

УДК 539.3

© 2000 г. Г.Я. Попов

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО КРУГОВОГО ПОЛОГО КОНУСА

Построено в явном виде решение осесимметричной задачи о напряженном состоянии кругового полого конуса, усеченного двумя сферическими поверхностями (торцы конуса), при действии на одном из торцов нормальной нагрузки (второй торец не загружен) и скользящей заделке боковых поверхностей конуса. Рассмотрен ряд частных случаев, в числе которых напряженное состояние сферического купола, опирающегося на абсолютно-жесткое, гладкое, плоское основание, причем в центре купола может быть конический вырез. Метод решения легко обобщается на случай произвольного осесимметричного нагружения торцов и основан на использовании нового интегрального преобразования, вывод которого приводится.

1. Постановка задачи. Упругий (модуль сдвига G , коэффициент Пуассона μ) круговой полый конус: $a < r < b$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$, $-\pi < \varphi < \pi$, усеченный двумя сферическими поверхностями $r = a$ и $r = b$, подвергается воздействию по поверхности $r = b$ нормальной сжимающей нагрузки с интенсивностью $p(\theta)$, другой же торец конуса ($r = a$) считается незагруженным. На боковых конических поверхностях $\theta = \omega_0$ и $\theta = \omega_1$ выполняются условия скользящей заделки.

Приняв обозначения

$$2Gu_r(r, \theta) = u(r, \theta), \quad 2Gu_\theta(r, \theta) = v(r, \theta) \quad (1.1)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \tau_{\theta r}(r, \theta) = \tau_r(\theta)$$

запишем граничные условия

$$\sigma_r(a, \theta) = \tau_r(a, \theta) = 0, \quad \sigma_r(b, \theta) = -p(\theta), \quad \tau_r(b, \theta) = 0, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1 \quad (1.2)$$

$$v(r, \omega_j) = 0, \quad \tau_r(r, \omega_j) = 0, \quad j = 0, 1; \quad a \leq r \leq b \quad (1.3)$$

Для решения сформулированной краевой задачи будем использовать решение уравнений Ламе в форме, предложенной ранее [1],

$$u(r, \theta) = \Phi'(r, \theta) - 2(1 - \mu)r\Delta F, \quad v(r, \theta) = r^{-1}\Phi^*(r, \theta) \quad (1.4)$$

$$\Phi(r, \theta) = rF'(r) + (3 - 4\mu)F, \quad \Delta\Delta F = 0$$

$$\Delta F = \frac{(r^2 F')'}{r^2} - \frac{\nabla_0 F}{r^2}, \quad -\nabla_m F = \frac{(\sin \theta F^*)'}{\sin \theta} - \frac{m^2 F}{\sin^2 \theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Здесь и всюду ниже штрих означает производную по r , а точка – производную по θ . Как и в [2], бигармоническую функцию F представим в виде

$$F(r, \theta) = r^2\Psi(r, \theta) + \Omega(r, \theta), \quad \Delta\Psi = \Delta\Omega = 0 \quad (1.6)$$

Это позволяет выразить поле смещений и напряжений согласно уравнениям (1.4) через эти две гармонические функции

$$u = -(1 - 2\mu)[r^3\Psi''' + 4r^2\Psi' + 2r\Psi] + 2(1 - \mu)r\nabla_0\Psi + r\Omega'' + 4(1 - \mu)\Omega' \quad (1.7)$$

$$v = [r^2\Psi' + (5 - 4\mu)r\Psi + \Omega' + (3 - 4\mu)r^{-1}\Omega]' \quad (1.8)$$

$$\tau_r(r, \theta) = A^*(r, \theta), \quad A(r, \theta) = \mu r^2\Psi'' + (1 + 2\mu)r\Psi' - (1 - 2\mu)\Psi + (1 - \mu)\nabla_0\Psi + \Omega'' + (3 - 4\mu)(r^{-1}\Omega)' \quad (1.9)$$

$$(1 - 2\mu)\sigma_r(r, \theta) = -(1 - 2\mu)[(1 - \mu)r^3\Psi''' + (7 - 5\mu)r^2\Psi'' + 2(5 - \mu)r\Psi' + 2(1 + \mu)\Psi] + (1 - \mu)r\Omega''' + (4\mu^2 - 7\mu + 5)\Omega'' + 8\mu(1 - \mu)r^{-1}\Omega' + \nabla_0\{(2\mu^2 - 5\mu + 2)(r\Psi)' - \mu r^{-1}[\Omega' + (3 - 4\mu)r^{-1}\Omega]\} \quad (1.10)$$

Таким образом, поставленная задача сведена к проблеме отыскания гармонических функций Ψ и Ω из граничных условий (1.2) и (1.3).

Для построения точного решения этой проблемы необходимо установить подходящее интегральное преобразование и вывести для него формулу обращения. Ниже устанавливается интегральное преобразование, которое позволяет получить решение не только поставленной задачи, но и более сложных краевых задач для полых конусов, в том числе и неосесимметричных.

2. Вывод интегрального преобразования. Вывод интегрального преобразования базируется на решении следующих краевых задач Штурма–Лиувилля:

$$-\nabla_m T(\theta) - (\lambda + 1/4)T(\theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$a) T(\omega_j) = 0, \quad b) T^*(\omega_j) + h_j T(\omega_j) = 0, \quad c) T^*(\omega_j) = 0; \quad j = 0, 1$$

В первую очередь, следует отметить, что линейно-независимыми решениями дифференциального уравнения в (2.1) являются функции конуса [2]

$$T(\theta) = P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}^m(\cos \theta), \quad Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}^m(\cos \theta) \quad (2.2)$$

Требуется определить собственные числа λ_k (или $\nu_k = -1/2 + i\sqrt{\lambda_k}$) и собственные функции задач (2.1) и получить формулу разложения произвольной функции по этим собственным функциям.

С целью использования известного аппарата [3] сделаем в (2.1) замену

$$T(\theta) = (\sin \theta)^{-1/2} y(\theta) \quad (2.3)$$

и сведем задачи (2.1) к краевой задаче, рассмотренной ранее [3],

$$y''(\theta) - \{\lambda + q(\theta)\}y(\theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1 \quad [q(\theta)\sin^2 \theta = m^2 - 1/4] \quad (2.4)$$

$$l_j y(\theta) \equiv y(\omega_j)\cos \alpha_j + y'(\omega_j)\sin \alpha_j = 0, \quad j = 0, 1$$

Следуя предложенной схеме [3] и учитывая соотношения (2.2) и (2.3), отправляемся от функций

$$\varphi_0(\theta, \lambda) = \sqrt{\sin \theta} P_{\nu}^m(\cos \theta), \quad \chi_0(\theta, \lambda) = \sqrt{\sin \theta} Q_{\nu}^m(\cos \theta) \quad (2.5)$$

$$\nu = -1/2 + i\sqrt{\lambda}$$

Используя формулу 3.4 (25) из [4], вычисляем их вронскиан

$$W(\varphi_0, \chi_0) = -\Gamma_m(\nu)$$

где

$$\Gamma_m(v) = \frac{2^{2m} \Gamma(1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}v) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}v)}{\Gamma(1 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}v) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}v)} \quad (2.6)$$

Далее строим функции

$$\begin{aligned} -\Gamma_m(v) \varphi(\theta, \lambda) &= \varphi_0(\theta, \lambda) l_0 \chi_0 - \chi_0(\theta, \lambda) l_0 \varphi_0 = \sqrt{\sin \theta} F_{v,0}^m(\theta), \\ -\Gamma_m(v) \chi(\theta, \lambda) &= \sqrt{\sin \theta} F_{v,1}^m(\theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$F_{v,j}^m(\theta) = P_v^m(\cos \theta) l_j \chi_0 - Q_v^m(\cos \theta) l_j \varphi_0, \quad j = 0, 1 \quad (2.8)$$

и находим их производные. Вронскиан построенных функций оказывается равным

$$W(\varphi, \chi) = W = -[l_0 \varphi_0 l_1 \chi_0 - l_1 \varphi_0 l_0 \chi_0] / \Gamma_m(v) \quad (2.9)$$

Учитывая, что в силу соотношения (2.3)

$$l_j \varphi_0 = \sqrt{\sin \omega_j} l_j^* P_v^m, \quad l_j \chi_0 = \sqrt{\sin \omega_j} l_j^* Q_v^m \quad (2.10)$$

где

$$l_j^* f(\theta) \equiv l_j^* f = \sin \alpha_j f^*(\omega_j) + [\cos \alpha_j + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \omega_j \sin \alpha_j] f(\omega_j) \quad (2.11)$$

вместо (2.9) будем иметь

$$\Gamma_m(v) W = \sqrt{\sin \omega_0 \sin \omega_1} \Delta_v^m \quad (2.12)$$

$$\Delta_v^m = l_1^* P_v^m l_0^* Q_v^m - l_0^* P_v^m l_1^* Q_v^m$$

Таким образом, функция $\Phi(\theta, \lambda)$, определяемая формулой (1.6.2) из [3], построена.

Собственные числа λ_k задачи (2.4) и связанные с ними числа $v_k = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda_k}$ должны находиться из уравнения

$$\Delta_{v_k}^m = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Следствием (2.13) является равенство

$$l_0^* P_{v_k}^m = l_1^* P_{v_k}^m l_0^* Q_{v_k}^m [l_1^* Q_{v_k}^m]^{-1} \quad (2.14)$$

Согласно изложенному ранее [3] для получения разложения функции $f(\theta)$ по собственным функциям задачи (2.4), осталось подсчитать вычет функции $\Phi(\theta, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$ по приведенной в [3] формуле и вычислить отношение $\chi(\theta, \lambda_k) / \varphi(\theta, \lambda_k)$. Тогда согласно соотношениям (2.7), (2.8) и (2.10) получим

$$\begin{aligned} \Gamma_m(v_k) \chi(\theta, \lambda_k) &= \sqrt{\sin \omega_1 \sin \theta} \varphi_1^m(\theta, v_k) \\ \varphi_1^m(\theta, v_k) &= P_{v_k}^m(\cos \theta) l_1^* Q_{v_k}^m - Q_{v_k}^m(\cos \theta) l_1^* P_{v_k}^m \end{aligned} \quad (2.15)$$

Дополнительно учитывая равенство (2.14), имеем

$$\varphi(\theta, \lambda_k) = \sqrt{\sin \omega_0 \sin \theta} \frac{l_0^* Q_{v_k}^m \varphi_1^m(\theta, v_k)}{l_1^* Q_{v_k}^m \Gamma_m(v_k)}$$

$$\frac{\chi(\theta, \lambda_k)}{\varphi(\theta, \lambda_k)} = \sqrt{\frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_0}} \frac{l_1^* Q_{v_k}^m}{l_0^* Q_{v_k}^m}$$

Приняв во внимание, что согласно соотношению (2.12) и равенству $\nu = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda}$ справедливо равенство

$$\left. \frac{dW}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_k} = \left. \frac{dW}{d\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} \right|_{\nu=\nu_k} = -\frac{\sqrt{\sin \omega_0 \sin \omega_1} \tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1)}{(2\nu_k + 1)\Gamma_m(\nu_k)} \quad (2.16)$$

$$\tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1) = \left. \frac{d\Delta_\nu^m}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_k}$$

в соответствии с формулой (1.6.5) из [3] приходим к разложению

$$f(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\sin \theta} \varphi_1^m(\theta, \nu_k)}{\sigma_{mk}(\omega_0, \omega_1)} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\sin \psi} \varphi_1^m(\psi, \nu_k) f(\psi) d\psi \quad (2.17)$$

где

$$\frac{1}{\sigma_{mk}(\omega_0, \omega_1)} = (2\nu_k + 1) \frac{l_0^* Q_{\nu_k}^m}{l_1^* Q_{\nu_k}^m \cdot \Gamma_m(\nu_k) \tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1)} \quad (2.18)$$

Как и ранее [3], можно показать, что разложение (2.17) справедливо для любой функции из $L([\omega_0, \omega_1])$ и ведет себя в отношении сходимости так же, как и обычный ряд Фурье; в частности, ряд сходимости к $[f(\theta + 0) + f(\theta - 0)]/2$, если функция $f(\theta)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки θ .

По построению видно, что собственная функция $\varphi_1^m(\theta, \nu_k)$ удовлетворяет $(-\frac{1}{4} - \lambda = \nu^2 + \nu)$ уравнению Лежандра [4]

$$-\nabla_m \varphi_1^m(\theta, \nu_k) + \nu_k(\nu_k + 1)\varphi_1^m(\theta, \nu_k) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1 \quad (2.19)$$

и граничному условию

$$l_j^* \varphi_1^m(\theta, \nu_k) = 0, \quad j = 0, 1 \quad (2.20)$$

Полученный результат можно интерпретировать и так. Введем функцию $g(\theta) = (\sin \theta)^{-1/2} f(\theta)$, для которой существует интеграл

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\sin \theta} |g(\theta)| d\theta \quad (2.21)$$

Тогда разложение (2.17) можно трактовать как формулу обращения

$$g(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^m \varphi_1^m(\theta, \nu_k)}{\sigma_{mk}(\omega_0, \omega_1)} \quad (2.22)$$

для интегрального преобразования

$$g_k^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta \varphi_1^m(\theta, \nu_k) g(\theta) d\theta \quad (2.23)$$

Установим связь между построенной собственной функцией (2.15) краевой задачи (2.4) или краевой задачи (2.19), (2.20) и собственными функциями краевых задач (2.1) в случаях a , b и c (обозначим их соответственно как задачи $(2.1)_a$, $(2.1)_b$ и $(2.1)_c$). Собственную функцию $\varphi_a^m(\theta, \nu_k)$ краевой задачи $(2.1)_a$ получим из (2.15), если в (2.11) и в граничном условии (2.20) примем $\alpha_j = 0$ ($j = 0, 1$). В результате будем иметь

функцию

$$\varphi_a^m(\theta, v_k) = P_{v_k}^m(\cos \theta) Q_{v_k}^m(\cos \omega_1) - P_{v_k}^m(\cos \omega_1) Q_{v_k}^m(\cos \theta) \quad (2.24)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению из (2.19) и граничным условиям

$$\varphi_a^m(\omega_j, v_k) = 0, \quad j = 0, 1 \quad (2.25)$$

а числа v_k следует находить из уравнения (2.13), которое в данном случае, если ввести обозначение

$$\Omega_{v_k}^{l,n}(\omega_0, \omega_1) \equiv \Omega_{v_k}^{l,n} = P_v^l(\cos \omega_1) Q_v^n(\cos \omega_0) - P_v^n(\cos \omega_0) Q_v^l(\cos \omega_1) \quad (2.26)$$

можно записать в виде

$$\Omega_{v_k}^{m,m}(\omega_0, \omega_1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

При этом изменится и формула (2.18). Она приобретет вид

$$\frac{1}{\sigma_{mk}^a(\omega_0, \omega_1)} = (2v_k + 1) \frac{Q_{v_k}^m(\cos \omega_0)}{Q_{v_k}^m(\cos \omega_1)} \left[\frac{\partial \Omega_{v_k}^{m,m}(\omega_0, \omega_1)}{\partial v} \Big|_{v=v_k} \right]^{-1} \quad (2.28)$$

Для получения собственной функции $\varphi_b^m(\theta, v_k)$ краевой задачи (2.1)_b разделим граничные условия в (2.20) на $\sin \alpha_j$. Это позволит увидеть, что они перейдут в граничные условия задачи (2.1)_b, если принять

$$\operatorname{ctg} \alpha_j + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \omega_j = h_j, \quad \operatorname{ctg} \alpha_j = h_j - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \omega_j, \quad j = 0, 1 \quad (2.29)$$

При этом функционалы l_j^* перейдут в функционалы l_j^h , т.е.

$$l_j^* P_v^m \equiv l_j^h P_v^m = \frac{dP_v^m(\cos \omega_j)}{d\omega_j} + h_j P_v^m(\cos \omega_j) \quad (2.30)$$

и на основании соотношения (2.15) получим функцию

$$\varphi_b^m(\theta, v_k) = P_{v_k}^m(\cos \theta) l_1^h Q_{v_k}^m - Q_{v_k}^m(\cos \theta) l_1^h Q_{v_k}^m \quad (2.31)$$

Она будет удовлетворять граничным условиям

$$\varphi_b^m(\omega_j, v_k) + h_j \varphi_b^m(\omega_j, v_k) = 0, \quad j = 0, 1 \quad (2.32)$$

Числа v_k должны находиться из уравнения (2.13). Оно, если учесть обозначение (2.26) и воспользоваться равенством

$$dP_v^m(\cos \theta) / d\theta = P_v^{m+1}(\cos \theta) + m \operatorname{ctg} \theta P_v^m(\cos \theta) \quad (2.33)$$

(справедливым и для $Q_v^m(\cos \theta)$), которое вытекает из формулы 3.6.1 (6) справочника [4], приобретет вид

$$\Omega_{v_k,h}^m(\omega_0, \omega_1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{v,h}^m(\omega_0, \omega_1) = & \Omega_v^{m+1,m+1} + (m \operatorname{ctg} \omega_0 + h_0) \Omega_v^{m+s,m} + (m \operatorname{ctg} \omega_1 + h_1) \Omega_v^{m,m+1} + \\ & + [m^2 \operatorname{ctg} \omega_0 \operatorname{ctg} \omega_1 + m(h_0 \operatorname{ctg} \omega_1 + h_1 \operatorname{ctg} \omega_0) + h_0 h_1] \Omega_v^{m,m} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Формула (2.18) в данном случае примет вид

$$\frac{1}{\sigma_{mk}^b(\omega_0, \omega_1)} = (2\nu_k + 1) \frac{l_0^h Q_{\nu_k}^m}{l_1^h Q_{\nu_k}^m \Gamma_m(\nu_k)} \left[\frac{\partial \Omega_{\nu, h}^m}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_k} \right]^{-1} \quad (2.36)$$

Собственную функцию $\varphi_c^m(\theta, \nu_k)$ краевой задачи (2.1)_c получим из (2.31), положив там $h_j = 0$ ($j = 0, 1$), что приводит к формуле

$$\varphi_c^m(\theta, \nu_k) = P_{\nu_k}^m(\cos \theta) \frac{dQ_{\nu_k}^m(\cos \omega_1)}{d\omega_1} - Q_{\nu_k}^m(\cos \theta) \frac{dP_{\nu_k}^m(\cos \omega_0)}{d\omega_0} \quad (2.37)$$

Эта функция удовлетворяет граничному условию

$$\varphi_c^*(\omega_j, \nu_k) = 0, \quad j = 0, 1 \quad (2.38)$$

а числа ν_k следует находить из уравнения

$$\Delta_{\nu_k}^m \equiv \Omega_{\nu_k, 0}^m(\omega_0, \omega_1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

Выражение для $\Omega_{\nu_k, 0}^m(\omega_0, \omega_1)$ получаем из (2.35), полагая там $h_0 = h_1 = 0$. Формула (2.18) в данном случае запишется так:

$$\frac{1}{\sigma_{m, k}^c(\omega_0, \omega_1)} = (2\nu_k + 1) \frac{dQ_{\nu_k}^m(\cos \omega_0)}{d\omega_0} \left[\frac{dQ_{\nu_k}^m(\cos \omega_1)}{d\omega_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \Omega_{\nu, 0}^m \Big|_{\nu=\nu_k} \right]^{-1} \quad (2.40)$$

Таким образом, интегральные преобразования, базирующиеся на задачах Штурма – Лиувилля (2.1)_a, (2.1)_b и (2.1)_c, и справедливые для функций, имеющих конечный интеграл (2.21), согласно соотношениям (2.22), (2.23) могут быть записаны в виде

$$g_k^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta \varphi_e^m(\theta, \nu_k) g(\theta) d\theta, \quad e = a, b, c \quad (2.41)$$

$$g(\theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^m \varphi_e^m(\theta, \nu_k)}{\sigma_{mk}^e(\omega_0, \omega_1)}, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1$$

3. Частные случаи полученного интегрального преобразования. Если ограничиться решением только поставленной задачи, то оказывается достаточным применение интегральных преобразований (2.41) при $m = 0$. Однако в случае перехода к неполю конусу ($\omega_0 = 0$) непосредственно применить преобразования (2.41) нельзя – необходимо выполнить в них предельный переход $\omega_0 \rightarrow 0$. Выполним этот предельный переход сперва в разложении (2.17).

Начнем с трансцендентного уравнения (2.13). Если учесть соотношения (2.12), (2.11) и принять во внимание формулу 3.6.1 (2) из [4], то можно убедиться, что второе слагаемое при $\omega_0 = 0$ в (2.13) равно нулю и уравнение (2.13) переходит в следующее:

$$l_1^* P_{\nu_k}^m = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$l_1^* P_{\nu}^m = \sin \alpha_1 \frac{dP_{\nu}^m(\cos \omega)}{d\omega} + \left[\cos \alpha_1 + \frac{\operatorname{ctg} \omega}{2} \sin \alpha_1 \right] P_{\nu}^m(\cos \omega) \quad (3.1)$$

или в силу (2.33)

$$P_{\nu_k}^{m+1}(\cos \omega) \sin \alpha_1 + P_{\nu_k}^m(\cos \omega) [\cos \alpha_1 + (\operatorname{ctg} \omega \sin \alpha_1)(m + 1/2)] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Согласно соотношениям (3.1) и (2.15) приходим к формуле

$$\varphi_1^m(\theta, v_k) = l_1^* Q_{v_k}^m P_{v_k}^m(\cos \theta) \quad (3.3)$$

Выясним во что перейдет выражение $\tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1)$ при $\omega_0 \rightarrow 0$. Согласно соотношениям (2.16) и (2.12) следует рассмотреть равенство

$$\frac{\partial \Delta_v^m}{\partial v} = l_0^* Q_v^m l_1^* \frac{\partial P_v^m}{\partial v} + l_1^* P_v^m l_0^* \frac{\partial Q_v^m}{\partial v} - l_0^* P_v^m l_1^* \frac{\partial Q_v^m}{\partial v} - l_1^* Q_v^m l_0^* \frac{\partial P_v^m}{\partial v} \quad (3.4)$$

при $v = v_k$. В силу поведения функций Лежандра [4] в окрестности единицы основной вклад в $\tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1)$ при $\omega_0 \rightarrow 0$ будет вносить первое слагаемое из (3.4), и потому следует принять

$$\tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1) = l_0^* Q_{v_k}^m(\omega) \Delta_k^m(\omega), \quad \Delta_k^m(\omega) = \left. \frac{\partial l_1^* P_v^m}{\partial v} \right|_{v=v_k} \quad (3.5)$$

Если в равенства (2.17) и (2.18) подставить выражения (3.3) и (3.5), то получим

$$f(\theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\sin \theta} P_{v_k}^m(\cos \theta)}{\sigma_{mk}(\omega)} \int_0^{\omega} \sqrt{\sin \psi} P_{v_k}^m(\cos \psi) f(\psi) d\psi \quad (3.6)$$

где

$$\frac{1}{\sigma_{mk}(\omega)} = (2v_k + 1) \frac{l_1^* Q_{v_k}^m}{\Delta_k^m(\omega) \Gamma_m(v_k)} \quad (3.7)$$

Если, как и ранее, ввести функцию $g(\theta)$, то на разложение (3.6) можно смотреть как на формулу обращения

$$g(\theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^m(\omega)}{\sigma_{mk}(\omega)} P_{v_k}^m(\cos \theta) \quad (3.8)$$

для интегрального преобразования

$$g_k^m(\omega) = \int_0^{\omega} \sin \theta g(\theta) P_{v_k}^m(\cos \theta) d\theta \quad (3.9)$$

Как видим, собственная функция $\varphi_k^m(\theta) = P_{v_k}^m(\cos \theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра (2.19) и граничному условию (3.1). Это позволяет легко установить связь этой функции с собственными функциями краевых задач (2.1), если их считать заданными на участке $(0, \omega)$, т.е. когда граница $\theta = \omega_0$ исчезает, а $\omega_1 = \omega$, и можно положить $h_0 = 0$, $h_1 = h$, $\omega_s = \omega$, $\alpha_1 = \alpha$. Тогда согласно соотношениям (3.1) функция $\varphi_k^m(\theta)$ будет собственной функцией задачи $(2.1)_a$ при $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$, если в (3.1) положить $\alpha_1 = \alpha = 0$ и числа v_k находить из трансцендентного уравнения

$$P_{v_k}^m(\cos \omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Для этого частного случая формулы разложения (3.8), (3.9) в несколько иной форме приведены ранее [5, 6].

Функция $P_{v_k}^m(\cos \theta)$ будет собственной и для краевой задачи $(2.1)_b$ при $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$, если числа v_k находить из трансцендентного уравнения

$$P_{v_k}^{m+1}(\cos \omega) + (h + m \operatorname{ctg} \omega) P_{v_k}^m(\cos \omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

в чем можно убедиться, если в (3.1) принять $\operatorname{ctg} \alpha_1 = h - 1/2 \operatorname{ctg} \omega$ и учесть (2.33).

Функция $\varphi_k^m(\theta)$ будет собственной и для задачи $(2.1)_c$ при $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$, если числа v_k находить из трансцендентного уравнения

$$P_{v_k}^{m+1}(\cos \omega) + m \operatorname{ctg} \omega P_{v_k}^m(\cos \omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

вытекающего из (3.11), если там положить $h = 0$.

Важно отметить, что трансцендентные уравнения (3.10) и (3.12) допускают явные решения при $\omega = \pi/2$.

Покажем это. Полагая, например, в (3.10) $\omega = \pi/2$ и пользуясь формулами 3.4 (20) и 1.2 (7) из [4], приведем уравнение (3.10) к виду

$$2^m \sqrt{\pi} [\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}v_k) \Gamma(1 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}v_k)]^{-1} = 0 \quad (3.13)$$

Отсюда выявляем две серии значений $v_k^0 = 2k - m + 1$, $v_k^1 = -2k + m - 2$, обращающих левую часть равенства (3.13) в нуль. При этом первой серии значений v_k^0 соответствует собственная функция

$$\varphi_k^m(\theta) = P_{v_k^0}^m(\cos \theta) = P_{2k-m+1}^m(\cos \theta) \quad (3.14)$$

но согласно формуле 3.6.1 (2) из [4] имеем для целых индексов

$$P_l^m(z) = 0, \quad m > l \quad (3.15)$$

и потому собственная функция (3.16) не будет нулем только при $k \geq m$. По той же причине собственные функции, соответствующие значениям v_k^1 , равны нулю для любого значения $k \geq 0$, и поэтому эти значения v_k следует отбросить. Чтобы выписать разложение (3.6) или (3.8), (3.9) для этого частного случая, необходимо подсчитать $\sigma_{mk}(\pi/2)$ по формуле (3.7), но в рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} v_k &= 2k - m + 1, \quad l_1^* Q_{v_k}^m = Q_{2k-m+1}^m(0) = \Delta_k^m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{\partial P_v^m(0)}{\partial v} \Big|_{v=2k-m+1} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{m-1} \sqrt{\pi} k!}{\Gamma(k-m+\frac{3}{2})} \\ \Gamma_m(2k-m+1) &= \frac{2^{2m} k! \Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k-m+\frac{3}{2}) \Gamma(k-m+1)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

При получении формул (3.16) были учтены равенства 3.4 (21) и 3.4 (20) из [4].

На основании соотношений (3.7), (3.4) и (3.6) разложение (3.8) переходит в следующее:

$$g(\theta) = - \sum_{k=m}^{\infty} \frac{g_k^m(\pi/2) (4k-2m+3) (k-m)! \Gamma(k-m+\frac{3}{2}) P_{2k-m+1}^m(\cos \theta)}{2^{2m} k! \Gamma(k+\frac{3}{2})} \quad (3.17)$$

В частном случае $m = 0$ имеем

$$g(\theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} g_k\left(\frac{\pi}{2}\right) (4k+3) P_{2k+1}(\cos \theta), \quad g_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sin \theta g(\theta) P_{2k+1}(\cos \theta) d\theta \quad (3.18)$$

что совпадает с известным результатом [5].

Перейдем к рассмотрению уравнения (3.12) при $\omega = \pi/2$. Оно, как и уравнение (3.10), переходит в уравнение (3.13), в котором m следует заменить на $m+1$, что

приводит к разложению ($v_k = 2k - m$)

$$g(\theta) = - \sum_{k=m}^{\infty} \frac{g_k^m(\pi/2)(4k - 2m + 1)}{\Gamma_m(2k - m)} P_{2k-m}^m(\cos \theta) \quad (3.19)$$

$$\Gamma_m(2k - m) = \frac{2^{2m} k! \Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k - m + 1/2) \Gamma(k - m + 1)}$$

которое в частном случае $m = 0$ дает известный [5] результат.

4. Решение задачи. Применим интегральное преобразование (2.41) к краевой задаче (1.2), (1.3). Чтобы удовлетворить условиям (1.3), достаточно, согласно формулам (1.8) и (1.9), потребовать, чтобы

$$\Psi(r, \omega_j) = \Omega(r, \omega_j) = 0, \quad j = 0, 1 \quad (4.1)$$

Эти условия диктуют применение интегрального преобразования (2.41) при $m = 0$ и $e = c$ к уравнениям

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Delta \Omega = 0, \quad a < r < b, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1 \quad (4.2)$$

Ядром названного преобразования является собственная функция (2.37), удовлетворяющая уравнению Лежандра (2.19), которую запишем в виде

$$\varphi_c(\theta, v_k) = P_{v_k}(\cos \theta) \frac{dQ_{v_k}(\cos \omega_1)}{d\omega_1} - Q_{v_k}(\cos \theta) \frac{dP_{v_k}(\cos \omega_0)}{d\omega_0} \quad (4.3)$$

Числа v_k следует находить из уравнения (2.39), которое теперь можно записать в виде

$$\Omega_v^1 \Big|_{v=v_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

$$\Omega_v^1 = P_v^1(\cos \omega_1) Q_v^1(\cos \omega_0) - P_v^1(\cos \omega_0) Q_v^1(\cos \omega_1)$$

Согласно соотношению (2.38) функция (4.3) удовлетворяет условию

$$\varphi_c(\omega_j, v_k) = 0, \quad j = 0, 1 \quad (4.5)$$

Применив указанное интегральное преобразование к уравнениям (4.2) при учете условий (4.1) и (4.5) и решив получаемые дифференциальные уравнения для трансформант функций Ψ и Ω , находим

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \Psi_k(r) \\ \Omega_k(r) \end{matrix} \right\| &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta \left\| \begin{matrix} \Psi(r, \theta) \\ \Omega(r, \theta) \end{matrix} \right\| \varphi_c(\theta, v_k) d\theta = \left\| \begin{matrix} C_k^0 r^{v_k} + D_k^0 r^{-(v_k+1)} \\ C_k^1 r^{v_k} + D_k^1 r^{-(v_k+1)} \end{matrix} \right\| \end{aligned} \quad (4.6)$$

где C_k^j, D_k^j ($j = 0, 1$) – произвольные постоянные, которые следует находить, выполнив граничные условия (1.2).

Удовлетворим сперва условиям

$$\tau_r(b, \theta) = \tau_r(a, \theta) = 0, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1 \quad (4.7)$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$A(b, \theta) = A(a, \theta) = 0, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1$$

и применить интегральное преобразование (4.6), что приводит к равенствам

$$A_k(b) = A_k(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned}
A_k(r) &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta A(r, \theta) \varphi_c(\theta, v_k) d\theta = \\
&= (3 - 4\mu)[r^{-1}\Omega_k(r)]' + \Omega_k''(r) + \mu r^2 \Psi_k'' + (1 + 2\mu)r\Psi_k'(r) - \\
&\quad - (1 - 2\mu)\Psi_k(r) + (1 - \mu)(v_k^2 + v_k)\Psi_k(r)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Подставив сюда выражения (4.6) и реализовав условия (4.8), получим уравнения

$$\begin{aligned}
C_k^0 e_1(2v_k + 3)p_2^0(v_k) + C_k^1 e_1(2v_k + 1)p_2^1(v_k) + D_k^0 e_2(2)q_2^0(v_k) &= 0 \\
C_k^0 e_1(2)e_2(2v_k + 1)e_1(2)p_2^0(v_k) - D_k^0 e_1(2v_k - 1)e_2(2)q_2^0(v_k) - \\
-D_k^1 e_1(2v_k + 1)q_2^1(v_k) &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
e_1(x) &= b^x - a^x, \quad e_2(x) = (ab)^x \\
p_2^0(x) &= x^2 + 2x - (1 - 2\mu), \quad p_2^1(x) = x^2 + 2(1 - 2\mu)x - (3 - 4\mu) \\
q_2^0(x) &= x^2 - 2(1 - \mu), \quad q_2^1(x) = x^2 - 4\mu x - 4(1 - 2\mu)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Теперь удовлетворим оставшимся граничным условиям из (1.2), т.е.

$$(1 - 2\mu)\sigma_2(b, \theta) = -(1 - 2\mu)p(\theta), \quad \sigma_r(a, \theta) = 0, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1$$

К записанным условиям вновь применяем интегральное преобразование (4.6). В результате, после учета формул (1.10) и (4.6), приходим к уравнениям, которые можно получить из уравнений (4.10), если в них сделать такие замены: вместо $p_2^0(v_k)$ и $p_2^1(v_k)$ подставить $A_\mu(v_k)$ и $B_\mu(v_k)$, а вместо $q_2^0(v_k)$ и $q_2^1(v_k)$ — соответственно $C_\mu(v_k)$ и $D_\mu(v_k)$, в правой части первого уравнения вместо нуля подставить выражение $-(1 - 2\mu)p_k b^{v_k+3}$, а во втором уравнении $-(1 - 2\mu)p_k a^{v_k-2} e_2(v_k + 3)$. При этом символы в указанных заменах расшифровываются так:

$$\left\| \begin{matrix} A_\mu(v_k) \\ B_\mu(v_k) \end{matrix} \right\| = \sum_{j=0}^3 \left\| \begin{matrix} a_j(\mu) \\ b_j(\mu) \end{matrix} \right\| v_k^j, \quad \left\| \begin{matrix} C_\mu(v_k) \\ D_\mu(v_k) \end{matrix} \right\| = \sum_{j=0}^3 \left\| \begin{matrix} c_j(\mu) \\ d_j(\mu) \end{matrix} \right\| v_k^j \tag{4.12}$$

$$p_k = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta p(\theta) \varphi_c(\theta, v_k) d\theta$$

$$a_3(\mu) = b_3(\mu) = -c_3(\mu) = -d_3(\mu) = -c_2(\mu)/2 = 1 - 2\mu$$

$$a_2(\mu) = b_0(\mu) = c_0(\mu) = 0, \quad b_2(\mu) = 1/2 d_0(\mu) = 2(4\mu^2 - 4\mu + 1)$$

$$a_0(\mu) = 2(\mu + 1), \quad a_1(\mu) = 4\mu(\mu + 1) - 3$$

$$b_1(\mu) = 10\mu - 3, \quad c_1(\mu) = 2\mu(1 - 2\mu)$$

$$d_1(\mu) = 4(6\mu^2 - 5\mu + 1), \quad d_2(\mu) = 8\mu^2 - 2\mu + 1$$

Решив систему алгебраических уравнений, состоящую из уравнений (4.10) и двух описанных выше, получим

$$\left\| \begin{matrix} -C_k^0 \\ D_k^0 \end{matrix} \right\| = \frac{(1 - 2\mu)p_k}{\Lambda_e^\mu(v_k)} \left\| \begin{matrix} C_e^\mu(v_k) \\ D_e^\mu(v_k) \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \frac{C_k^1 p_2^1(v_k)}{D_k^1 q_2^1(v_k)} \right\| = \frac{(1-2\mu)p_k}{\Lambda_e^\mu(v_k)e_1(2v_k+1)} \times$$

$$\times \left\{ C_e^\mu(v_k) p_2^0(v_k) \left\| \frac{e_1(2v_k+3)}{e_1(2)e_2(2v_k+1)} \right\| + D_e^\mu(v_k) q_2^0(v_k) \left\| \frac{-e_1(2)}{e_1(2v_k-1)e_2(2)} \right\| \right\}$$

Здесь принято

$$\Lambda_e^\mu(v_k) = A_{11}^\mu(v_k)A_{22}^\mu(v_k)e_1(2v_k+3)e_1(2v_k-1)e_2(2) + A_{12}^\mu(v_k)A_{21}^\mu(v_k)e_1^2(2)e_2(2v_k+1)$$

$$\left\| \frac{C_e^\mu(v_k)}{D_e^\mu(v_k)} \right\| = b^{v_k+3} p_2^1(v_k) \left\| \frac{A_{22}^\mu(v_k)e_1(2v_k-1)e_2(2)}{-A_{21}^\mu(v_k)e_1(2)e_2(2v_k+3)} \right\| +$$

$$+ a^{v_k-2} e_2(v_k+3) q_2^1(v_k) \left\| \frac{A_{12}^\mu(v_k)e_1(2)}{A_{11}^\mu(v_k)e_1(2v_k+3)} \right\| \quad (4.14)$$

$$\left\| \frac{A_{11}^\mu(v_k)}{A_{12}^\mu(v_k)} \right\| = p_2^1(v_k) \left\| \frac{A_\mu(v_k)}{C_\mu(v_k)} \right\| - B_\mu(v_k) \left\| \frac{p_2^0(v_k)}{q_2^0(v_k)} \right\|$$

$$\left\| \frac{A_{21}^\mu(v_k)}{A_{22}^\mu(v_k)} \right\| = q_2^1(v_k) \left\| \frac{A_\mu(v_k)}{C_\mu(v_k)} \right\| - D_\mu(v_k) \left\| \frac{p_2^0(v_k)}{q_2^0(v_k)} \right\|$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты найдены. Подставив их значения в (4.6) и обратив трансформанты с помощью формулы обращения (2.41), полагая там $m=0$, $e=c$, получим

$$\left\| \frac{\Psi(r, \theta)}{\Omega(r, \theta)} \right\| = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_c(\theta, v_k)}{\sigma_{0k}^c(\omega_0, \omega_1)} \left\| \frac{C_k^0 r^{v_k} + D_k^0 r^{-(v_k+1)}}{C_k^1 r^{v_k} + D_k^1 r^{-(v_k+1)}} \right\|, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1 \quad (4.15)$$

где согласно соотношениям (2.40), (2.35) и (2.26)

$$\frac{1}{\sigma_{0k}^c(\omega_0, \omega_1)} = (2v_k+1) \frac{dQ_{v_k}(\cos \omega_0)}{d\omega_0} \left[\frac{dQ_{v_k}(\cos \omega_1)}{d\omega_1} \frac{d\Omega_v^1}{dv} \Big|_{v=v_k} \right]^{-1} \quad (4.16)$$

Зная функции $\Psi(r, \theta)$, $\Omega(r, \theta)$, по формулам (1.7) – (1.10) можем найти поле смещений и напряжений, т.е. полностью решить поставленную задачу.

Замечание. Полученный результат очевидным образом обобщается на случай, когда к рассматриваемому конусу приложена нормальная нагрузка и по второму торцу (т.е. по поверхности $r=a$). Труднее сделать обобщение, если к обоим торцам $r=a=a_0$ и $r=b=a_1$ приложена касательная нагрузка $\tau_i(\theta)$ ($i=0, 1$), т.е. вместо граничных условий (4.7) должны выполняться условия

$$\tau_r(a_i, \theta) = A'(a_i, \theta) = \tau_i(\theta), \quad i=0, 1; \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1 \quad (4.17)$$

Один из путей обобщений полученных выше результатов заключается в следующем. В соотношениях (4.17) проводится интегрирование по θ , что приводит к равенствам

$$A(a_i, \theta) = T_i(\theta) + B_i, \quad i=0, 1; \quad T_i(\theta) = \int_{\omega_0}^{\theta} \tau_i(\Psi) d\Psi \quad (4.18)$$

где

$$B_i = A(a_i, \omega), \quad i=0, 1 \quad (4.19)$$

К равенствам (4.18) применяем интегральное преобразование (4.6). В результате вместо однородных условий (4.8) получаем следующее:

$$A_k(a_i) = T_{ik} + B_i \cdot \gamma_k, \quad \gamma_k = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin \theta \varphi_c(\theta, v_k) d\theta \quad (4.20)$$

Реализуя эти условия таким же образом, что и условия (4.8), для искомых коэффициентов задачи (4.13) получим формулы, содержащие B_i . Затем, пользуясь формулами (4.15) и (1.9), находим $A(a_i, \omega)$ ($i = 0, 1$). Полученные выражения подставим в равенство (4.19), что приведет к системе двух алгебраических уравнений, из которых найдем B_i ($i = 0, 1$).

В полученных формулах (4.13) – (4.16) содержатся решения некоторых интересных частных случаев поставленной задачи.

Например, для случая, когда полость в конусе отсутствует, т.е. $\omega_0 = 0$ и $\omega_1 = \omega$, формулы (4.13) – (4.16), определяющие решение, и в этом случае верны со следующей корректировкой, согласно изложенному в разд. 3:

$$\varphi_c(\theta, v_k) = P_{v_k}^1(\cos \theta), \quad \frac{1}{\sigma_{0k}^c(\omega_0, \omega_1)} = \frac{(2v_k + 1)Q_{v_k}^1(\cos \omega)}{[\partial P_v^1(\cos \omega) / \partial v]_{v=v_k}}$$

и числа v_k следует находить из уравнения $P_{v_k}^1(\cos \omega) = 0$, из которого, в частности, следует в силу (3.15), что $v_0 = 0$.

Если в рассматриваемой задаче помимо $\omega_0 = 0$ принять дополнительно $\omega_1 = \omega = \pi/2$, то полученные формулы (4.13) – (4.15) дадут точное решение задачи о напряженном состоянии толстостенного сферического купола, опирающегося на абсолютно жесткое, гладкое основание. При этом вместо интегрального преобразования (4.6) следует использовать интегральное преобразование (3.20). Тогда вместо (4.15) будем иметь

$$\left\| \frac{\Psi(r, \theta)}{\Omega(r, \theta)} \right\| = - \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) P_{2k}(\cos \theta) \left\| \frac{C_k^0 r^{2k} + D_k^0 r^{-(2k+1)}}{C_k^1 r^{2k} + D_k^1 r^{-(2k+1)}} \right\| \quad (4.21)$$

Для коэффициентов C_k^j , D_k^j ($j = 0, 1$) сохраняют силу формулы (4.13), (4.16), а также формулы (4.11) и (4.12) с подстановкой в них $v_k = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), а также

$$p_k = \int_0^{\pi/2} \sin \theta p(\theta) P_{2k}(\cos \theta) d\theta \quad (4.22)$$

Если оставить $\omega_1 = \pi/2$, но не полагать $\omega_0 = 0$, то формулы (4.13) – (4.16) с очевидной корректировкой дадут решение задачи о напряженном состоянии толстостенного сферического купола с коническим вырезом в центре купола.

Совершая в формулах (4.13) – (4.16), (4.11) предельный переход $h \rightarrow \infty$, получим решение поставленной задачи для полубесконечного полого конуса, а предельный переход $a \rightarrow 0$ дает решение поставленной задачи для конечного полого конуса, содержащего острие.

Рассмотрим случай $a \rightarrow 0$. Согласно формулам (4.11), $e_1(x) = h^x$, $e_2(x) = 0$.

Вместо соотношений (4.13) и (4.15) будем иметь

$$\left\| \frac{-C_k^0}{C_k^1} \right\| = \frac{(1-2\mu)p_k}{A_{11}^\mu(v_k)b^{v_k}} \left\| \frac{p_2^1(v_k)}{p_2^0(v_k)b^2} \right\|, \quad D_k^0 = D_k^1 = 0 \quad (4.23)$$

$$\left\| \frac{\Psi(r, \theta)}{\Omega(r, \theta)} \right\| = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_c(\theta, v_k)}{\sigma_{0k}^c(\omega_0, \omega_1)} \left\| \frac{C_k^0 r^{v_k}}{C_k^1 r^{v_k}} \right\|, \quad \omega_0 \leq \theta \leq \omega_1 \quad (4.24)$$

Наконец, полагая $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega = \pi/2$, получаем точное решение задачи о напряженном состоянии полушара, опирающегося на абсолютно-жесткое гладкое основание, только вместо формулы (4.24) следует при этом использовать формулу (4.21), положив в ней $D_k^0 = D_k^1 = 0$. В формуле же (4.23) следует положить $\nu_k = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и принять во внимание соотношение (4.22). Иным методом точное решение аналогичной задачи, но для весомого полушара получено Б.Ф. Бондаревой [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман С.Г. Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 6. С. 993–996.
2. Нуллер Б.М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 339–348.
3. Titchmarsh E. Eigenfunction expansion associated with second-order differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1946. = Титчмарш Э.И. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
4. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Function. N.Y., etc. McGraw-Hill, 1955. = Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
5. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1979. 415 с.
6. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959. = Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.

Одесса

Поступила в редакцию
28.VI.1999