

УДК 539.3

© 2000 г. А.А. Зеленина, Л.М. Зубов

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСТОГО ИЗГИБА ПРИЗМАТИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

Рассматривается задача изгиба призматического упругого тела концевыми моментами в условиях больших деформаций. При помощи полуобратного метода исходная трехмерная краевая задача нелинейной теории упругости сведена к двумерной нелинейной краевой задаче для области в форме поперечного сечения бруса. Даны две формулировки задачи на сечении: в перемещениях и в напряжениях. Введены функции напряжений и получена вариационная постановка двумерной задачи, основанная на принципе дополнительной энергии. Для полулинейного материала и материала Бартенева – Хазановича методом Ритца найдено приближенное решение задачи сильного изгиба бруса прямоугольного сечения.

В линейной теории упругости задача о деформации призматического тела концевыми нагрузками называется задачей Сен-Венана. Таким образом, задача сильного чистого изгиба является нелинейным вариантом одной из задач Сен-Венана. Решение другой нелинейной задачи Сен-Венана – задачи о кручении – изложено ранее [1, 2]. Плоская нелинейная задача чистого изгиба упругой полосы рассмотрена в [3].

1. Сведение проблемы чистого изгиба к двумерной нелинейной краевой задаче. Рассмотрим упругое тело, имеющее в отсчетной конфигурации форму призматического стержня. Декартовы координаты x_1, x_2 будем отсчитывать в плоскости поперечного сечения призмы, координата x_3 отсчитывается по оси бруса. Координатные орты обозначим $\mathbf{i}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Через X_n ($n = 1, 2, 3$) обозначим декартовы координаты точек деформированного тела, отсчитываемые вдоль тех же направлений и от того же начала. Предположим, что данное упругое тело испытывает конечную деформацию, описываемую соотношениями

$$X_1 = \alpha(x_1, x_2), \quad X_2 = \rho(x_1, x_2) \cos \beta x_3, \quad X_3 = \rho(x_1, x_2) \sin \beta x_3 \quad (1.1)$$

$$\beta = \text{const}$$

Видно, что при деформации вида (1.1) каждая материальная прямая, параллельная в отсчетной конфигурации оси бруса, после деформации превращается в дугу окружности, расположенную в плоскости, параллельной плоскости X_2X_3 . Любое поперечное сечение $x_3 = \text{const}$ после деформации остается плоским, поворачиваясь вокруг оси $\mathbf{i}_1$ на угол βx_3 и претерпевая некоторую деформацию в своей плоскости, характеризуемую функциями $\alpha(x_1, x_2), \rho(x_1, x_2)$. Таким образом, преобразование координат (1.1) переводит прямую призму в сектор кругового кольца, что соответствует изгибу стержня.

Градиент деформации, вычисляемый в соответствии с (1.1), имеет вид

$$\mathbf{C} = \frac{\partial X_n}{\partial x_k} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 \mathbf{e}_2 + \beta \rho \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \cos \beta x_3 + \mathbf{i}_3 \sin \beta x_3, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{i}_2 \sin \beta x_3 + \mathbf{i}_3 \cos \beta x_3 \quad (1.3)$$

Согласно (1.3) тройка векторов $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образует ортонормированный базис, причем векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_2$ лежат в плоскости поперечного сечения изогнутого стержня. При помощи (1.2) определяется мера деформаций Коши

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right)^2 \right] \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right)^2 \right] \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right) (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + \beta^2 \rho^2 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) показывает, что тензор $\mathbf{G}$ не зависит от координаты x_3 .

Система уравнений эластостатики изотропного однородного тела при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия для тензоров напряжений Пиолы $\mathbf{D}$

$$\mathbf{i}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.5)$$

и определяющих соотношений

$$\mathbf{D} = \frac{dW}{d\mathbf{C}} = a_1(I_1, I_2, I_3)\mathbf{C} + a_2(I_1, I_2, I_3)\mathbf{G} \cdot \mathbf{C} + a_3(I_1, I_2, I_3)\mathbf{C}^{-T} \quad (1.6)$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{G}, \quad I_2 = 1/2 (\text{tr}^2 \mathbf{G} - \text{tr } \mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{G}$$

Здесь W – удельная потенциальная энергия деформации, I_1 , I_2 , I_3 – главные инварианты меры деформации Коши, a_1 , a_2 , a_3 – некоторые функции этих инвариантов.

Из соотношений (1.2), (1.4), (1.6) вытекает, что тензор напряжений Пиолы в данной задаче имеет следующее представление:

$$\mathbf{D} = D_{11}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + D_{12}\mathbf{i}_1\mathbf{e}_2 + D_{21}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + D_{22}\mathbf{i}_2\mathbf{e}_2 + D_{33}\mathbf{i}_3\mathbf{e}_3 \quad (1.7)$$

где величины D_{sk} не зависят от координаты x_3 . При учете (1.7) уравнения равновесия (1.5) приводим к виду

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} = \beta D_{33} \quad (1.8)$$

Граничные условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$ на боковой поверхности бруса, которая предполагается свободной от нагрузки, на основании (1.7) записываются следующим образом:

$$n_1 D_{11} + n_2 D_{21} = 0, \quad n_1 D_{12} + n_2 D_{22} = 0 \quad (1.9)$$

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i}_1 + n_2 \mathbf{i}_2$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к боковой поверхности призмы.

Теперь определим главный вектор и главный момент сил, действующих в произвольном поперечном сечении изгибаемого бруса. Проинтегрируем уравнения равновесия (1.5) по части объема бруса, ограниченной в отсчетной конфигурации боковой поверхностью и двумя сечениями $x_3 = a$ и $x_3 = b$, где a и b – произвольные числа. Используя соотношения (1.7), (1.9) и применив теорему о дивергенции, получим равенство

$$[(\sin \beta a - \sin \beta b)\mathbf{i}_2 + (\cos \beta b - \cos \beta a)\mathbf{i}_3] \iint_{\sigma} D_{33} d\sigma = 0 \quad (1.10)$$

где σ – плоская область, занимаемая поперечным сечением бруса в отсчетной конфигурации. Из соотношения (1.10) вытекает, что интеграл в левой его части равен нулю.

Это означает, что равен нулю главный вектор сил, действующих в любом поперечном сечении бруса при деформации вида (1.1). Следовательно, главный момент сил в сечении не зависит от точки приведения. Так как вектор $\mathbf{e}_3$ направлен по нормали к плоскости поперечного сечения призмы в деформированном состоянии, из (1.7) вытекает, что в сечении действуют только нормальные напряжения. По этой причине вектор главного момента этих напряжений не имеет составляющей по оси $\mathbf{e}_3$, т.е. крутящий момент равен нулю. Вектор изгибающего момента выражается формулой

$$\mathbf{M} = - \iint_{\sigma} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} \times (\alpha \mathbf{i}_1 + \rho \mathbf{e}_2) d\sigma = \mathbf{i}_1 \iint_{\sigma} D_{33} \rho d\sigma - \mathbf{e}_2 \iint_{\sigma} D_{33} \alpha d\sigma \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) показывает, что изгибающие моменты относительно ортогональных осей, расположенных в плоскости деформированного сечения, одинаковы во всех сечениях бруса.

Таким образом, доказано, что реализация деформации (1.1) в однородном изотропном призматическом бруске требует приложения к торцам бруса только изгибающего момента. Плоскость действия результирующей пары в общем случае не параллельна плоскости изгиба x_2x_3 .

Неизвестные функции $\alpha(x_1, x_2)$ и $\rho(x_1, x_2)$ определяются путем решения двумерной нелинейной краевой задачи (1.8), (1.9) для области σ . Предполагается, что величины D_{sk} в (1.8), (1.9) выражены через функции ρ, α при помощи соотношений (1.2), (1.4), (1.6). Если α и ρ – решение указанной краевой задачи, то, как легко проверить, функции $\alpha + h$ и ρ , где h – произвольная постоянная, также будут удовлетворять уравнениям (1.8) и граничным условиям (1.9). Эту неоднозначность решения можно устранить, если подчинить функцию α дополнительному условию

$$\iint_{\sigma} \alpha d\sigma = 0 \quad (1.12)$$

которое исключает возможность свободного поступательного смещения упругого тела в направлении оси x_1 . При учете ограничения (1.12) следует ожидать единственности решения задачи (1.8), (1.9). В самом деле, неединственность решения означала бы существование таких форм потери устойчивости изогнутого стержня, для которых деформация одинакова во всех поперечных сечениях бруса. Такой тип бифуркации равновесия если и возможен, то при весьма больших значениях параметра β .

Предположим теперь, что поперечное сечение бруса имеет одну ось симметрии, совпадающую с осью x_2 . В этом случае физические соображения подсказывают, что распределение нормальных напряжений D_{33} по сечению бруса, изгибаемого в плоскости X_2X_3 , будет симметричным относительно оси x_2 , и момент этих напряжений относительно оси x_2 будет равен нулю. Данное утверждение можно строго доказать, исходя из единственности решения двумерной краевой задачи (1.8), (1.9), (1.12).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в случае симметричного сечения краевая задача (1.8), (1.9), (1.12) для изотропного однородного материала инвариантна относительно следующей замены независимых переменных и неизвестных функций:

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \alpha' = -\alpha, \quad \rho' = \rho \quad (1.13)$$

Пусть $\alpha = f(x_1, x_2)$ и $\rho = g(x_1, x_2)$ – решение краевой задачи (1.8), (1.9), (1.12). В силу (1.13) функции $\alpha = -f(-x_1, x_2)$, $\rho = g(-x_1, x_2)$ удовлетворяют той же краевой задаче. Из единственности решения получаем

$$f(-x_1, x_2) = -f(x_1, x_2), \quad g(-x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \quad (1.14)$$

Из (1.2), (1.4), (1.6), (1.14) вытекает следующее свойство решений краевой задачи (1.8), (1.9), (1.12) для области σ , симметричной относительно оси x_2 : функции α , D_{12} и D_{21} нечетны, а ρ , D_{11} и D_{33} четны по переменной x_1 . Это свойство при учете соотношения (1.11) влечет равенство $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$. Таким образом, если поперечное сечение бруса имеет ось симметрии, расположенную в плоскости изгиба, то система сил, действующих в любом поперечном сечении деформированного бруса, статически эквивалентна изгибающему моменту, действующему в плоскости изгиба.

После решения краевой задачи (1.8), (1.9), (1.12) величина момента $M_1 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_1$ вычисляется по формуле (1.11) и становится некоторой известной функцией параметра β . Обращение функции $M_1(\beta)$ дает возможность определить кривизну оси изогнутого стержня при заданной величине изгибающего момента.

Итак, предположения (1.1) о характере деформации призматического тела позволяют путем решения двумерной краевой задачи точно удовлетворить уравнениям равновесия в объеме тела и краевым условиям на боковой поверхности. Краевые условия на торцах цилиндра выполняются в смысле Сен-Венана, т.е. в интегральном смысле статической эквивалентности напряжений заданному изгибающему моменту. Тем самым исходная трехмерная краевая задача для цилиндрического тела сведена к двумерной задаче на сечении цилиндра.

Возможность замены точных краевых условий на торцах бруса интегральными соотношениями основана на принципе Сен-Венана. Применение принципа Сен-Венана в нелинейных задачах теории упругости связано с особенностями [4], проявляющимися в случаях, когда главный вектор сил, действующих на торце бруса, отличен от нуля. В рассматриваемой здесь задаче чистого изгиба этих особенностей нет, поскольку главный вектор торцевых нагрузок равен нулю. Это позволяет для данной нелинейной задачи считать справедливым принцип Сен-Венана в том смысле, что напряженные состояния бруса, вызванные действием двух различных систем торцевых нагрузок, имеющих нулевой главный вектор и одинаковый главный момент, будут различаться только в непосредственной близости от торца.

2. Формулировка двумерной задачи в напряжениях. Преобразуем описанную выше краевую задачу на сечении цилиндра, исключив функции α , ρ и приняв за основные неизвестные компоненты тензора напряжений Пиолы (1.7). Как известно [5], градиент деформации удовлетворяет следующим уравнениям совместности:

$$\mathbf{i}_k \times \partial \mathbf{C} / \partial x_k = 0 \quad (2.1)$$

Согласно (1.2) в задаче чистого изгиба тензор $\mathbf{C}$ имеет представление

$$\mathbf{C} = C_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + C_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_2 + C_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + C_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{e}_2 + C_{33} \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

где C_{sk} не зависят от x_3 . Подставив выражение (2.2) в (2.1) и учтя (1.3), получим систему уравнений совместности в теории чистого изгиба

$$\frac{\partial C_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial C_{11}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial C_{33}}{\partial x_1} = \beta C_{12}, \quad \frac{\partial C_{33}}{\partial x_2} = \beta C_{22} \quad (2.3)$$

Чтобы записать уравнения совместности через напряжения, необходимо выразить градиент деформации $\mathbf{C}$ через тензор $\mathbf{D}$. Это можно сделать способом, предложенным ранее [6]. Введем в рассмотрение тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{A}$, образующие полярное разложение градиента деформации

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{U}$ – положительно определенный квадратный корень из меры деформации Коши, $\mathbf{A}$ – собственно ортогональный тензор, сопровождающий деформацию и называемый тензором поворота. Тензор $\mathbf{S}$, определяемый соотношением [6]

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^T \quad (2.5)$$

в случае изотропного материала симметричен и является изотропной функцией тензора $\mathbf{U}$

$$\mathbf{S} = dW/d\mathbf{U} = \tau(\mathbf{U})$$

При определенных условиях, указанных в [6], функция τ однозначно обратима, т.е. существует зависимость

$$\mathbf{U} = \eta(\mathbf{S}) \quad (2.6)$$

Теперь проблема построения зависимости $\mathbf{C}(\mathbf{D})$ сводится к представлению тензора поворота через тензор Пиолы: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{D})$. В самом деле, из (2.4)–(2.6) имеем

$$\mathbf{C} = \eta[\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{D})] \cdot \mathbf{A}(\mathbf{D}) \quad (2.7)$$

Из соотношений (1.3), (2.2) вытекает, что в рассматриваемой здесь задаче изгиба тензор поворота можно представить следующим образом:

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{H}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{Q}(x_3) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}(x_1, x_2) = (\mathbf{E} - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) \cos \omega(x_1, x_2) + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \times \mathbf{E} \sin \omega(x_1, x_2)$$

$$\mathbf{Q}(x_3) = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_3 = (\mathbf{E} - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1) \cos \beta x_3 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \mathbf{E} \sin \beta x_3$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Согласно соотношениям (2.8) поворот материальных волокон при изгибе упругого тела состоит из последовательности двух конечных поворотов: поворота на угол $\omega(x_1, x_2)$ вокруг оси x_3 и поворота на угол βx_3 вокруг оси x_1 .

Представление тензора поворота через тензор напряжений Пиолы определяется из уравнения, выражающего симметричность тензора $\mathbf{S}$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^T \quad (2.9)$$

При помощи соотношений (1.7), (2.8) уравнение (2.9) приводится к виду

$$(D_{12} - D_{21}) \cos \omega = (D_{11} + D_{22}) \sin \omega \quad (2.10)$$

Очевидно, что при чистом изгибе стержня повороты вокруг оси стержня невелики, так что заведомо выполняется неравенство $|\omega| < \pi/2$. В силу последнего условия уравнение (2.10) имеет единственное решение

$$\cos \omega = \frac{p}{\Delta}, \quad \sin \omega = \frac{pq}{|p| \Delta} \quad (2.11)$$

$$p = D_{11} + D_{22}, \quad q = D_{12} - D_{21}, \quad \Delta = \sqrt{p^2 + q^2}$$

Из (2.5), (2.8), (2.11) получаем выражения тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ через тензор напряжений Пиолы для любого изотропного материала

$$\mathbf{A} = \frac{|p|}{\Delta} \left[(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{e}_2) - \frac{q}{p} (\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_2) \right] + \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{p}{|p| \Delta} [(D_{11} p + D_{12} q) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + (D_{11} D_{21} + D_{12} D_{22}) (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + \\ & + (D_{22} p - D_{21} q) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2] + D_{33} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если для заданного материала функция η в (2.6) известна, то представление градиента деформации через тензор $\mathbf{D}$ строится при помощи соотношений (2.7), (2.9) и (2.13).

Найдем функцию η для двух употребительных моделей нелинейно упругого тела: сжимаемого полулинейного материала и высокоэластичного несжимаемого мате-

риала Бартенева–Хазановича (БХ). Упругие потенциалы указанных материалов имеют соответственно вид [3]

$$W = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{tr}^2(\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E})^2 \quad (2.14)$$

$$W = 2\mu(\operatorname{tr}\mathbf{U} - 3), \quad \det\mathbf{U} = 1 \quad (2.15)$$

где λ, μ – постоянные. Определяющие соотношения, вытекающие из (2.14), (2.15), записываются следующим образом:

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{E} \operatorname{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E}) + 2\mu(\mathbf{U} - \mathbf{E}) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} - q_0\mathbf{U}^{-1} \quad (2.17)$$

Здесь q_0 – давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию. На основании (2.16) находим представление $\mathbf{U} = \eta(\mathbf{S})$ для полулинейного материала

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{S} - \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{S} \right), \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.18)$$

Аналогичное представление для материала БХ выводится из (2.17) путем исключения давления q_0 при помощи условия несжимаемости и имеет вид

$$\mathbf{U} = [\det(\mathbf{S} - 2\mu\mathbf{E})]^{1/3} (\mathbf{S} - 2\mu\mathbf{E})^{-1} \quad (2.19)$$

3. Функции напряжений и вариационная постановка задачи изгиба. Уравнения равновесия (1.8) тождественно удовлетворяются следующей подстановкой:

$$D_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad D_{12} = \beta \Phi_2, \quad D_{21} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad D_{22} = -\beta \Phi_1, \quad D_{33} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \quad (3.1)$$

Функции $\Psi(x_1, x_2)$, $\Phi_1(x_1, x_2)$, $\Phi_2(x_1, x_2)$ будем называть функциями напряжений. Введя вектор $\Phi = \Phi_1 \mathbf{i}_1 + \Phi_2 \mathbf{i}_2$ и набла-оператор $\nabla = \mathbf{i}_1 \partial/\partial x_1 + \mathbf{i}_2 \partial/\partial x_2$ в плоскости поперечного сечения бруса, представление (3.1) запишем в инвариантной (бескоординатной) форме

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot (\nabla \Psi \mathbf{i}_1 + \beta \Phi \mathbf{e}_2) + \nabla \cdot (\epsilon \cdot \Phi) \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_3, \quad \epsilon = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E} \quad (3.2)$$

При помощи соотношений (3.2) легко построить представление тензора Пиолы через функции напряжений в любых криволинейных координатах, введенных в области σ . Согласно (3.2) краевые условия (1.9) на границе $\partial\sigma$ поперечного сечения стержня записываются через функции напряжений следующим образом:

$$\mathbf{t} \cdot \Phi = 0, \quad \partial \Psi / \partial s = 0 \quad (3.3)$$

где $\mathbf{t}$ – единичный вектор касательной к кривой $\partial\sigma$, s – текущая длина дуги на $\partial\sigma$. Поскольку функция Ψ определена напряженным состоянием тела с точностью до аддитивной постоянной, в случае односвязной области σ второе уравнение (3.3) эквивалентно условию $\Psi = 0$.

Если градиент деформации $\mathbf{C}$ выразить через тензор $\mathbf{D}$, как описано в разд. 2, а тензор $\mathbf{D}$ – через функции напряжений согласно (3.1), то двумерная краевая задача об изгибе бруса будет состоять из трех уравнений совместности (2.3), записанных через функции напряжений Ψ , Φ_1 , Φ_2 и граничных условий (3.3). Данная краевая задача допускает вариационную формулировку, основанную на принципе дополнительной энергии нелинейной теории упругости [5, 7].

Рассмотрим функционал Π , определенный на множестве дважды дифференцируемых в области σ функций напряжений, удовлетворяющих на $\partial\sigma$ условиям $\mathbf{t} \cdot \Phi =$

$$= \Psi = 0,$$

$$\Pi = \iint_{\sigma} V[\mathbf{D}(\Phi, \Psi)] d\sigma, \quad V(\mathbf{D}) = \text{tr}[\mathbf{C}^T(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}] - W(\mathbf{D}) \quad (3.4)$$

Здесь $V(\mathbf{D})$ – удельная дополнительная энергия, связанная с удельной потенциальной энергией $W(\mathbf{C})$ преобразованием Лежандра, $\mathbf{D}(\Phi, \Psi)$ – представление (3.2) тензора Пиолы через функции напряжений. Так как $\mathbf{C} = \partial V / \partial \mathbf{D}$, легко проверить, что условие стационарности функционала Π эквивалентно уравнениям совместности (2.3).

При помощи соотношений (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) найдем функции удельной дополнительной энергии для полулинейного материала и материала БХ соответственно

$$V(\mathbf{S}) = \frac{1}{4\mu} \left(\text{tr} \mathbf{S}^2 - \frac{\nu}{1+\nu} \text{tr}^2 \mathbf{S} \right) + \text{tr} \mathbf{S} \quad \text{и} \quad V(\mathbf{S}) = 3[\det(\mathbf{S} - 2\mu\mathbf{E})]^{1/3} + 6\mu \quad (3.5)$$

Участвующая в функционале (3.4) функция $V(\mathbf{D})$ для рассматриваемых материалов получается подстановкой в соотношения (3.5) выражения (2.13).

4. Изгиб бруса прямоугольного сечения. В этом случае область σ задается неравенствами

$$|x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq b \quad (4.1)$$

где $2a$ и $2b$ – ширина и высота прямоугольника. В силу симметричности данной области относительно оси x_2 справедливы свойства нечетности функций α , D_{12} и D_{21} и четности функций ρ , D_{11} и D_{33} по переменной x_1 , отмеченные в конце разд. 1, из которых при учете соотношений (1.2), (1.6) и (3.1) следует четность функций напряжений Ψ и Φ_1 и нечетность функции Φ_2 по переменной x_1 .

Для решения вариационной задачи о стационарности функционала Π применим метод Ритца. Искомые функции напряжений Ψ , Φ_1 , Φ_2 аппроксимируем полиномами по x_1 , x_2 , ограничиваясь слагаемыми до третьей степени включительно. Граничные условия (1.9) на боковой поверхности бруса при учете соотношений (3.1) записываются следующим образом:

$$\partial \Psi / \partial x_2 \Big|_{x_1=\pm a} = \Phi_2 \Big|_{x_1=\pm a} = 0, \quad \partial \Psi / \partial x_1 \Big|_{x_2=\pm b} = \Phi_1 \Big|_{x_2=\pm b} = 0 \quad (4.2)$$

Удовлетворяя условиям (4.2) и свойствам четности, получаем следующую аппроксимацию искомых функций напряжений:

$$\Phi_1 = A(x_2^2 - b^2), \quad \Phi_2 = Bx_1(x_1^2 - a^2), \quad \Psi = K \quad (4.3)$$

Согласно соотношениям (3.1) представление тензора напряжений Пиолы, соответствующее приближению (4.3), имеет вид

$$\mathbf{D} = \beta B x_1 (x_1^2 - a^2) \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_2 - \beta A (x_2^2 - b^2) \mathbf{i}_2 \mathbf{e}_2 + [2A x_2 - B(3x_1^2 - a^2)] \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_3 \quad (4.4)$$

После подстановки выражений (4.3) в функционал дополнительной энергии Π последний станет функцией двух переменных A и B , а условие его стационарности сведется к уравнениям

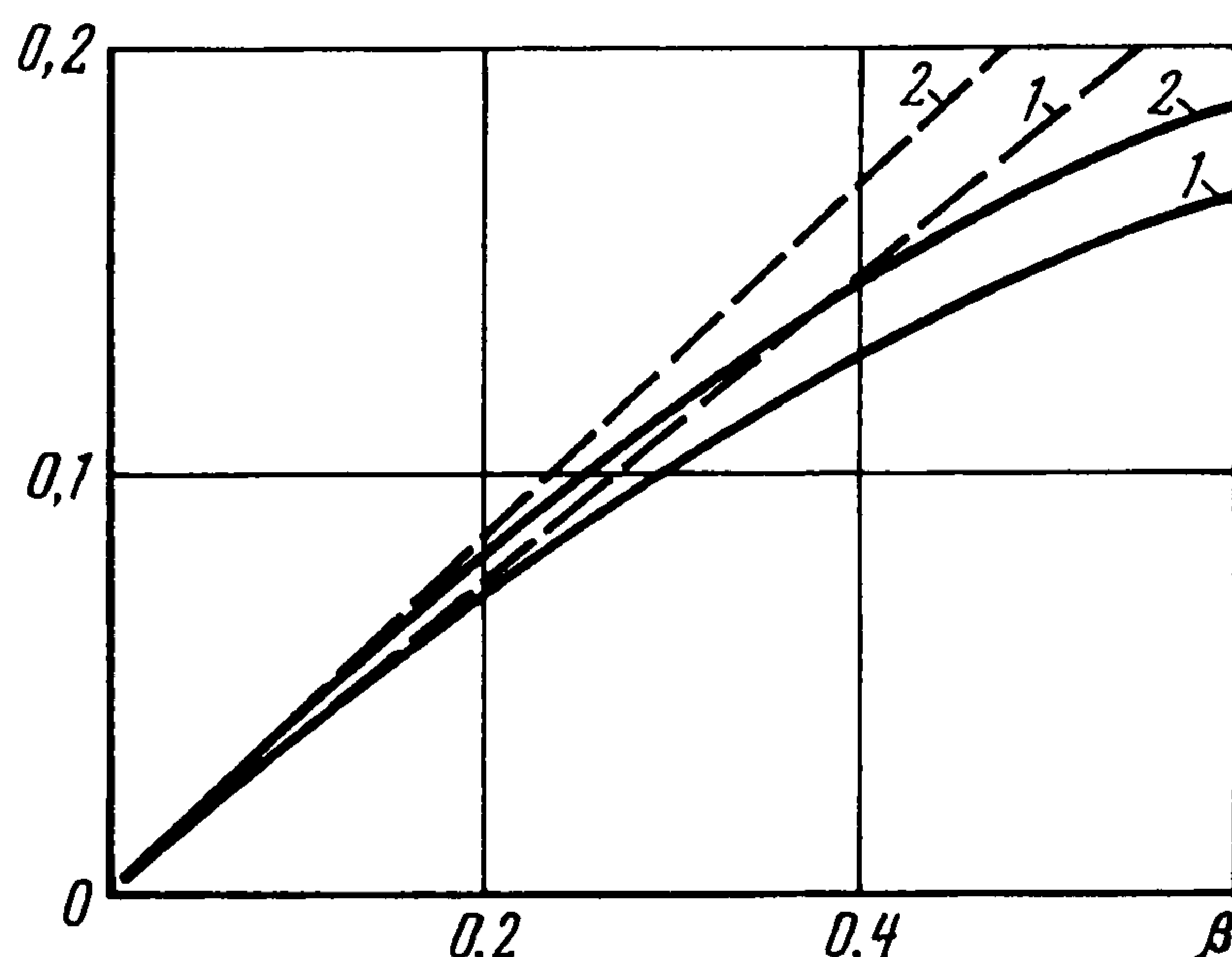
$$\partial \Pi / \partial A = 0, \quad \partial \Pi / \partial B = 0 \quad (4.5)$$

Система нелинейных уравнений (4.5) относительно постоянных A , B решалась численно для разных значений параметра β . После определения величин A , B изгибающий момент M_1 вычисляется по формулам (1.11), (4.4) при учете вытекающего из (1.2) соотношения $\rho(x_1, x_2) = \beta^{-1} C_{33}(x_1, x_2)$.

Последняя формула позволяет также найти кривизну оси изогнутого бруса

$$1/\rho(0, 0) = \beta/C_{33}(0, 0) \quad (4.6)$$

Вычисления показывают, что величина $C_{33}(0,0)$ мало отличается от единицы как для полулинейного материала, так и для материала БХ. Поэтому, согласно соотношению (4.6), параметр β с большой степенью точности можно считать кривизной оси деформированного бруса.



Зависимость изгибающего момента от кривизны оси изогнутого бруса для полулинейного материала изображена на фигуре (кривая 1). Прямая 2 соответствует классической линейной теории изгиба, согласно которой

$$M_1 = \mu(1 + \nu)ab^3\beta/6 \quad (4.7)$$

При вычислениях было принято $\mu = 1$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $b = 1,5$. Диаграмма деформирования бруса из материала БХ представлена кривой 2 для $\mu = 1$, $a = 0,5$, $b = 1,5$. Отметим, что в области малых деформаций материал БХ следует закону Гука с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона $\nu = 1/2$. Поэтому прямая 2 на фигуре описывается формулой (4.7) при $\nu = 1/2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01017).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов Л.М. Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 827–831.
2. Zubov L.M., Bogachkova L.U. The theory of torsion of elastic noncircular cylinders under large deformations // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 2. P. 373–379.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. Зубов Л.М. Линеаризованная задача изгиба и принцип Сен-Венана // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. н., 1985. № 4. С. 34–38.
5. Зубов Л.М. Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 241–245.
6. Зубов Л.М. О представлении градиента перемещения изотропного упругого тела через тензор напряжений Пиола // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1070–1077.
7. Зубов Л.М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406–410.