

УДК 539.3

© 2000 г. И.Ю. Цвелодуб

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается плоская конечная упругая область, содержащая физически нелинейное включение. Формулируется и решается задача об отыскании нагрузок, действующих на внешней границе области и обеспечивающих во включении заданное однородное напряженно-деформированное состояние.

Известно [1], что эллипсоидальное упругое включение в упругом же пространстве, подвергнутом на бесконечности действию конечных напряжений, будет находиться в однородном напряженно-деформированном состоянии (НДС). Этот результат был обобщен [2] на случай физически нелинейного включения в бесконечном упругом пространстве. Возникает вопрос о возможности реализации однородного НДС во включении произвольной формы, содержащемся в упругой области конечных размеров. В данной работе эта задача решается в плоской постановке.

1. Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим изотропную конечную упругую область S с физически нелинейным включением S^* , которые находятся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. Их внешними границами служат простые замкнутые контуры, которые обозначим соответственно через L и L^* (т.е. последний отделяет упругую среду от включения). В области S справедлив закон Гука, который в обоих случаях плоской задачи можно представить в виде

$$8\mu\epsilon_{kl} = (\kappa - 1)\sigma_{nn}\delta_{kl} + 4\sigma_{kl}^0, \quad k, l = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - \frac{1}{2}\sigma_{nn}\delta_{kl}$$

где σ_{kl}^0 и δ_{kl} – компоненты плоских девиатора напряжений и единичного тензора, μ – модуль сдвига, $\kappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации или $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния (ν – коэффициент Пуассона) [3]; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2. Система координат Ox_1x_2 выбрана так, что точка $(0, 0) \in S^*$.

Определяющие уравнения для включения S^* запишем в самом общем виде

$$\epsilon_{kl}^* = F_{kl}(\sigma_{mn}^*), \quad k, l, m, n = 1, 2 \quad (1.2)$$

где F_{kl} – вообще говоря, нелинейные операторы (например, для вязкоупругопластической среды, проявляющей свойства физически нелинейной ползучести [4]), которые в частных случаях могут являться функциями (линейная и нелинейная упругость, пластичность при простых путях нагружения и т.п.).

Сформулируем основную задачу, которая относится к классу обратных: необходимо подобрать такие внешние нагрузки на границе L , которые вызывали бы во включении S^* требуемое однородное, т.е. не зависящее от координат x_k , НДС, характеризуемое связанными соотношениями (1.2) компонентами σ_{kl}^* и ϵ_{kl}^* ($k, l = 1, 2$). При

этом на границе L^* поля нагрузок $p_k = \sigma_{kl}n_l$ (n_k – компоненты единичного вектора нормали к L^*) и перемещений u_k непрерывны ($k = 1, 2$). Задача рассматривается в геометрически линейной постановке.

Для решения задачи введем в S^* функцию напряжений $U^* = U^*(z, \bar{z})$, где z и $\bar{z}$ рассматриваются как две независимые комплексные переменные [5] (U^* может зависеть также и от времени t , если $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$). Поскольку [5]

$$\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* = 4 \frac{\partial^2 U^*}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* = 4 \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2}$$

и σ_{kl}^* не зависят от x_1, x_2 , а следовательно, от z и $\bar{z}$, то после отбрасывания не влияющих на напряженное состояние линейных относительно z и $\bar{z}$ слагаемых будем иметь

$$2U^* = Az\bar{z} + Bz^2/2 + \bar{B}\bar{z}^2/2 \quad (1.3)$$

$$2A = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*, \quad 2B = \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^*$$

В силу непрерывности усилий, передаваемых через границу L^* , на ней должна быть непрерывна введенная ранее [3] функция $f = 2\partial U/\partial \bar{z}$, поэтому вследствие (1.3)

$$2\partial U/\partial \bar{z} = Az + \bar{B}\bar{z} \quad \text{на } L^* \quad (1.4)$$

где $U = U(z, \bar{z})$ – функция напряжений для области S .

Выразим комплексное перемещение $w^* = u_1^* + iu_2^*$ в S^* через ϵ_{kl}^* . Из соотношений Коши следует, что [5]

$$2\partial w^*/\partial \bar{z} = \epsilon_{11}^* - \epsilon_{22}^* + 2i\epsilon_{12}^*, \quad \partial w^*/\partial z + \partial \bar{w}^*/\partial \bar{z} = \epsilon_{11}^* + \epsilon_{22}^*$$

Отсюда, учитывая, что ϵ_{kl}^* ($k, l = 1, 2$) не зависят от z и $\bar{z}$, и считая, что $w^*(0, 0) = 0$, получим

$$2w^* = Cz + D\bar{z} \quad (1.5)$$

$$C = \epsilon_{11}^* + \epsilon_{22}^* + 2i\epsilon_{12}^*, \quad D = \epsilon_{11}^* - \epsilon_{22}^* + 2i\epsilon_{12}^*$$

где ϵ^* – произвольная постоянная, равная значению "вращения" в S^* .

Пусть конформное отображение бесконечной области, расположенной вне L^* (и включающей в себя S), на внешность единичной окружности γ^* комплексной плоскости ζ имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = m_1\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} m_{-k}\zeta^{-k}, \quad \zeta = \rho e^{i\theta} \quad (1.6)$$

Тогда из соотношений (1.4) – (1.6) при $\rho = 1$ получим граничные условия для функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, определяющих НДС при $|\zeta| > 1$ [3, 5]:

$$\kappa_k \overline{\varphi(\sigma)} - \overline{\omega(\sigma)} \varphi'(\sigma) / \omega'(\sigma) - \psi(\sigma) = \overline{F_k(\sigma)} \quad (k = 1, 2) \quad \text{на } \gamma^* \quad (1.7)$$

$$\sigma = e^{i\theta}, \quad \kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = \kappa$$

$$\overline{F_1(\sigma)} = -A\overline{\omega(\sigma)} - B\omega(\sigma), \quad \overline{F_2(\sigma)} = \mu[\overline{C\omega(\sigma)} + \overline{D}\omega(\sigma)]$$

Из (1.7) вытекает, что

$$(\kappa + 1)\overline{\varphi(\sigma)} = (A + \mu\overline{C})\overline{\omega(\sigma)} + (B + \mu\overline{D})\omega(\sigma) \quad \text{на } \gamma^*$$

Отсюда с использованием известных методов [3, 5] получим

$$\varphi(\zeta) = [(A + \mu C)\omega(\zeta) + (\bar{B} + \mu D)\bar{\omega}(\zeta^{-1})]/(\kappa + 1), \quad |\zeta| > 1 \quad (1.8)$$

где использовано равенство $\bar{\omega}(\zeta^{-1}) = \overline{\omega(\bar{\zeta}^{-1})}$ [3] и учтено, что согласно (1.3) $\bar{A} = A$.

При известной функции $\varphi(\zeta)$ имеем [5]

$$\psi(\zeta) = -\bar{\varphi}(\zeta^{-1}) - \bar{\omega}(\zeta^{-1})\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta) - \bar{F}_1(\zeta^{-1}), \quad |\zeta| > 1 \quad (1.9)$$

$$\bar{F}_1(\zeta^{-1}) = -A\bar{\omega}(\zeta^{-1}) - B\omega(\zeta)$$

Подставляя выражение (1.8) в (1.9), найдем

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) = & \{(\kappa B - \mu \bar{D})\omega(\zeta) + [(\kappa - 1)A - 2\mu \operatorname{Re} C]\omega_1(\zeta) - \\ & - (\bar{B} + \mu D)\omega_1(\zeta)\omega'_1(\zeta)/\omega'(\zeta)\}/(\kappa + 1), \quad \omega_1(\zeta) \equiv \bar{\omega}(\zeta^{-1}), \quad |\zeta| > 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Как видно из (1.6), (1.8) и (1.10), функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ голоморфны в кольце $1 < |\zeta| < R$, где $R^{-1} = \lim |m_{-n}|^{1/n}$ при $n \rightarrow \infty$, что возможно, если $R > 1$. В частности, если отображающая функция $\omega(\zeta)$ содержит конечное число слагаемых под знаком суммы в (1.6), то $R = \infty$.

Для нахождения необходимых внешних нагрузок достаточно задать значения упомянутой выше функции $f(z, \bar{z}) = 2\partial U / \partial \bar{z}$ на границе L . Введем обозначение $f[\omega(\zeta), \bar{\omega}(\zeta)] = F(\zeta, \bar{\zeta})$. Тогда [3]

$$F = \varphi(\zeta) + \omega(\zeta)\overline{\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}$$

Подставляя сюда φ и ψ из (1.8) и (1.10), получим

$$\begin{aligned} F(\zeta, \bar{\zeta}) = & \{[2(A + \mu \operatorname{Re} C) + (B + \mu \bar{D})\overline{\omega'_1(\zeta)/\omega'(\zeta)}](\omega(\zeta) - \overline{\omega_1(\zeta)}) + \\ & + (\bar{B} + \mu D)(\omega_1(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)})\}/(\kappa + 1) + A\overline{\omega_1(\zeta)} + \bar{B}\overline{\omega(\zeta)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Предположим, что контур γ плоскости ζ , соответствующий границе L области S , целиком лежит в кольце $1 < |\zeta| < R$. Пусть $z = \Omega(\zeta_1)$, $\zeta_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ – конформное отображение области $S^* \cup S$ на внутренность (или внешность) единичной окружности плоскости ζ_1 . Тогда на γ будем иметь

$$\zeta = F_3(\sigma_1), \quad F_3(\sigma_1) \equiv \omega^{-1}[\Omega(\sigma_1)], \quad \sigma_1 = e^{i\theta_1}$$

(ω^{-1} – обозначение функции, обратной к ω ; ω^{-1} существует, поскольку $\omega'(\zeta) \neq 0$ при $|\zeta| > 1$). Подставляя это выражение в (1.11), найдем значение функции f на единичной окружности плоскости ζ_1 в виде

$$f_1(\sigma_1) = F[F_3(\sigma_1), \overline{F_3(\sigma_1)}]$$

Компоненты внешних нагрузок, которые необходимо приложить к границе L , совпадают с компонентами напряжений σ_{ρ_1} и $\sigma_{\rho\theta_1}$ в криволинейных координатах (ρ_1, θ_1) , связанных с упомянутым конформным отображением, при $\rho_1 = 1$. Эти напряжения определяются следующим образом [5]:

$$\sigma_{\rho_1} + i\sigma_{\rho\theta_1} = f'_1(\sigma_1)/\Omega'(\sigma_1) \quad (1.12)$$

Заметим, что функции φ и ψ из (1.8) и (1.10), определяющие НДС при $|\zeta| > 1$, выражаются только через отображающую функцию ω (при заданных компонентах σ_{kl}^* и ε_{kl}^* в S^*), связанную с формой границы L^* . Внешняя граница L никак не влияет на указанное НДС; искомые нагрузки на ней определяются ее геометрией и уже най-

денными функциями φ и ψ . В этом смысле решение может быть продолжено и за L , лишь бы значения $|\zeta|$ лежали в кольце: $1 < |\zeta| < R$.

2. О единственности решения задачи. Как видно из зависимостей (1.8) и (1.10), при известном НДС в S^* (т.е. при задании σ_{kl}^* и ε_{kl}^*) и при условии, что контур γ , соответствующий границе L , лежит в кольце $1 < |\zeta| < R$, решение для НДС в S существует и единственно. Последнее следует из того, что функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ из (1.8) и (1.10) не содержат логарифмических членов и произвольная постоянная $2\varepsilon^* \equiv \text{Im} C$, входящая в (1.8), не влияет на НДС. Произвола в определении $\varphi(\zeta)$ не будет, если задать величину вращения ε^* в S^* . По найденному в области S НДС согласно (1.12) однозначно определяются и необходимые нагрузки на внешнем контуре L .

Покажем теперь, что имеет место и обратное утверждение: при заданных соотношением (1.12) нагрузках на L и при некоторых ограничениях на связи (1.2) в области $S^* \cup S$ реализуется именно то НДС, которое было рассмотрено выше, т.е. включение будет находиться в однородном НДС.

Для большей наглядности несколько конкретизируем определяющие уравнения (1.2), оставляя их при этом достаточно общими [6]:

$$\varepsilon_{kl}^* = a_{klmn}^* \sigma_{mn}^* + \varepsilon_{kl}^{*N}, \quad k, l = 1, 2 \quad (2.1)$$

Действительно, при $\varepsilon_{kl}^{*N} = 0$ включение является линейно-упругим; в частности, в случае его изотропности соотношения (2.1) примут вид (1.1) (со своими константами κ^* и μ^*). Если $a_{klmn}^* = 0$, а $\varepsilon_{kl}^{*N} = \varepsilon_{kl}^{*N}(\sigma_{mn}^*)$ – известные функции, то включение – нелинейно-упругое или подчиняющееся деформационной теории пластичности. В общем случае (при $a_{klmn}^* \neq 0$) ε_{kl}^{*N} – необратимые деформации (пластические, вязкие, деформации ползучести или являющиеся суммами всех этих деформаций).

Упомянутые выше ограничения соответствуют обычным предположениям об устойчивости процесса деформирования, которые для линейно- или нелинейно-упругого включения, когда $\varepsilon_{kl}^{*N} = \varepsilon_{kl}^{*N}(\sigma_{mn}^*)$, сводятся к следующим (Δ – знак приращения) [4]:

$$a_{klmn}^* \Delta \sigma_{kl}^* \Delta \sigma_{mn}^* > 0, \quad \Delta \varepsilon_{kl}^{*N} \Delta \sigma_{kl}^* > 0 \quad \text{при} \quad \Delta \sigma_{kl}^* \Delta \sigma_{kl}^* \neq 0 \quad (2.2)$$

В случае, когда ε_{kl}^{*N} – необратимые деформации, аналогичное условие имеет вид [4, 6]

$$\int_0^t \Delta \dot{\varepsilon}_{kl}^{*N} \Delta \sigma_{kl}^* dt > 0 \quad (2.3)$$

где t – время (для вязких сред) или параметр нагружения (для пластических сред). Знаки равенства в (2.2) и (2.3) имеют место только при $\Delta \sigma_{kl}^* = 0$ ($k, l = 1, 2$).

При указанных нагрузках на L и условиях (2.2) или (2.3) НДС в $S^* \cup S$ определяется единственным образом.

Действительно, предположим, что наряду с найденным выше решением существует еще одно; разности соответствующих величин будем обозначать с помощью символа Δ . Тогда вследствие известного уравнения виртуальных работ и условий непрерывности на L^* нагрузок и перемещений будем иметь [4, 7]

$$\int_S \Delta \varepsilon_{kl} \Delta \sigma_{kl} dS + \int_{S^*} \Delta \varepsilon_{kl}^* \Delta \sigma_{kl}^* dS = 0 \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) соотношения (1.1) и (2.1) и учитывая (2.2), получим $\Delta \sigma_{kl} = 0$ в S и $\Delta \sigma_{kl}^* = 0$ в S^* ($k, l = 1, 2$).

В случае условия устойчивости (2.3) вместо равенства (2.4) запишем аналогичное ему, где приращения деформаций $\Delta \varepsilon_{kl}$ и $\Delta \varepsilon_{kl}^*$ следует заменить на их скорости. После интегрирования полученного равенства по времени от нуля до текущего момента t с учетом (2.3) и равенств

$$\Delta \sigma_{kl}|_{t=0} = \Delta \sigma_{kl}^*|_{t=0} = 0$$

которые следуют из единственности решения соответствующей моменту $t = 0$ упругой или упругопластической задач (о чем говорилось выше), по аналогии с изложенным ранее [4] найдем $\Delta \sigma_{kl} = 0$ в S и $\Delta \sigma_{kl}^* = 0$ в S^* при $t > 0$.

3. Примеры. Используя известные соотношения для компонент напряжений в криволинейных координатах (ρ, θ) , связанных с конформным отображением $z = \omega(\zeta)$ [3],

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\sigma_{\rho\theta} = 2\zeta^2 \rho^{-2} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \psi'(\zeta)] / \overline{\omega'(\zeta)}$$

$$\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta)$$

и подставляя в них функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ из (1.8) и (1.10), получим при $|\zeta| > 1$

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re}[A + \mu C + (\overline{B} + \mu D) \omega_2(\zeta)] / (\kappa + 1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\sigma_{\rho\theta} = 2e^{2i\theta} \{ (\overline{B} + \mu D) [\overline{\omega(\zeta)} \omega_2'(\zeta) - (\omega_1(\zeta) \omega_2(\zeta))'] + \quad (3.1)$$

$$+ (\kappa B - \mu \overline{D}) \omega'(\zeta) + [(\kappa - 1)A - 2\mu \operatorname{Re} C] \omega_1'(\zeta) \} / [(\kappa + 1) \overline{\omega'(\zeta)}]$$

$$\omega_2(\zeta) \equiv \omega_1'(\zeta) / \omega'(\zeta)$$

(функция $\omega_1(\zeta)$ определена в (1.10)).

Как видно из (3.1) и (1.6), при $|\zeta| \rightarrow \infty$ напряжения будут оставаться ограниченными лишь в случае, когда отображающая функция (1.6) содержит только первые два ненулевых слагаемых, т.е. $m_{-k} = 0$ при $k \geq 2$, что соответствует эллиптическому включению. Таким образом, если контур L^* – эллипс, то построенное в разд. 1 решение для НДС в S может быть продолжено за L , включая бесконечно удаленную точку.

В качестве примера рассмотрим более общую ситуацию, когда

$$\omega(\zeta) = R_0(\zeta + m\zeta^{-n}), \quad 0 < mn < 1, \quad n \geq 1 \quad (3.2)$$

Константы R_0 и m в (3.2) можно считать действительными, причем $m > 0$ (этого всегда можно добиться путем поворота координатных осей в плоскостях z и ζ); n – натуральное число. При $n = 1$ функция (3.2) совпадает с упомянутой отображающей функцией внешности эллипса на внешность единичной окружности γ^* плоскости ζ .

Подставляя выражение (3.2) в равенства (3.1), будем иметь

$$(\kappa + 1)(\sigma_\rho + \sigma_\theta) = 4 \operatorname{Re}[A + \mu C + (\overline{B} + \mu D) f_2(\zeta) / f_3(\zeta)]$$

$$(\kappa + 1)(\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\sigma_{\rho\theta}) = 2\sigma^2 \{ [(\kappa - 1)A - 2\mu \operatorname{Re} C] f_2(\zeta) + \quad (3.3)$$

$$+ (\kappa B - \mu \overline{D}) f_3(\zeta) + (\overline{B} + \mu D) [(\overline{\zeta} + m\overline{\zeta}^{-n} - \zeta^{-1} - m\zeta^n)(2(1 - m^2 n^3) \zeta^{-3} +$$

$$+ mn(n - 1)(\zeta^{n-2} + \zeta^{-n-4})) - f_2^2(\zeta) f_3(\zeta)] f_3^{-2}(\zeta) \} / \overline{f_3(\zeta)}$$

$$f_2(\zeta) = -\zeta^{-2} + mn\zeta^{n-1}, \quad f_3(\zeta) = 1 - mn\zeta^{-n-1}, \quad \sigma = e^{i\theta}$$

Отсюда вытекает, что при $n > 1$ главные члены, определяющие характер поведения указанных в (3.3) величин при $|\zeta| \rightarrow \infty$, имеют вид

$$(\kappa + 1)(\sigma_\rho + \sigma_\theta) \sim 4mn \operatorname{Re}(\bar{B} + \mu D)\zeta^{n-1}$$

$$(\kappa + 1)(\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\sigma_{\rho\theta}) \sim -2m^2n(2n-1)(\bar{B} + \mu D)\sigma^2\zeta^{2n-2}$$

Пусть контуром γ плоскости ζ , соответствующим границе L , является окружность радиуса ρ_0 , т.е. упомянутое в конце разд. 1 отображение имеет вид

$$\Omega(\zeta_1) = \omega(\rho_0\zeta_1), \quad \zeta_1 = \rho_0^{-1}\zeta$$

Тогда из (3.3) легко найти выражение для $\sigma_\rho - i\sigma_{\rho\theta}$ при $\zeta = \rho_0\sigma$, которое определяет искомые внешние нагрузки на L как функции σ .

При $n = 1$ (эллиптическое включение) из (1.8), (1.10) и (3.2) с использованием известных результатов [3] получим следующие соотношения, связывающие напряжения σ_{kl}^∞ и вращение ε^∞ на бесконечности с аналогичными величинами в S^* :

$$(\kappa + 1)\Gamma = A + \mu C + m(\bar{B} + \mu D)$$

$$(\kappa + 1)\Gamma' = \kappa B - \mu\bar{D} + m[(\kappa - 1)A - 2\mu \operatorname{Re} C] - m^2(\bar{B} + \mu D) \quad (3.4)$$

$$4\Gamma \equiv \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + 8i\mu\varepsilon^\infty / (\kappa + 1), \quad 2\Gamma' \equiv \sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty$$

Можно показать, что при выполнении условия устойчивости (2.2) (или (2.3)) соотношения (3.4) и (2.1) однозначно разрешимы относительно σ_{kl}^* ($k, l = 1, 2$) и ε^* . Более того, при задании величин Γ и Γ' из (2.2) или (2.3) следует, что НДС в области $S \cup S^*$ определяется единственным образом, т.е. при указанных воздействиях на бесконечности во включении реализуется однородное НДС, определяемое из (3.4) и (2.1).

Доказательство этого факта аналогично приведенному в разд. 2 и заключается в следующем. Рассматривая вместо S конечную упругую область S_r , ограниченную внешним контуром L_r , представляющим окружность радиуса r , для разности двух возможных решений будем иметь [4, 7]

$$\int_{S_r} \Delta\varepsilon_{kl} \Delta\sigma_{kl} dS + \int_{S^*} \Delta\varepsilon_{kl}^* \Delta\sigma_{kl}^* dS = I, \quad I \equiv \int_{L_r} \Delta u_k \Delta p_k ds$$

Устремляя r к бесконечности и учитывая, что $I \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ [3], получим равенство (2.4), которое возможно только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$ в S и $\Delta\sigma_{kl}^* = 0$ в S^* ($k, l = 1, 2$).

4. Заключительные замечания. Как видно из полученных выше результатов, рассмотренная обратная задача по существу свелась к задаче теории упругости для двусвязной области S , на внутренней границе L^* которой одновременно заданы перемещения и нагрузки, а на внешней границе L условия не определены (они являются искомыми). Подобная задача изучалась ранее [8] и получила название задачи (u, p) . В плоском случае также использовались [8] граничные условия вида (1.7) с произвольными функциями $F_k(\alpha)$ ($k = 1, 2$) (т.е. не обязательно соответствующими однородному НДС в S^*), откуда сразу же находилось граничное условие на L^* для $\varphi(\zeta)$:

$$(\kappa + 1)\varphi(\sigma) = F_2(\sigma) - F_1(\sigma)$$

Тем самым задача сводилась к известной [3], т.е. к определению функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ при $|\zeta| > 1$ по их граничным значениям при $|\zeta| = 1$.

В этом смысле очевидно, что рассмотренная в данной работе задача может быть обобщена следующим образом: необходимо подобрать такие нагрузки на L , которые бы обеспечивали в S^* требуемое (не обязательно однородное) НДС, удовлетворяющее соотношениям (1.2) (или, более конкретно, (2.1)) и известным уравнениям равновесия

и совместности деформаций. Ясно, что проблема сводится к "склейке" по границе L^* НДС в S^* и S из условий непрерывности перемещений и нагрузок на L^* . Решение такой задачи будет единственным в том же смысле, что и в разд. 2.

Очевидно также, что задача может быть распространена и на пространственный случай, когда за счет подбора внешних нагрузок надо добиться требуемого НДС (однородного или неоднородного) в физически нелинейном включении (ФНВ). При известных σ_{kl}^* и ε_{kl}^* ($k, l = 1, 2, 3$) проблема опять сводится к задаче $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$, решение которой в области S , как известно [3, 8], единственно. И наоборот, как и в разд. 2, при заданных внешних нагрузках НДС в пространственной области $S^* \cup S$ определяется единственным образом, что непосредственно вытекает из соотношений (2.1) – (2.4). В частности, в случае бесконечной области S , содержащей эллипсоидальное ФНВ, в последнем будет реализовываться однородное НДС, при условии, что напряжения σ_{kl}^∞ ($k, l = 1, 2, 3$) конечны [2]. Были развиты [8, 9] некоторые методы решения пространственной задачи $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$.

Рассмотренная здесь задача о создании требуемого однородного НДС в ФНВ может найти применение в проблеме оптимального разрушения материалов и элементов конструкций и сооружений. Для ФНВ последнюю можно сформулировать так: при каких внешних нагрузках на L вся область S^* разрушится одновременно – мгновенно (при упругопластическом деформировании) или за заданное время (при вязкоупругопластическом деформировании или при ползучести) с минимальными энергетическими затратами. Отметим, что такие оптимальные пути деформирования и разрушения были указаны для хрупких и вязких материалов, находящихся в условиях ползучести и однородного НДС [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00551).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eshelby J.D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // *Proc. Roy. Soc. London. 1957. Ser. A 241. N 1226. P. 376–396.* = *Эшелби Дж.* Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой // *Континуальная теория дислокаций.* М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 103–139.
2. *Вакуленко А.А., Севостьянов И.Б.* Включение с нелинейными свойствами в упругой среде // *Исследования по механике строительных конструкций и материалов.* Л.: ЛИСИ, 1991. С. 8–16.
3. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 201 с.
5. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
6. *Цвелодуб И.Ю.* Обратные задачи неупругого деформирования // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 2. С. 81–92.
7. *Koiter W.T.* General Theorems for Elastic-Plastic Solids. Amsterdam: North-Holland. 1960. = *Койтер В.Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 79 с.
8. *Шваб А.А.* Некорректные статические задачи теории упругости // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1989. № 6. С. 98–106.
9. *Шваб А.А.* Решение обратной задачи теории упругости методом граничного интегрального уравнения для голоморфного вектора // *Изв. РАН. Физика Земли.* 1994. № 4. С. 62–67.
10. *Цвелодуб И.Ю.* Об оптимальных путях деформирования и разрушения в условиях ползучести // *Изв. РАН. МТТ.* 1999. № 2. С. 108–114.

Новосибирск

Поступила в редакцию
07.VI.1999