

УДК 593.3

© 2000 г.

М.А. Задоян

УСЛОВИЕ МАЛОНАПРЯЖЕННОСТИ СОСТАВНОГО КЛИНА ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

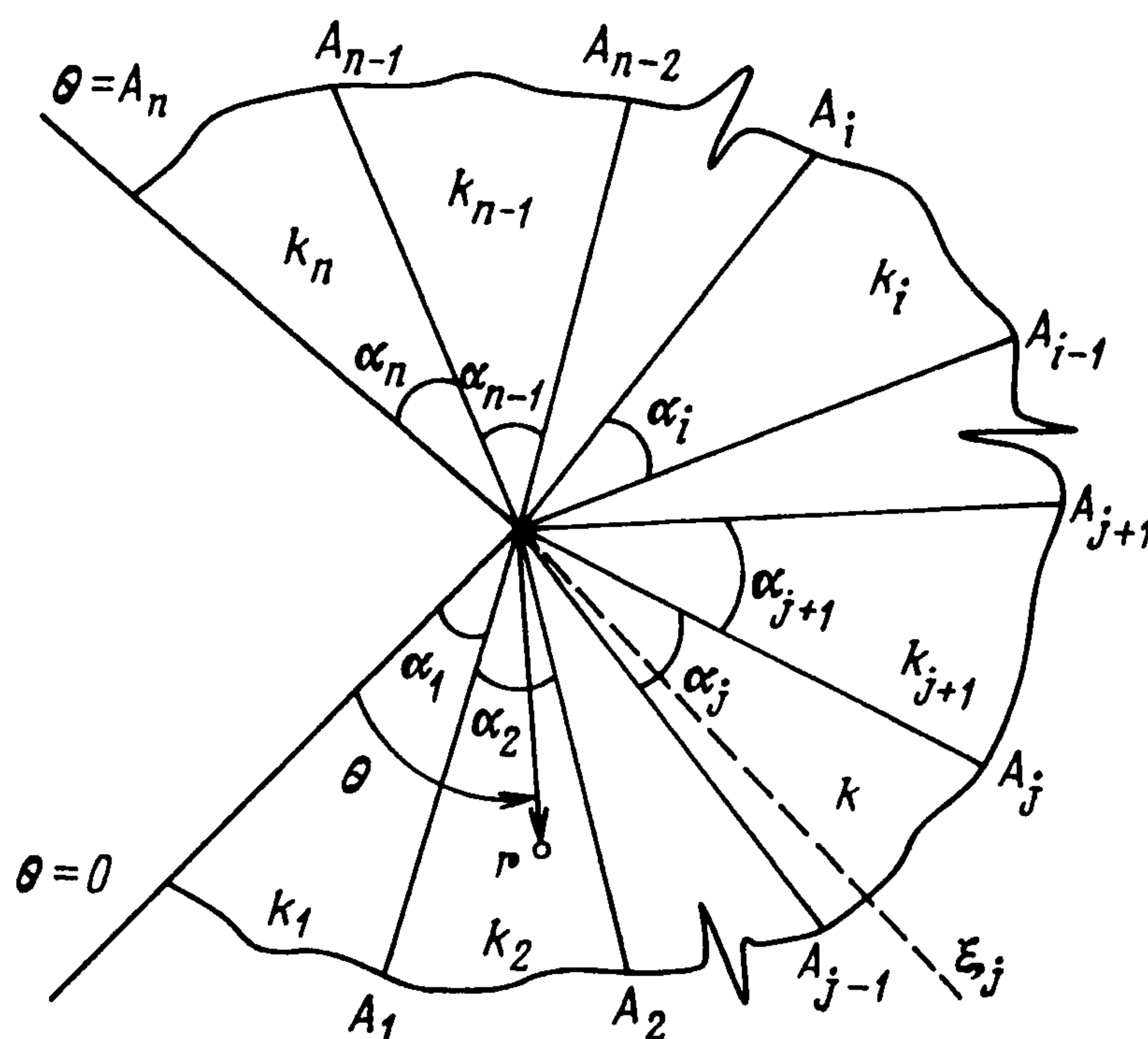
В пространстве физических и геометрических параметров составного клина из нелинейных упругих материалов построены области малонапряженности, точкам которых соответствуют нулевые напряженные состояния на крае контактных поверхностей. Когда эти параметры заданы, по указанным зонам можно судить о прочности соединения. Если же известны значения лишь части параметров, то остальные параметры при оформлении края выбираются так, чтобы удовлетворялись условия малонапряженности. В частности, построена трехмерная область малонапряженности, когда клин изготовлен из трех упрочняющихся по степенному закону материалов.

Ранее исследовался случай линейно-упругих клиньев из двух материалов в [1], для материалов со степенным упрочнением – [2, 3].

1. Общий случай. Исследуется напряженное состояние при продольном сдвиге в окрестности угловой точки составного тела, изготовленного из n клиновидных призм, материалы которых упрочняются по степенному закону

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$$

причем σ_0 и ε_0 – интенсивности напряжений и деформации, параметр m для всех материалов считается одинаковым, а модуль деформации k – различным. Углы при вершинах составляющих клиньев обозначим через α_i , а модули деформации материалов – соответственно через k_i , причем $i = 1, 2, \dots, n$ (фиг. 1). Величины в интервалах $A_{i-1} \leq \theta \leq A_i$, где $A_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$, $A_0 = 0$, снабдим индексами i .



Фиг. 1

Напряжения и перемещения в указанных интервалах ищем в форме

$$\tau_{rzi} = \lambda k_i^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad \tau_{rzi} = k_i r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i$$

$$w_i = r^\lambda f_i, \quad \chi_i = (f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2)^{(m-1)/2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Система функции $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ определяет собственную функцию, а λ – собственное значение поставленной задачи. Подставляя компоненты напряжений из (1.1) в третье уравнение равновесия, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно f_i

$$(f_i' \chi_i)' + \eta f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m] \quad (1.2)$$

При граничных условиях первого рода имеем

$$f_1'(0) = f_n'(A_n) = 0 \quad (1.3)$$

На контактных поверхностях

$$f_i = f_{i+1}, \quad f_i' \chi_i = \delta_i f_{i+1}' \chi_{i+1} \quad \text{при} \quad \theta = A_i \quad (1.4)$$

$$\delta_i = k_{i+1} / k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Вводя новую функцию $\psi_i(\theta, \lambda)$

$$f_i' = f_i \psi_i \quad (1.5)$$

из (1.2) получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\psi_i' = -\frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + \omega^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 p}; \quad \omega^2 = \lambda(\lambda + p - 1), \quad p = \frac{1}{m} \quad (1.6)$$

Условия на контактных поверхностях согласно (1.3) будут

$$\mu_i(\mu_i^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} - \delta_i \nu_i(\nu_i^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.7)$$

$$\mu_i = \psi_i(A_i, \lambda), \quad \nu_i = \psi_{i+1}(A_i, \lambda)$$

Допускаем что внутри интервала одного из промежуточных клиньев ($i = j$) перемещение меняет знак. Тогда граничные условия для уравнения (1.6) будут

$$\psi_1(0) = \psi_n(A_n) = 0 \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.6) представится следующим образом:

$$F(\psi_i) = H_i - \theta, \quad i \neq j; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq 1, \quad j \neq n \quad (1.9)$$

$$F(\psi_{j1}) = H_j - \theta \quad \text{при} \quad A_{j-1} \leq \theta \leq \xi_j$$

$$F(\psi_{j2}) = \xi_j - \theta \quad \text{при} \quad \xi_j \leq \theta \leq A_j$$

$$F(x) = \arctg \frac{x}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{x}{\omega}, \quad \xi_j = H_j + \frac{1}{2} \Lambda, \quad \Lambda = \pi \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right)$$

Здесь H_i и H_j произвольные постоянные, а также использованы предельные переходы справа и слева к точке $\theta = \xi_j$. Вводя новые неизвестные постоянные $\varphi_i = H_i - A_{i-1}$, причем $\varphi_1 = 0$, $\varphi_n = \alpha_n$, находим

$$F(\mu_i) = \varphi_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad i \neq j \quad (1.10)$$

$$F(\mu_j) = \varphi_j - \alpha_j + \Lambda, \quad F(\nu_i) = \varphi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.11)$$

При помощи последнего уравнения исключив φ_i в первом уравнении (1.10) и (1.11), приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} F(\mu_1) &= -\alpha_1 \\ F(v_{i-1}) - F(\mu_i) &= \alpha_i, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ F(v_{j-1}) - F(\mu_j) &= \alpha_j - \Lambda, \quad F(v_{n-1}) = \alpha_n \end{aligned} \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12), совместно с (1.7), составляют систему из $2n - 1$ уравнений с $2n - 1$ неизвестными постоянными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}; v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; \lambda$, позволяющую, в принципе, при заданных значениях параметров определить собственное значение

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}; m)$$

Если точка ξ_j находится внутри интервала n -го клина, т.е. $j = n$, то, принимая в первом уравнении (1.11) $\mu_j = \mu_n = 0$, определяем $\varphi_n = \alpha_n - \Lambda$. Первые два уравнения системы (1.12) остаются без изменения, последнее уравнение снимается, а предпоследнее принимает вид

$$F(v_{n-1}) = \alpha_n - \Lambda$$

В последних трех уравнениях (1.9) следует принять $H_j = \varphi_n + A_{n-1}$

Определение функции f_j . Введем обозначение

$$\Psi_k(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \psi_k d\theta$$

Интегрируя уравнения (1.5) и используя условия непрерывности функции f_i на контактных поверхностях, получаем

$$\begin{aligned} f_i &= f_1(0) \exp[\Psi_1(0, A_1) + \Psi_2(A_1, A_2) + \dots + \Psi_i(A_{j-1}, \theta)], \quad 1 \leq i \leq j-1 \\ f_i &= f_n(A_n) \exp[-\Psi_i(\theta, A_i) - \Psi_{i+1}(A_i, A_{i+1}) - \dots - \Psi_n(A_{n-1}, A_n)], \quad j+1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для j -го клина будем иметь

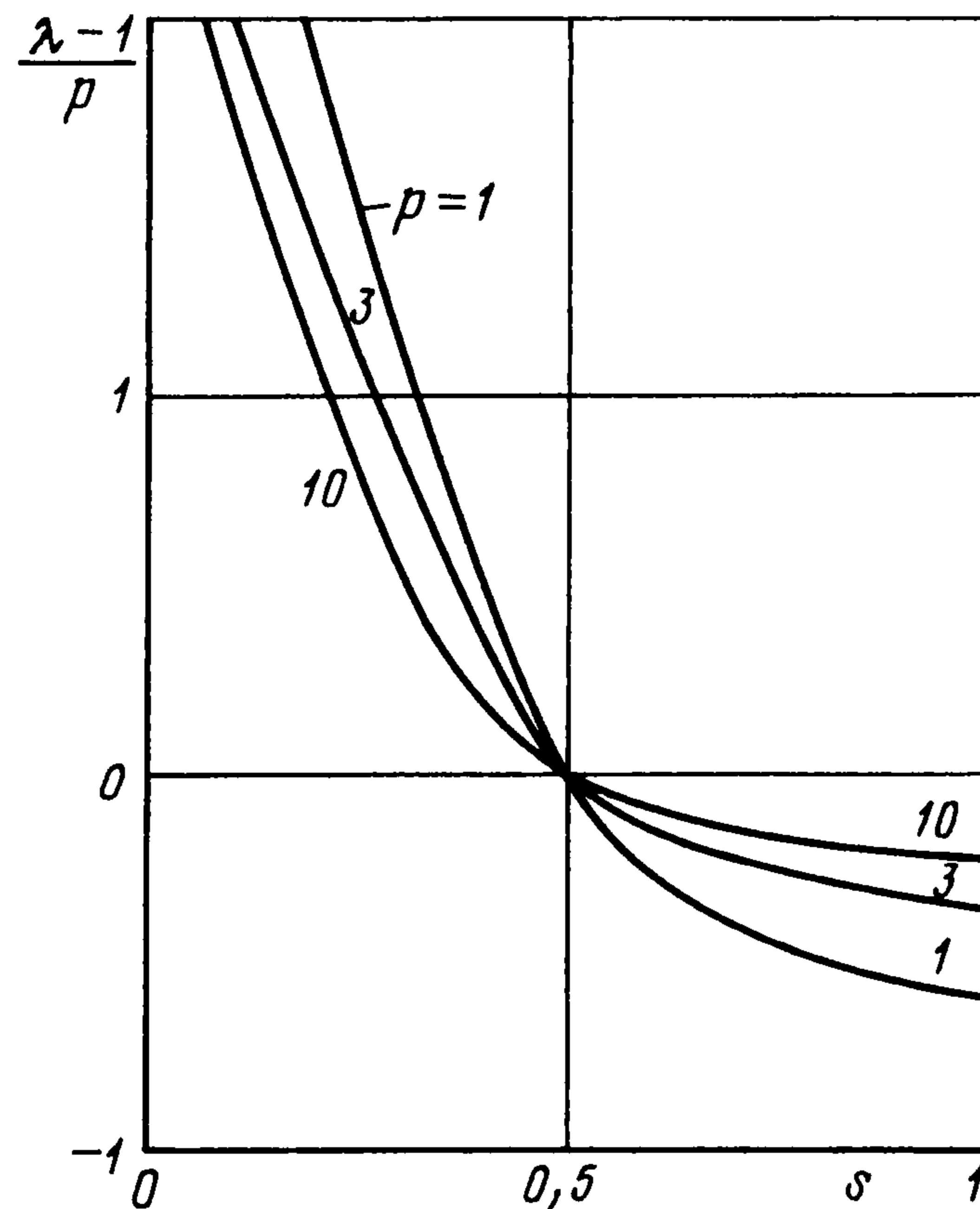
$$\begin{aligned} f_{j1} &= f_1(0) \exp[\Psi_1(0, A_1) + \Psi_2(A_1, A_2) + \dots + \Psi_{j1}(A_{j-1}, \theta)], \quad A_{j-1} \leq \theta \leq \xi_j \\ f_{j2} &= f_n(A_n) \exp[-\Psi_{j2}(\theta, A_j) - \Psi_{j+1}(A_j, A_{j+1}) - \dots - \Psi_n(A_{n-1}, A_n)], \quad \xi_j \leq \theta \leq A_j \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если точка ξ_j находится в одном из крайних клиньев, например в n -м клине, первые уравнения (1.13) и (1.14) сохраняются; при $j = n$ второе уравнение (1.13) теряет смысл, а вместо второго уравнения (1.14) будет

$$f_{n2} = f_n(A_n) \exp[-\Psi_{n2}(\theta, A_n)] \quad (1.15)$$

Таким образом, система функции f_i определяется с точностью до двух неизвестных постоянных $f_1(0)$ и $f_n(A_n)$. Одно из них можно исключить, используя очевидное условие сопряжения $f'_{j1}(\xi_j) = f'_{j2}(\xi_j)$. Для нахождения этих производных уравнение (1.2) при $i = j$ интегрируем почленно по θ — сначала от A_{j-1} по ξ_j , а потом от ξ_j по A_j . Далее, представляя выражения f_{j1} и f_{j2} из (1.14) в виде произведения постоянной и экспоненциальной функций, а затем подставляя их в указанное условие сопряжений, находим

$$\begin{aligned} f_n(A_n) &= -f_1(0) \exp[\Psi_1(0, A_1) + \Psi_2(A_1, A_2) + \dots + \Psi_{j-1}(A_{j-2}, A_{j-1}) + \\ &+ \Psi_{j+1}(A_j, A_{j+1}) + \Psi_{j+2}(A_{j+1}, A_{j+2}) + \dots + \Psi_n(A_{n-1}, A_n)] (T_{j1} / T_{j2})^p \end{aligned} \quad (1.16)$$



Фиг. 2

причем

$$T_{j1} = -(\Psi_{j1} N_{j1})_{A_{j-1}} + \eta \int_{A_{j-1}}^{\xi_j} N_{j1} \exp[m\Psi_{j1}(A_{j-1}, \theta)] d\theta$$

$$T_{j2} = (\Psi_{j2} N_{j2})_{A_j} + \eta \int_{\xi_j}^{A_j} N_{j2} \exp[-m\Psi_{j2}(\theta, A_j)] d\theta, \quad N_{ji} = (\psi_{ji}^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2}$$

При $j = n$ вместо (1.16) будем иметь

$$f_{n2}(A_n) = -f_1(0) \exp[\Psi_1(0, A_1) + \Psi_2(A_1, A_2) + \dots + \Psi_{n-1}(A_{n-2}, A_{n-1})]$$

Однородный клин. Если составляющие клинья сделаны из одинакового материала, т.е. $\delta_i = 1$, в уравнениях (1.7) принимаем $\mu_i = \nu_i$. Тогда из (1.10), (1.11) следует соотношение

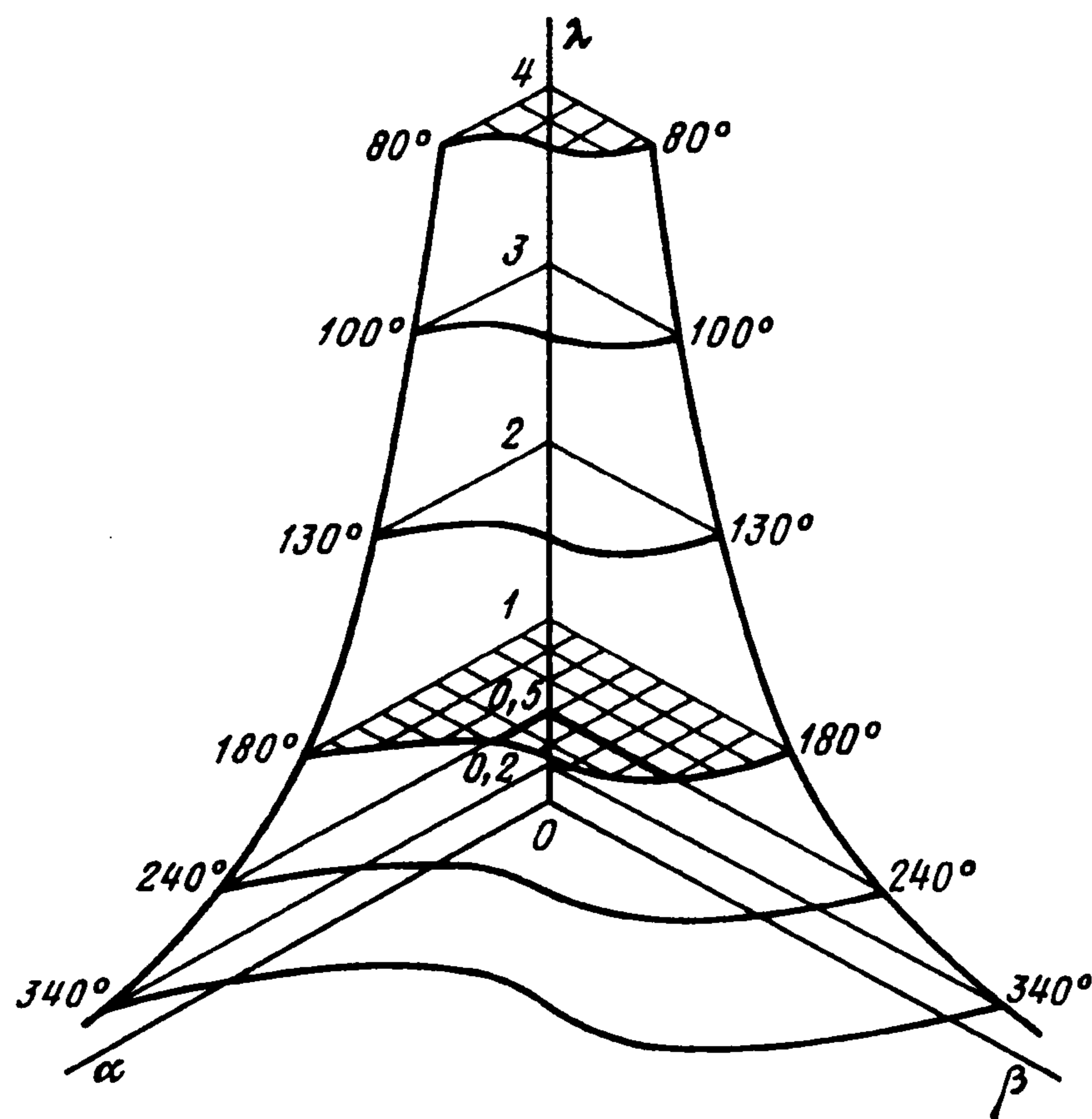
$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \alpha_i, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.17)$$

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j - \alpha_j + \Lambda \quad (1.18)$$

Из (1.13), задавая последовательно значения $i = 1, 2, \dots, j-1$, находим $\varphi_j = -A_{j-1}$. Далее, принимая последовательно $i = n-1, n-2, \dots, j+1$, из (1.17) получаем $\varphi_{j+1} = A_n - A_j$. Подставляя эти выражения в (1.18) и вводя обозначение $A_n = 2\pi s$, получим $\lambda - 1 = (1 - 2s)\omega$. Для полубесконечной щели, т.е. при $s = 1$, имеем $\lambda - 1 = -p/(p+1)$. Такой результат для плоской деформации впервые получен [4, 5] другими способами. В рассматриваемом случае для произвольного угла получаем (фиг. 2)

$$\lambda = \frac{2 + (p-1)(1-2s)^2 + (1-2s)\sqrt{(p-1)^2(1-2s)^2 + 4p}}{8s(1-s)} \quad (1.19)$$

Полученную формулу можно использовать также в случае защемленных краев и в случае при смешанных условиях, заменяя здесь s на $2s$ [9].



Фиг. 3

Отметим, что были исследованы [6–8] сингулярные напряжения в особых точках линейно-упругих плоских и пространственных тел.

Гиперповерхность конечных напряжений. Полагая в (1.10) – (1.13) $\lambda = 1$, определяя

$$\mu_i = \operatorname{tg}(\varphi_i - \alpha_i), \quad v_i = \operatorname{tg} \varphi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

и подставляя эти выражения в уравнение (1.7), приходим к системе $n-1$ уравнений

$$\operatorname{tg}(\alpha_i - \varphi_i) |\cos(\alpha_i - \varphi_i)|^{1-m} + \delta_i \operatorname{tg} \varphi_{i+1} |\cos \varphi_{i+1}|^{1-m} = 0 \quad (1.20)$$

содержащих $n-2$ неизвестных постоянных $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$. После исключения этих параметров, в принципе, приходим к уравнению гиперповерхности конечных напряжений в пространстве $2n$ параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}; m$.

Линейно-упругие материалы. Принимая в (1.9) $m = 1$, получаем

$$\psi_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda (H_i - \theta), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Далее определяя

$$\mu_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i - \alpha_i), \quad v_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda \varphi_{i+1}$$

и подставляя эти выражения в уравнение (1.7) при $m = 1$, находим

$$\operatorname{tg} \lambda (\alpha_i - \varphi_i) + \delta_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.21)$$

Это система $n-1$ трансцендентных уравнений с $n-1$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}, \lambda$. После исключения параметров φ_i получаем уравнение относительно $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})$.

2. Случай $n = 2$. Введем обозначения $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta$. В этом случае, полагая $n = j = 2$, из (1.9) находим

$$F(\psi_1) = -\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$F(\psi_2) = \alpha + \beta - \Lambda - \theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \xi \quad (2.1)$$

$$F(\psi_{22}) = \alpha + \beta - \theta, \quad \xi \leq \theta \leq \alpha + \beta, \quad \xi = \alpha + \beta - 1/2\Lambda$$

Далее из (1.10), (1.11), принимая $\mu_2 = 0$ и обозначая $\mu_1 = \mu$ и $v_1 = v$, получаем уравнения

$$F(\mu) = -\alpha, \quad F(v) = \beta - \Lambda \quad (2.2)$$

которые вместе с уравнением

$$\mu(\mu^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} - \delta v(v^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} = 0 \quad (2.3)$$

составляют систему уравнений, определяющую собственное значение $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta, m)$. В пространстве $\alpha\beta\lambda$ она определяет семейство поверхностей, зависящих от параметров δ и m . При $\delta = 2, p = 3$ эта поверхность представлена на фиг. 3.

В предельном случае, когда $\xi \rightarrow \alpha$, т.е. при $\mu \rightarrow -\infty, v \rightarrow -\infty$, из (2.2), (2.3) следует

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1 - \lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + p - 1)}} \right) \quad (2.4)$$

Это означает, что в данном случае составной клин ведет себя как однородное тело. При $\alpha = \pi s$ (2.4) приводится к формуле (1.19).

Для линейно-упругого материала ($m = 1$) из системы уравнений (2.2) – (2.4) следует

$$\lambda = \pi/(2\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha = \beta$$

$$\varphi(\lambda; \alpha, \beta) = \operatorname{tg} \lambda \alpha + \delta \operatorname{tg} \lambda \beta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \quad (2.5)$$

При заданных значениях δ рассмотрим λ в (2.5) как неявную функцию от α и β . Далее имеем

$$d\lambda = \lambda'_\alpha d\alpha + \lambda'_\beta d\beta$$

где штрихи означают частные производные. В случае $\alpha = \beta$ имеем $\lambda'_\alpha = \lambda'_\beta = -\pi/(2\alpha^2) < 0$, а при $\alpha \neq \beta$ из (2.5) находим

$$\lambda'_\alpha = -\varphi'_\alpha / \varphi'_\lambda = -\frac{\lambda}{I \cos^2 \lambda \alpha} < 0, \quad \lambda'_\beta = -\varphi'_\beta / \varphi'_\lambda = -\frac{\lambda \delta}{I \cos^2 \lambda \beta} < 0,$$

$$I = \frac{\alpha}{\cos^2 \lambda \alpha} + \frac{\delta \beta}{\cos^2 \lambda \beta}$$

Это означает, что $d\lambda < 0$, т.е. при возрастании α , когда $\beta = \text{const}$, или при возрастании β , когда $\alpha = \text{const}$, или при возрастании α и β одновременно, λ уменьшается монотонно.

Принимая $\lambda = 1$, из (2.2), (2.3) приходим к уравнению гиперповерхности конечных напряжений [2]

$$\operatorname{tg} \alpha |\cos \alpha|^{1-m} + \delta \operatorname{tg} \beta |\cos \beta|^{1-m} = 0 \quad (2.6)$$

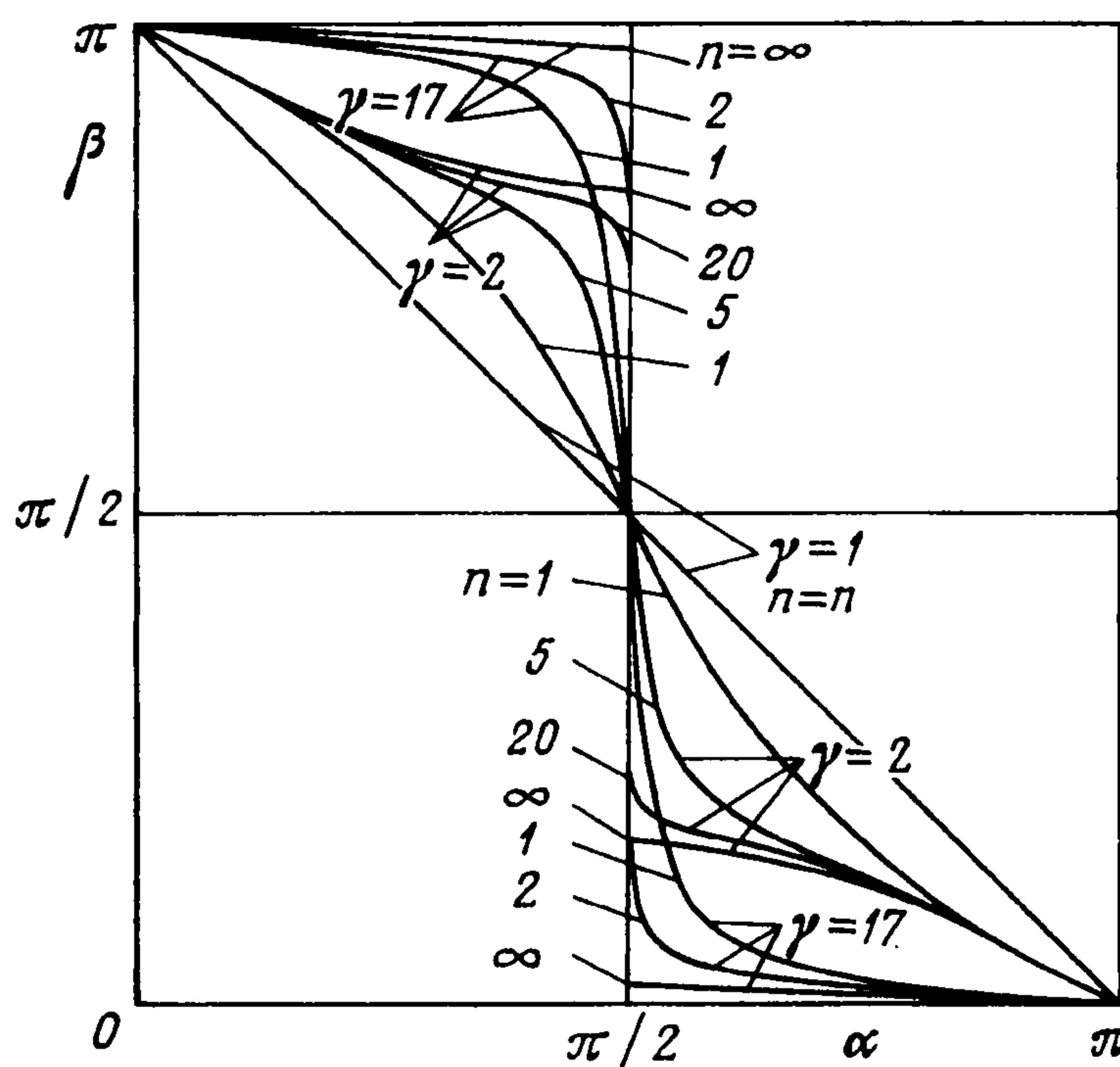
В координатной плоскости $\alpha\beta$ указанная поверхность оставляет следы (фиг. 4). Это семейство предельных кривых конечных напряжений, отделяющее зоны малонапряжений от зоны сильной концентрации напряжений.

Принимая $n = j = 2$, из первых уравнений (1.13), (1.14), а также из (1.15) получаем

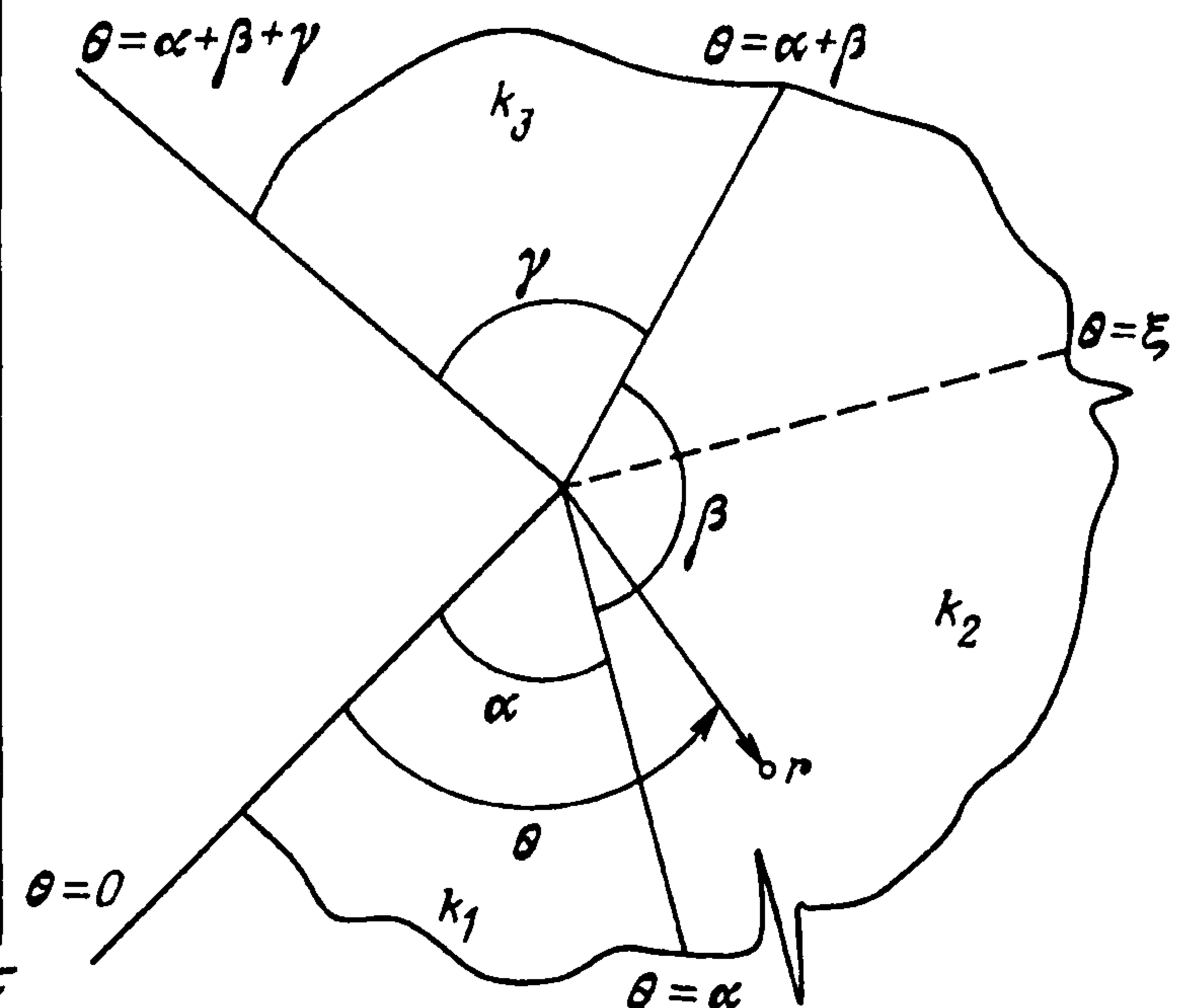
$$f_1 = Q \exp \Psi_1(0, \theta), \quad f_{21} = Q \exp[\Psi_1(0, \alpha) + \Psi_{21}(\alpha, \theta)]$$

$$f_{22} = -Q \exp[\Psi_1(0, \alpha) - \Psi_{22}(\theta, \alpha + \beta)] (T_{21} / T_{22})^p, \quad Q = f_1(0)$$

Выражение f_{22} уточняет соответствующую формулу в [2, 9].



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Случай $n = 3$. Введем обозначения $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$ (фиг. 5). Принимается, что перемещение меняет знак в интервале, соответствующем среднему клину, т.е. $j = 2$. Из уравнений (1.10), (1.11), обозначая $\varphi_2 = \varphi$, получаем

$$F(\mu_1) = -\alpha, \quad F(v_1) = \varphi \quad (3.1)$$

$$F(\mu_2) = \varphi - \beta + \Lambda, \quad F(v_2) = \gamma$$

Эти уравнения совместно с уравнениями

$$\mu_i(\mu_i^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} - \delta_i v_i(v_i^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

следующими из (1.7), составляют систему из шести уравнений относительно неизвестных постоянных $\mu_1, \mu_2, v_1, v_2, \varphi, \lambda$, определяющую собственное значение

$$\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, m)$$

Для однородного клина, принимая $\delta_1 = \delta_2 = 1$ и $\mu_i = v_i$, из (3.1), (3.2) получаем уравнение

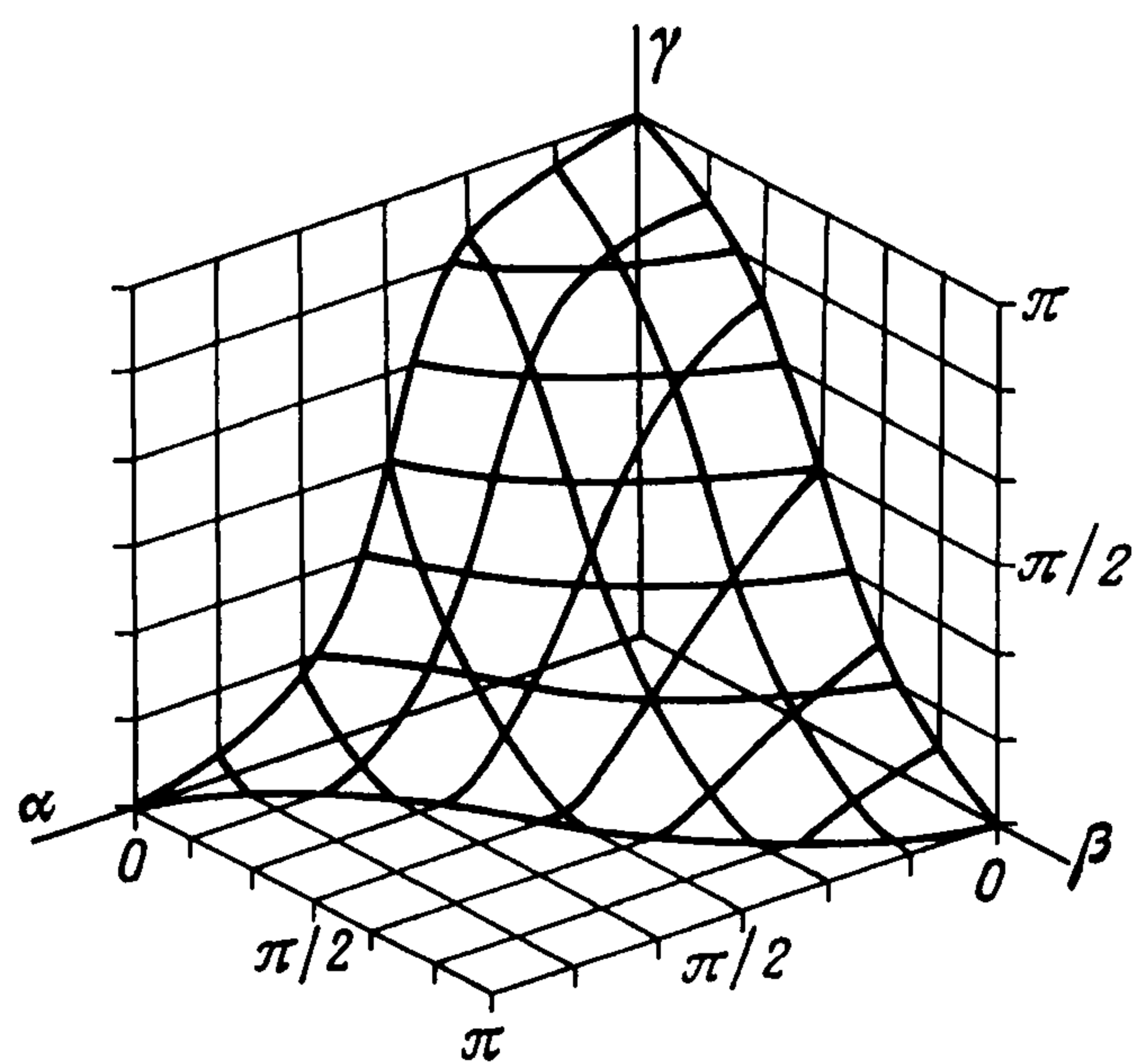
$$\alpha + \beta + \gamma = \Lambda$$

сводящееся также к формуле (1.19).

Гиперповерхность конечных напряжений. При $\lambda = 1$, определяя из (3.1) μ_i, v_i и подставляя в (3.2), или же принимая $i = 1$ и $i = 2$ из (1.20), приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha |\cos \alpha|^{1-m} + \delta_1 \operatorname{tg} \varphi |\cos \varphi|^{1-m} &= 0 \\ \operatorname{tg}(\beta - \varphi) |\cos(\beta - \varphi)|^{1-m} + \delta_2 \operatorname{tg} \gamma |\cos \gamma|^{1-m} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

содержащим неизвестный параметр φ . В трехмерном координатном пространстве $\alpha\beta\gamma$ эта система уравнений при заданных значениях параметров δ_1, δ_2, m определяет предельную поверхность конечных напряжений (фиг. 6). Указанная поверхность отсекает от координатных осей отрезки, равные π , и оставляет следы на координатных плоскостях.



Фиг. 6

Предельная поверхность (3.3) отделяет трехмерную область малонапряженности (ниже поверхности) от области сильной концентрации напряжений (выше поверхности). Другими словами, зоной малонапряженности для края контактных поверхностей рассматриваемого составного клина будет трехмерная область, ограниченная поверхностью (3.3) и координатными плоскостями, содержащими начало координат.

Можно определить следы предельной поверхности на координатных плоскостях. Принимая $\gamma = 0$, из второго уравнения (3.3) находим $\varphi = \beta + \pi q$, где q – целое число. Подставляя значение φ в первое уравнение, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha |\cos \alpha|^{1-m} + \delta_1 \operatorname{tg} \beta |\cos \beta|^{1-m} = 0$$

Это уравнение определяет семейство предельных кривых – следы поверхности (3.3) на плоскости $\alpha\beta$. Полагая $\beta = 0$ в (3.3) и исключая выражения $\operatorname{tg} \varphi |\cos \varphi|^{1-m}$, приходим к уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha |\cos \alpha|^{1-m} + \delta_1 \delta_2 \operatorname{tg} \gamma |\cos \gamma|^{1-m} = 0$$

определяющему следы поверхности (3.3) на плоскости $\alpha\gamma$.

Далее, принимая $\alpha = 0$, из первого уравнения (3.3) находим $\varphi = \pi q$. Тогда второе уравнение преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \beta |\cos \beta|^{1-m} + \delta_2 \operatorname{tg} \gamma |\cos \gamma|^{1-m} = 0$$

Оно представляет следы предельной поверхности на плоскости $\beta\gamma$.

Для однородного клина, т.е. когда $\delta_1 = \delta_2 = 1$, удовлетворяется система уравнений (3.3), если положить $\alpha = -\varphi + \pi q_1$ и $\beta = \varphi - \pi q_2$, где q_i – целые числа. Исключая φ , приходим к уравнению плоскости

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (3.4)$$

равнонаклонной к координатным осям и отсекающей от последних отрезки, равные π . При пересечении плоскости (3.4) с гиперповерхностью (3.3) отделяются трехмерные области, точкам которых соответствуют малонапряженные состояния, если общий угол раствора клина $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, а также области, точкам которых соответствуют сильные концентрации напряжений, если $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Характерными предельными кривыми являются также следы поверхности (3.3) на плоскостях, параллельных координатным плоскостям. Так, полагая $\gamma = \pi/2$, из второго уравнения (3.3) заключаем, что $\beta = \varphi$. Далее, замечая, что α, β меняются в квадрате $0 < \alpha, \beta \leq \pi/2$, из первого уравнения находим

$$\sin \alpha \sin^m \beta - \delta_1 \cos \beta \cos^m \alpha = 0$$

Это уравнение определяет предельные кривые на плоскости $\gamma = \pi/2$. При $\delta_1 = 1$ предельная линия превращается в прямую $\alpha + \beta = \pi/2$. Для $m = 1$ это очевидно, а при $m < 1$ подтверждается проверкой.

Полагая в первом уравнении (3.3) $\alpha = \pi/2$, определяем $\varphi = -\pi/2$. Учитывая, что $0 \leq \beta, \gamma \leq \pi/2$, получаем уравнение

$$\cos \beta \cos^m \gamma - \delta_2 \sin \gamma \sin^m \beta = 0$$

определяющее следы предельной поверхности на плоскости $\alpha = \pi/2$. При $\delta_2 = 1$ приведенная предельная линия переходит в прямую $\beta + \gamma = \pi/2$.

Наконец, полагая во втором уравнении (3.3) $\beta = \pi/2$, учитывая, что $0 \leq \alpha, \gamma \leq \pi/2$, и исключая $\operatorname{tg} \varphi$, будем иметь

$$\sin 2\varphi = -2\xi_m, \quad \xi_m = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\sin \alpha}{\cos^m \alpha} \frac{\sin \gamma}{\cos^m \gamma} \right)^{1/(1-m)}$$

Далее, вычисляя $\operatorname{tg} \varphi |\cos \varphi|^{1-m}$, из первого уравнения системы (3.3) после преобразований получаем уравнение

$$\sin \alpha \sin^{1/m} \gamma - \frac{\delta_1}{\delta_2^{1/m}} \cos \gamma \cos^m \alpha \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \xi_m^2} \right)^{(1-m^2)/(2m)} = 0$$

которое определяет следы поверхности (3.3) на плоскости $\beta = \pi/2$. При $m = 1$ оно сильно упрощается:

$$\sin \alpha \sin \gamma - (\delta_1 / \delta_2) \cos \alpha \cos \gamma = 0$$

При $\delta_1 = \delta_2$ рассматриваемая предельная линия переходит в прямую $\alpha + \beta = \pi/2$. Анализируя графики, можно заметить, что $\alpha + \beta > \pi/2$ при $\delta_1 > \delta_2$ и $\alpha + \gamma < \pi/2$ при $\delta_1 < \delta_2$.

Определение функции f_i . Принимая $n = 3$ и $j = 2$, из уравнений (1.13), (1.14) находим

$$f_1 = Q \exp \Psi_1(0, \theta), \quad f_{21} = Q \exp[\Psi_1(0, \alpha) + \Psi_{21}(\alpha, \theta)]$$

$$f_{22} = -Q \exp[\Psi_1(0, \alpha) - \Psi_{22}(\theta, \alpha + \beta)] \left(\frac{T_{21}}{T_{22}} \right)^p$$

$$f_3 = -Q \exp[\Psi_1(0, \alpha) + \Psi_3(\alpha + \beta, \theta)] \left(\frac{T_{21}}{T_{22}} \right)^p$$

Линейно-упругие материалы. Принимая $m = 1$ и $i = 1, 2$, из (3.1), (3.2) находим

$$\operatorname{tg} \lambda \alpha + \delta_1 \operatorname{tg} \lambda \varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \lambda(\beta - \varphi) + \delta_2 \operatorname{tg} \lambda \gamma = 0$$

Далее, исключая $\operatorname{tg} \lambda \varphi$ из этой системы, приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$\operatorname{tg} \lambda \alpha + \delta_1 \operatorname{tg} \lambda \beta + \delta_1 \delta_2 \operatorname{tg} \lambda \gamma - \delta_2 \operatorname{tg} \lambda \alpha \operatorname{tg} \lambda \beta \operatorname{tg} \lambda \gamma = 0 \quad (3.5)$$

определяющему λ при заданных значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$.

Если один из углов составляющих клиньев равен нулю или же один из параметров δ_i равен единице, клин из трех различных материалов сводится к клину из двух различных материалов, для которого известно [1], что λ не имеет комплексных значений. В рассматриваемом случае необходимо исследовать комплексные корни уравнения (3.5).

При одинаковых углах составляющих клиньев, т.е. когда $\alpha = \beta = \gamma$, уравнение (3.5) приводится к виду

$$\operatorname{tg} \lambda \alpha (1 + \delta_1 + \delta_1 \delta_2 - \delta_2 \operatorname{tg}^2 \lambda \alpha) = 0$$

Можно убедиться, что наименьшее положительное значение λ будет

$$\lambda = \alpha^{-1} \operatorname{arctg}[(1 + \delta_1 + \delta_1 \delta_2) / \delta_2]^{1/2} \quad (3.6)$$

Здесь, конечно, имеем условие $3\alpha \leq 2\pi$. Для одинаковых материалов, т.е. при $\delta_1 = \delta_2 = 1$, имеем $\lambda = \pi/(3\alpha)$.

В случае полубесконечной щели ($\alpha = 2\pi/3$), когда материал среднего клина очень жесткий ($\delta_1 \rightarrow \infty$), из (3.6) находим $\lambda = 3/4$.

Условие $\lambda = 1$ обеспечивает конечное напряженное состояние на рассматриваемом крае контактных поверхностей. Из (3.6) находим предельное значение

$$\alpha_* = \arctg[(1 + \delta_1 + \delta_1\delta_2)/\delta_2]^{1/2}$$

Когда $\delta_1 \rightarrow \infty$, находим $\alpha_* = \pi/2$.

Предельные значения ξ . Для клина из трех различных материалов из первого уравнения (1.12) при $j = 2$ следует $\xi = \alpha + \varphi + \Lambda/2$, причем опущен индекс 2 при ξ . Когда $\xi \rightarrow \alpha$, т.е. при $\mu_1 \rightarrow -\infty$, $v_1 \rightarrow -\infty$, из (3.1) находим $\alpha = \Lambda/2$ и получаем систему уравнений

$$F(\mu_2) = -\beta + \Lambda/2, \quad F(v_2) = \gamma \quad (3.7)$$

$$\mu_2(\mu_2^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} - \delta_2 v_2(v_2^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} = 0$$

Это означает, что при заданных α , β , γ для первого клина (α) значение λ определяется согласно формуле для однородного клина (1.19), где $s = \alpha/\pi$, а второй и третий клинья деформируются совместно как составной клин из двух различных материалов с соответствующими значениями $\lambda = \lambda(\beta, \gamma, \delta_2, m)$, определяемыми из системы уравнений (3.7).

При $\xi \rightarrow \alpha + \beta$, т.е. при $\mu_2 \rightarrow \infty$, $v_2 \rightarrow \infty$, из системы уравнений (3.1), (3.2) приходим к аналогичному заключению: третий клин (γ) работает как однородный, а первый и второй совместно, как составной клин из двух различных материалов. Анализ полученных уравнений и формул показывает, что зоны малонапряженности не зависят от того, внутри какого составляющего клина находится точка ξ (см. также [9]).

Отметим, что эти исследования можно провести и без допущения о знакопеременности перемещения.

Автор благодарит С.М. Саркисяна и К.С. Тадевосян за помощь при выполнении численных и графических работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
2. Задоян М.А. Продольный сдвиг составного клина // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 2. С. 297–302.
3. Zadoyan M.A. Low-stress level of a compound wedge under steady creep // Creep in Structures. Berlin: Springer, 1991. P. 693–700.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
5. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.
6. Матвеев В.П. Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 71–77.
7. Берзенков С.М., Матвеев В.П. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 48–61.
8. Берзенков С.М., Матвеев В.П. Оптимизация упругих тел в окрестности особых точек // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 93–100.
9. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.

Ереван

Поступила в редакцию
28.IX.1998