

УДК 539.3

© 2000 г. А.А. Гусенкова, Н.Б. Плещинский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРАХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ДЕФЕКТОМ

Построены комплексные потенциалы с логарифмическими особенностями в ядрах для упругих тел с дефектом вдоль гладкой дуги. Методом сопряжения Н.И. Мусхелишвили получены сингулярные интегральные уравнения основных граничных задач плоской теории упругости. Рассмотрены примеры. Численные решения интегральных уравнений найдены методом Бубнова – Галеркина.

1. Постановка задачи. Пусть упругая среда заполняет ограниченную замкнутой линией L плоскую односвязную область D^+ с дефектом (разрезом или тонким включением) вдоль гладкой разомкнутой дуги ab , область D^- дополняет D^+ до полной плоскости.

По формулам Колосова – Мусхелишвили ([1], § 32) при отсутствии объемных сил напряжения и перемещения могут быть выражены через две аналитические в рассматриваемой области функции (комплексные потенциалы). Согласно принципам математической теории трещин, построенной в работах В.В. Панасюка, М.П. Саврука и др. (см., например, [2]), *комплексными потенциалами для упругого тела с дефектом вдоль дуги ab* назовем функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, аналитические в области D^+ комплексной плоскости с разрезом, предельные значения которых на ab удовлетворяют условиям, задающим скачки напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} & [k^{m-1}\varphi(t) + (-1)^{m-1}(\overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})]^+ - [k^{m-1}\varphi(t) + (-1)^{m-1}(\overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})]^- = \\ & = (k+1) \int_{at} u_m(\tau) d\tau, \quad t \in ab \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $k > 0$ – некоторая вещественная постоянная ($k = 3 - 4\mu$ в случае плоской деформации или $k = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния, μ – коэффициент Пуассона), $m = 1, 2$ и $u_m(\cdot)$ – некоторые определенные на ab функции, причем

$$\int_{ab} u_m(\tau) d\tau = 0 \quad (1.2)$$

Будем считать, что функции $u_m(\cdot)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любой части дуги ab , не содержащей концов, а в точках a и b могут иметь особенности интегрируемого порядка (принадлежат классу H^* по Н.И. Мусхелишвили).

При выводе выражений комплексных потенциалов будем использовать рациональную функцию $z = \omega(\zeta)$, конформно отображающую единичный круг Δ^+ с разрезом вдоль гладкой дуги $\alpha\beta$ на область D^+ с разрезом вдоль гладкой дуги ab . Пусть при этом внешность круга Δ^- переходит в область D^- , единичная окружность Λ переходит в линию L , а направления обхода на L и Λ выбраны так, что область D^+ (D^-) распо-

ложена слева (справа) от L в плоскости комплексной переменной z , а область Δ^+ (Δ^-) – слева (справа) от Λ в плоскости переменной ζ .

2. Комплексные потенциалы для упругих тел с дефектом вдоль гладкой дуги. Пусть рассматриваемые в разрезанных по ab областях аналитические функции непрерывно продолжимы на все точки дуги, кроме, может быть, ее концов, и на границу области L .

Лемма. Если предельные значения аналитических в разрезанной по дуге ab области D^+ функций $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, удовлетворяют условию

$$\varphi^+(t) + \overline{t\varphi'^+(t)} + \overline{\psi^+(t)} = 0, \quad t \in L \quad (2.1)$$

и условиям (1.1), (1.2), то

$$\varphi(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\omega(\zeta)) + \Phi_0(\zeta), \quad \psi(\omega(\zeta)) = \psi_1(\omega(\zeta)) + \Psi_0(\zeta) \quad (2.2)$$

где

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau \quad (2.3)$$

$$\psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \frac{\bar{\tau} d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_2(\tau)} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\bar{\tau} \quad (2.4)$$

$$U_1(\tau) = u_1(\tau) + u_2(\tau), \quad U_2(\tau) = ku_1(\tau) - u_2(\tau)$$

$$\Phi_0(\zeta) = F(\zeta), \quad \Psi_0(\zeta) = -\overline{F(1/\bar{\zeta})} - \frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} F'(\zeta), \quad \zeta \in \Delta^+$$

и $F(\cdot)$ – решение задачи о скачке

$$F^+(\tau) - F^-(\tau) = -f(\omega(\tau)), \quad \tau \in \Lambda, \quad f(t) = \varphi_1^+(t) + \overline{t\varphi_1'^+(t)} + \overline{\psi_1^+(t)}, \quad t \in L \quad (2.5)$$

Доказательство. Можно проверить, что функции $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ удовлетворяют условиям (1.1), (1.2) [3]. Тогда функции $\Phi_0(\zeta) = \varphi(\omega(\zeta)) - \varphi_1(\omega(\zeta))$, $\Psi_0(\zeta) = \psi(\omega(\zeta)) - \psi_1(\omega(\zeta))$ не имеют особенностей на дуге $\alpha\beta$. Предельные значения на Λ аналитических в Δ^+ функций $\Phi_0(\cdot)$, $\Psi_0(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$\Phi_0^+(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi_0^+(\tau)} + \overline{\Psi_0^+(\tau)} = -f(\omega(\tau)), \quad \tau \in \Lambda$$

Используем метод сопряжения Н.И. Мусхелишвили [1]. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(\zeta) = \begin{cases} \Phi_0(\zeta), & \zeta \in \Delta^+; \\ -\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(1/\bar{\zeta})} \overline{\Phi_0'(1/\bar{\zeta})} - \overline{\Psi_0(1/\bar{\zeta})}, & \zeta \in \Delta^- \end{cases}$$

аналитическую в Δ^+ и Δ^- и непрерывно продолжимую на Λ слева и справа. Ее предельные значения на Λ удовлетворяют условию (2.5) ($1/\tau = \tau$ на Λ). Очевидно, что $\omega'(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \Delta^+$ и $\omega'(\tau) \neq 0 \forall \tau \in \Lambda$, если контур Λ имеет непрерывно изменяющуюся кривизну ([1], § 47).

Решение задачи о скачке (2.5) будем искать в классе функций, которые могут иметь полюсы в бесконечно удаленной точке и в тех точках плоскости ζ , где они имеются у функции $\omega(\cdot)$ ([1], § 125). В зависимости от вида области D^+ это решение, а значит и потенциалы $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, могут содержать одну или две комплексные или вещественные произвольные постоянные. Если D^+ – ограниченная область, то у функции $\omega(\cdot)$ в области Δ^+ полюсов нет. Если же область D^+ неограничена, то у функции $\omega(\cdot)$ может быть простой полюс в Δ^+ или на Λ . В общем случае $F(\cdot) = -F_0(\cdot) + G(\cdot)$, где $G(\cdot)$ –

некоторая рациональная функция, а $F_0(\cdot)$ – интеграл типа Коши с плотностью $f(\omega(\cdot))$

$$F_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \int_{\tau b} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{1}{(\xi - \omega(x))(x - \zeta)} dx \right] d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \int_{\tau b} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{1}{(\bar{\xi} - \overline{\omega(x)})(x - \zeta)} dx \right] d\bar{\xi} d\tau -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\tau - \omega(x)}{\bar{\tau} - \overline{\omega(x)}} \frac{dx}{x - \zeta} \right] d\bar{\tau}$$

Все внутренние интегралы могут быть вычислены по формуле Коши (при учете равенства $1/\bar{x} = x$ при $x \in \Lambda$).

Существенно, что $\omega(\cdot)$ – рациональная функция. Только рациональная функция, определенная в области Δ^+ , может быть естественным образом аналитически продолжена через единичную окружность на всю комплексную плоскость (за исключением, может быть, конечного числа точек, где у нее полюсы). При этом метод сопряжения допускает, что функция $\Psi_0(\cdot)$ может быть определена в области Δ^- различными способами. Заметим также, что если область D^+ неограничена, то иногда удобнее использовать отображение внешности единичного круга Δ^- на D^+ .

Комплексные потенциалы для упругих плоскости, полуплоскости и круга с дефектом вдоль гладкой дуги ab можно получить как частные случаи формул (2.2).

Для полной плоскости $\Phi_0(\cdot) = P$, $\Psi_0(\cdot) = Q$, где P, Q – произвольные комплексные постоянные. При этом в формулах (2.2) вместо $\omega(\zeta)$ стоит переменная z (напомним, что полная плоскость не отображается конформно на какую-либо ограниченную область [4]). Если задать значения функций $\phi_1(\cdot)$ и $\psi_1(\cdot)$ в некоторой точке z_0 , то постоянные P и Q однозначно определяются. Например, если $z_0 = \infty$, то $P = \phi_1(\infty)$, $Q = \psi_1(\infty)$.

В случае полуплоскости $\text{Im } z < 0$

$$\omega(\zeta) = i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$$

Если функции $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ непрерывно продолжимы на все точки вещественной оси, включая бесконечно удаленную точку, то

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \frac{\tau - \bar{\tau}}{\bar{\tau} - z} d\bar{\tau} + R \quad (2.6)$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \frac{\bar{\tau}}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \frac{z}{\bar{\tau} - z} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \left[\int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - z} + \frac{z(\tau - \bar{\tau})}{(\bar{\tau} - z)^2} \right] d\bar{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_2(\tau)} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\bar{\tau} - \bar{R} \quad (2.7)$$

Произвольная комплексная постоянная R определяется однозначно, если задать значение одной из функций $\phi(\cdot)$ или $\psi(\cdot)$ в некоторой точке z_0 полуплоскости или вещественной оси.

Отметим, что если полуплоскость не имеет дефекта, то $\phi(z) = R$, $\psi(z) = -\bar{R}$, где R – произвольная комплексная постоянная. При этом $\phi(z) + \overline{\psi(z)} = 0 \quad \forall z \in D^+ \cup L$.

Комплексные потенциалы для полуплоскости построены непосредственно методом сопряжения в [3].

Для круга $|z| < R$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - R^2/z} - \frac{\bar{\tau}z}{2R^2} \right] d\tau - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \left[\frac{\tau - z}{\bar{\tau} - R^2/z} + \frac{\tau z}{2R^2} \right] d\bar{\tau} + iSz - \bar{T} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \frac{\bar{\tau}d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \frac{(\bar{\tau} - \bar{b})(\bar{\tau}b z - \bar{\tau}R^2 - \bar{b}R^2)}{(\bar{\tau}z - R^2)(\bar{b}z - R^2)} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \left[\int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - R^2/z} + \frac{(\tau\bar{\tau} - R^2)(\bar{\tau}z - 2R^2)}{(\bar{\tau}z - R^2)^2} \right] d\bar{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \overline{U_2(\tau)} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\bar{\tau} + T \end{aligned} \quad (2.9)$$

где S и T – произвольные вещественная и комплексная постоянные.

Если рассматривать круг без разреза, то $\varphi(0) + \overline{\psi(0)} = 0$, $\operatorname{Re} \varphi'(0) = 0$ и $\varphi(z) = iSz - \bar{T}$, $\psi(z) = T$, где S и T – произвольные вещественная и комплексная постоянные.

3. Интегральные уравнения основных граничных задач. Рассмотрим первую и вторую основные граничные задачи для упругой среды с дефектом вдоль дуги ab , когда на берегах разреза заданы напряжения (несамоуравновешенные усилия) или перемещения (в интегральной форме)

$$[k^{m-1}\varphi(t) + (-1)^{m-1}(\overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})]^\pm = \int_{at} f_m^\pm(\tau) d\tau + A_m, \quad t \in ab \quad (3.1)$$

Постоянные A_m определяют напряжение ($m = 1$) и перемещение ($m = 2$) в точке a дуги.

Первая (вторая) основная граничная задача сводится к случаю, когда $f_1^+(\cdot) = f_1^-(\cdot)$ ($f_2^+(\cdot) = f_2^-(\cdot)$) [5].

Непосредственно из леммы следует

Теорема. Первая и вторая основные граничные задачи для упругого тела с дефектом вдоль дуги ab эквивалентны интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} & [k^{m-1}\varphi(\omega(t)) + (-1)^{m-1}(\overline{\omega(t)\varphi'(\omega(t))} + \overline{\psi(\omega(t))})]^\pm + \\ & + [k^{m-1}\varphi(\omega(t)) + (-1)^{m-1}(\overline{\omega(t)\varphi'(\omega(t))} + \overline{\psi(\omega(t))})]^\mp = \\ & = \int_{a\omega(t)} [f_m^+(\tau) + f_m^-(\tau)] d\tau + 2A_m, \quad \omega(t) \in ab \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $u_1(t) = f_1^+(t) - f_1^-(t)$, $u_2(\cdot)$ – искомая функция (первая граничная задача) и $u_2(t) = f_2^+(t) - f_2^-(t)$, $u_1(\cdot)$ – искомая функция (вторая граничная задача). Здесь $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ – комплексные потенциалы (2.2).

В левые части уравнений (3.2) специально не подставлены предельные значения слева и справа на дефекте комплексных потенциалов. Пока не задана область D^+ , нельзя записать явные выражения функций $\Phi_0(\cdot)$, $\Psi_0(\cdot)$. Поэтому на первый взгляд уравнения (3.2) не похожи на интегральные.

Рассмотрим подробнее случаи плоскости, полуплоскости и круга с дефектом вдоль ab . Всюду, как и в формулировке теоремы, в случае первой граничной задачи ($m = 1$)

$u_1(t) = f_1^+(t) - f_1^-(t)$, $u_2(\cdot)$ – искомая функция, а в случае второй граничной задачи ($m = 2$) $u_2(t) = f_2^+(t) - f_2^-(t)$, $u_1(\cdot)$ – искомая функция.

Для полной плоскости

$$\begin{aligned} & \frac{k^{m-1}}{\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} - \frac{(-1)^{m-1}}{\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} + \frac{(-1)^{m-1}}{\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} d\bar{\tau} = \\ & = \int_{at} [f_m^+(\tau) + f_m^-(\tau)] d\tau + 2(A_m - k^{m-1}P - (-1)^{m-1}\bar{Q}), \quad t \in ab \end{aligned} \quad (3.3)$$

Интегральные уравнения (3.3) – полные аналоги уравнений (I.78) и (I.81) из [2]. Существенное отличие состоит в том, что ядра уравнений (I.78) и (I.81) содержат особенности первого порядка, а ядра уравнений (3.3) – особенности логарифмического типа.

Граничным интегральным уравнениям, в том числе уравнениям с логарифмическими особенностями в ядрах, к которым приводятся задачи теории упругости, посвящен обзор [9]. Отметим, что логарифмические особенности ядер уравнений (3.3) содержатся в интегралах с ядром Коши с переменным пределом. Уравнения с такими ядрами исследовались ранее [6, 7].

В случае полуплоскости $\text{Im } z < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \left[k^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} - (-1)^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - \bar{t}} + \frac{(t - \bar{t})(\bar{\tau} - \tau)}{(\tau - \bar{t})^2} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \left[k^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - t} - (-1)^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{t}} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \left[(-1)^{m-1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} - k^{m-1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} \right] d\bar{\tau} - \frac{(-1)^{m-1}}{\pi i} \int_{ab} \overline{U_2(\tau)} \frac{t - \bar{t}}{\tau - \bar{t}} d\bar{\tau} = \\ & = \int_{at} [f_m^+(\tau) + f_m^-(\tau)] d\tau + 2A_m + 2(1 - m)(k + 1)R, \quad t \in ab \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для круга $|z| < R$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{ab} U_1(\tau) \left[k^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - t} - (-1)^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - R^2/\bar{t}} - \right. \\ & \left. - (-1)^{m-1} \frac{(\tau\bar{\tau} + t\bar{t})(\tau\bar{t} - 2R^2) + R^2(\bar{\tau}t - \tau\bar{t} + 2R^2)}{(\tau\bar{t} - R^2)^2} + (-1)^{m-1} \frac{\bar{\tau}t}{2R^2} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} U_2(\tau) \left[k^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - R^2/t} - (-1)^{m-1} \int_{\tau b} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - t} - k^{m-1} \frac{\bar{\tau}t}{2R^2} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \overline{U_1(\tau)} \left[(-1)^{m-1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}} - k^{m-1} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - R^2/t} - k^{m-1} \frac{\tau t}{2R^2} \right] d\bar{\tau} + \\ & + \frac{(-1)^{m-1}}{\pi i} \int_{ab} \overline{U_2(\tau)} \left[\frac{tR^2}{\bar{t}(\tau\bar{t} - R^2)} - \frac{(\tau - b)(\tau b\bar{t} - \tau R^2 - bR^2)}{(\tau\bar{t} - R^2)(b\bar{t} - R^2)} + \frac{\tau t}{2R^2} \right] d\bar{\tau} = \\ & = \int_{at} [f_m^+(\tau) + f_m^-(\tau)] d\tau + 2A_m + 2(m - 1)(k + 1)(\bar{T} - iSt), \quad t \in ab \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Метод Бубнова – Галеркина. Обсудим некоторые результаты, полученные при численном решении методом Бубнова – Галеркина интегральных уравнений (ИУ) основных граничных задач для упругих тел с дефектами.

Прежде всего отметим, что логарифмические особенности в ядрах ИУ содержатся в интегралах типа Коши с переменными пределами. Как следует из общей теории ИУ

с логарифмической особенностью в ядрах [6, 7], легко перейти к эквивалентным сингулярным ИУ с ядром Коши относительно первообразных функций $u_m(\cdot)$. Такое преобразование ИУ сводится к интегрированию по частям в интеграле с логарифмическим ядром

$$\int_{ab} u_1(\tau) \int_{\tau b} \frac{d\xi}{\xi - z} d\tau = \int_{ab} \frac{w(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad w(\xi) = \int_{a\xi} u_1(\tau) d\tau$$

а не к дифференцированию обеих частей ИУ.

Ограничимся случаем, когда дефекты упругого тела расположены вдоль отрезков вещественной оси комплексной плоскости. С помощью замены переменных всегда можно перейти от произвольного отрезка к стандартному отрезку $[-1, +1]$ (так удобнее проводить вычисления и сравнивать результаты расчета при различных исходных данных).

Для ИУ с логарифмической особенностью в ядре метод Бубнова – Галеркина состоит в следующем. Приближенное решение ИУ

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t) \left[\ln \frac{1}{|t-x|} + r(t, x) \right] dt = g(x), \quad x \in [-1, +1]$$

представим в виде

$$\varphi(t) \approx \varphi_N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{j=1}^N a_j T_{j-1}(t)$$

Тогда для неизвестных a_j ($j = 1, \dots, N$) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_j (s_{kj} + r_{kj}) = g_k, \quad k = 1, \dots, N$$

$$s_{kj} = \begin{cases} k = j = 1: & \pi^2 \ln 2; \\ k = j \neq 1: & \frac{\pi^2}{2k}; \\ k \neq j: & 0 \end{cases}$$

$$r_{kj} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r(t, x) \frac{T_{j-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_{k-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dt dx$$

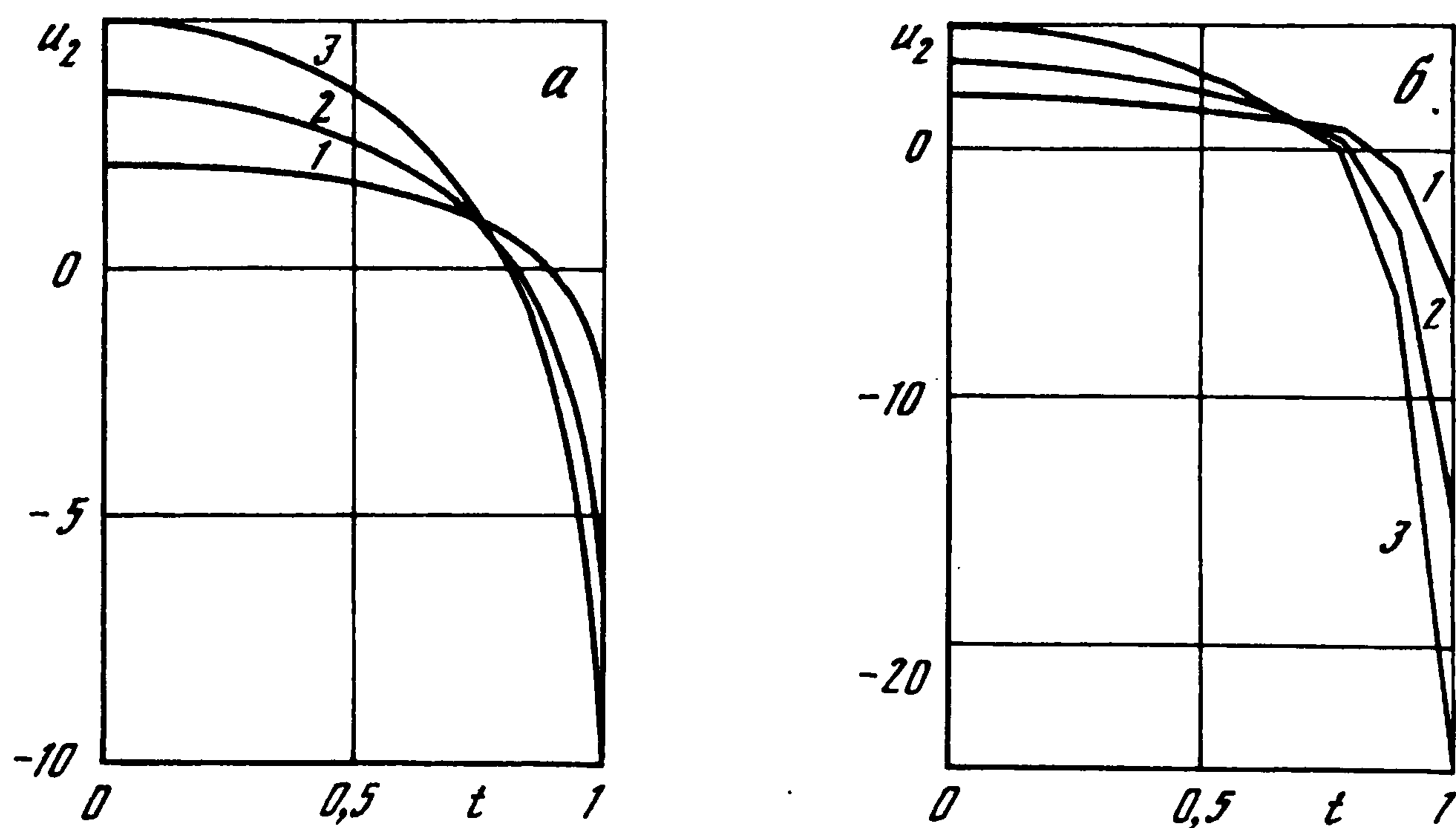
$$g_k = \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{T_{k-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad k, j = 1, \dots, N$$

все интегралы удобно вычислять приближенно по квадратурной формуле Эрмита.

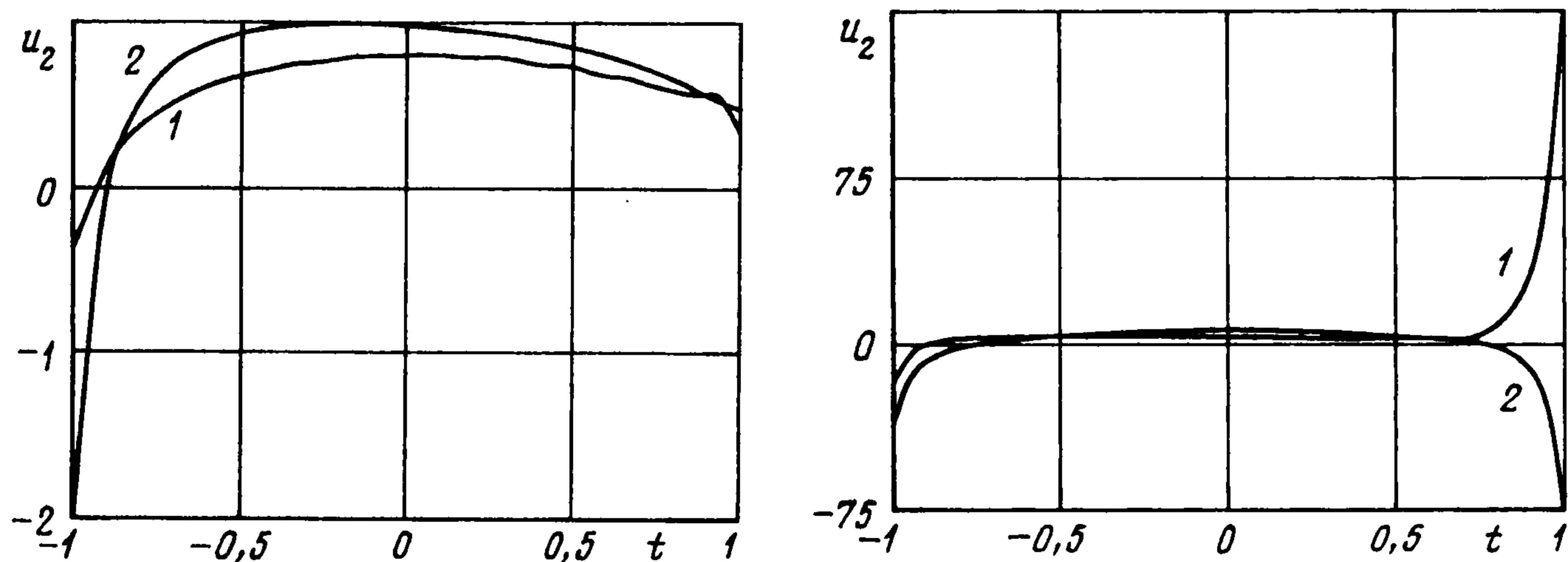
Для сингулярных ИУ с ядром Коши, в зависимости от индекса, т.е. от класса искомого решения, могут быть выбраны другие весовые функции и другие системы ортогональных многочленов. Теоретическое обоснование метода дано, например, в [8].

Отметим, что при приближенном решении ИУ с логарифмическими ядрами методом Бубнова – Галеркина значения искомой функции на концах отрезка не могут быть вычислены, даже если в этих точках у решения особенности нет. Для эквивалентных уравнений с ядром Коши значения решения в концевых точках в принципе могут быть найдены, но во всех рассмотренных ниже случаях при приближении к точкам ± 1 графики приближенного решения круто уходят вниз.

Число N неизвестных коэффициентов разложения приближенного решения, при котором численный алгоритм устойчив, зависит от близости дефекта к границе рассматриваемой области, к особой точке или от взаимного расположения отдельных частей дефекта (если дефект состоит из нескольких отрезков). Оказалось, что для ИУ с ядром Коши метод Бубнова – Галеркина более устойчив.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 3

На фиг. 1 представлены графики приближенных решений ИУ с логарифмической особенностью в ядре (а) и с ядром Коши (б) первой граничной задачи для круга $|z| < R$ с дефектом вдоль отрезка вещественной оси (длина дефекта увеличивается в направлении от кривой 1 к кривой 3). В связи с симметрией показана лишь область $t \geq 0$. Аналогичные графики получены для полной плоскости и для полуплоскости $\text{Re } z > 0$ с таким же дефектом. На берегах разреза была задана самоуравновешенная нагрузка, при которой правая часть ИУ становилась равной $i(b-t)(t-a)$. Размах графиков зависит только от длины дефекта, если решение устойчиво. В случае круга на результаты счета не влияет, симметрично или нет относительно начала координат расположен дефект. Но при приближении его концов к точкам окружности соответствующие значения решения неограниченно возрастают.

Результаты численного решения некоторых из рассмотренных ИУ методом механических квадратур приведены в [3].

На фиг. 2 показан график приближенного решения ИУ первой граничной задачи для области D^+ , ограниченной кардиоидой, когда трещина выходит на границу (кривая 2 соответствует большей длине дефекта). Взаимно однозначное соответствие между кардиоидой на плоскости z и единичной окружностью на плоскости ζ устанавливает функция $z = \zeta + \zeta^2/2$, при этом разрез вдоль отрезка вещественной оси

переходит в разрез вдоль отрезка оси. Здесь возможны два варианта расчетного алгоритма: или непосредственно для исходного уравнения на плоскости z , или для преобразованного уравнения на плоскости ζ (легко записать обратное отображение). Отметим, что график решения несимметричен. При приближении дефекта к точке возврата $(-0,5; 0)$ устойчивость алгоритма нарушается.

В случае, когда дефект упругого тела состоит из нескольких отрезков, нужно на каждом из них отдельно записать разложение искомой функции по полиномам Чебышева. Тогда общее число неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений увеличивается пропорционально числу участков дефекта. На фиг. 3 даны графики решения уравнения с логарифмической особенностью в ядре для случая полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, когда начало одного дефекта и конец другого совпадают (кривая 2 соответствует большей длине дефекта). Если же дефекты не имеют общей точки, то графики решения уравнения, как и следовало ожидать, идентичны графикам на фиг. 1, а.

На всех графиках вдоль оси ординат отложены значения функции $u_2(\cdot)$, по которой вычисляются смещения точек дефекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1981. 324 с.
3. *Плецинский Н.Б.* Интегральные уравнения с логарифмической особенностью в ядре для граничных задач теории упругости для плоскости, полуплоскости и круга с дефектом вдоль гладкой дуги: Препринт № 97-1. Казань: Казан. мат. о-во, 1997. 22 с.
4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
5. *Партон Б.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
6. *Плецинский Н.Б.* Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. 154 с.
7. *Pleshchinskii N.B.* Some classes of singular integral equations solvable in a closed form and their applications // Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical. 1991. V. 256. P. 246–256.
8. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. 288 с.
9. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техн. Совр. проблемы матем. Фундам. направления. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1988. С. 131–228.