложные построения. Заметим также, что в окрестностях точек схода поверхности основания с кромки штампа асимптотическая формула (4.5), по-видимому, не описывает локальное поведение границы Γ_ε .

В рассматриваемой задаче поверхность штампа представляет собой возмущение кругового параболоида эллиптическим. Описанным ранее методом [5, 6] аналогично можно изучить случай возмущения, например, поверхностью четвертого порядка.

Автор благодарит С.А. Назарова за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0876).

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М., Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1955. 492 с.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
4. Ковура А.Б., Моссаковский В.И. Контактная задача с полунеизвестной границей области контакта // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 106–111.
5. Назаров С.А. Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
6. Назаров С.А. О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 115–126.
7. Ростовцев Н.А. Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 77–82.
8. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. Van-Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: L.: Acad. Press, 1964. = Ван-Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
10. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
11. Mazja W.G., Nazarov S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestör ten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 430 s.
12. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
13. Лурье А.И. Теории упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
14. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
15. Рвачев В.Л., Проценко В.С. О структуре решения контактной задачи с наклонным штампом // Доп. АН УССР. Сер. А. 1970. № 11. С. 1023–1026.
16. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.