

УДК 539.3

© 2000 г.

В.Б. Зеленцов

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Предлагается асимптотический метод решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости и акустики для случая, когда полуширина штампа превосходит толщину слоя. Метод демонстрируется на решении антиплоских нестационарных динамических контактных задач о сдвиге жестким штампом упругого слоя, которые по сути являются акустическим случаем задач теории упругости. Поставленные задачи сводятся к решению интегрального уравнения первого рода относительно трансформант Лапласа неизвестных контактных напряжений. Нулевой член асимптотического решения интегрального уравнения строится в виде суперпозиции решений двух соответствующих интегральных уравнений Винера–Хопфа за минусом решения соответствующего интегрального уравнения на всей оси [1]. Символ ядра интегрального уравнения представляется в специальной форме, которая позволяет свести решение интегрального уравнения Винера–Хопфа к решению интегрального уравнения второго рода относительно трансформанты Лапласа–Фурье искомых контактных напряжений. Решение интегральных уравнений второго рода строится методом последовательных приближений. После обращения нулевого члена асимптотического решения интегрального уравнения по Лапласу определяется асимптотическое решение рассматриваемых задач. Приводятся формулы, связывающие действующую на штамп силу со смещением штампа. Получен закон движения массивного штампа на упругом слое для случая, когда в начальный момент времени ему была сообщена начальная скорость.

1. Интегральные уравнения. Контактные задачи о проникании жесткого штампа в акустическую полосу сводятся к решению интегрального уравнения (ИУ) первого рода

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}, p\right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad |x| \leq 1 \quad (1.1)$$

относительно неизвестной функции $\varphi^L(x, p)$, являющейся изображением по Лапласу распределения контактных напряжений под штампом. Здесь $f^L(p)$ – известная функция, связанная с законом движения штампа в акустической среде. Ядро ИУ имеет вид

$$k(t, p) = \int_{\Gamma} K(u, p) e^{iut} du \quad (1.2)$$

где $K(u, p)$ – символ ядра, Γ – контур интегрирования в комплексной плоскости $u = \sigma + it$. К ИУ вида (1.1) приводятся нестационарные динамические контактные задачи теории упругости об антиплоском сдвиге жестким штампом упругого слоя.

Рассматриваются две классические нестационарные динамические контактные задачи (НДКЗ) об антиплоском сдвиге жестким штампом ширины $2a$ ($|x| \leq a$) упругого слоя ширины h : слой жестко сцеплен по нижней грани ($y = 0$) с недеформируемым

основанием (задача А) и нижняя грань упругого слоя свободна от напряжений (задача Б). До начального момента времени ($t = 0$) слой находится в покое.

Смешанные граничные условия задач А и Б даются формулами ($y = h, t > 0$) [2]

$$w(x, h, t) = \varepsilon(t), \quad |x| \leq a; \quad w'_y(x, h, t) = 0, \quad a < |x| < \infty \quad (1.3)$$

где $\varepsilon(t)$ – закон движения штампа, штрихом обозначена частная производная.

На нижней грани слоя выполняется условие ($y = 0, t > 0$)

$$w(x, 0, t) = 0, \quad |x| < \infty \quad (\text{задача А}) \quad (1.4)$$

$$w'_y(x, 0, t) = 0, \quad |x| < \infty \quad (\text{задача Б}) \quad (1.5)$$

где $w(x, y, t)$ – функция смещений упругого слоя вдоль оси Oz , удовлетворяющая уравнению

$$\Delta w = c^{-2} \partial^2 w / \partial t^2 \quad (1.6)$$

(Δ – оператор Лапласа, c – скорость звука в упругой среде). Функция $w(x, y, t)$ и ее частные производные стремятся к нулю при $|x|, |y| \rightarrow \infty$.

Для сведения поставленных НДКЗ (1.3)–(1.6) к решению ИУ применяются интегральные преобразования: Лапласа по времени t и Фурье по координате x [3]

$$w^L(x, y, p) = \int_0^\infty w(x, y, t) e^{-pt} dt \quad (1.7)$$

$$w^{LF}(\alpha, y, p) = \int_{-\infty}^\infty w^L(x, y, p) e^{i\alpha x} dx \quad (1.8)$$

с помощью которых задачи А и Б приводятся к решению ИУ первого рода (1.1) с ядром (1.2). Символ ядра ИУ дается формулой

$$K(u, p) = \sigma^{-1} \operatorname{th}(\gamma \Lambda^{-1} \sigma) \quad (\text{задача А}) \quad (1.9)$$

$$K(u, p) = \sigma^{-1} \operatorname{cth}(\gamma \Lambda^{-1} \sigma), \quad \sigma = \sqrt{u^2 + 1} \quad (\text{задача Б}) \quad (1.10)$$

В формулах (1.1), (1.2), (1.9), (1.10)

$$\Lambda = \frac{c}{ap}, \quad \gamma = \frac{h}{a}, \quad f^L(p) = \frac{G}{a} \varepsilon^L(p)$$

где $\varepsilon^L(p)$ – изображение Лапласа функции $\varepsilon(t)$, G – модуль сдвига упругого слоя, Γ – контур интегрирования в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, проходящий под углом $-\arg p$ к действительной оси ($\tau = 0$). Для вычисления корня в (1.10) выбирается та ветвь, для которой $\sqrt{1} = 1$.

Функции $K(u, p)$ данные формулами (1.9), (1.10) являются функциями четными, мероморфными в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, имеющими в этой плоскости счетное количество нулей и полюсов, величины которых определяются элементарно. При больших значениях $|u|$ обе функции обладают асимптотикой

$$K(u, p) = |u|^{-1} + O(|u|^{-3}), \quad |u| \rightarrow \infty$$

а при малых u

$$K(u, p) = A + O(u^2), \quad u \rightarrow 0; \quad A = \begin{cases} \operatorname{th}(\gamma \Lambda^{-1}) & \text{для задачи А} \\ \operatorname{cth}(\gamma \Lambda^{-1}) & \text{для задачи Б} \end{cases}$$

Функции $K(u, p)$ (1.9), (1.10) представляются в специальной форме в виде ряда по экспонентам [4]

$$K(u, p) = \sigma^{-1} \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n \sigma) \right), \quad \operatorname{Re} \sigma > 0 \quad (1.11)$$

$$d_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{для задачи А (1.9)} \\ -1 & \text{для задачи Б (1.10)} \end{cases}, \quad b_n = 2n\gamma\Lambda^{-1} \quad (1.12)$$

Множитель σ^{-1} в правой части равенства (1.11) является символом ядра ИУ соответствующей антиплоской НДКЗ о сдвиге жестким штампом упругого полупространства [5]. Это легко видеть, если в формулах (1.9)–(1.11) осуществить предельный переход при $h, \gamma \rightarrow \infty$. В общем случае символ ядра $K(u, p)$ ИУ НДКЗ для акустического слоя может быть представлен в специальной форме в виде ряда

$$K(u, p) = K(u) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n(u) \exp(-b_n \sigma) K(u), \quad \operatorname{Re} \sigma > 0 \quad (1.13)$$

При использовании представления (1.11) для $K(u, p)$, ядро ИУ (1.2) можно записать в виде ряда:

$$k(t, p) = 2K_0(t) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} d_n K_0 \left(\sqrt{b_n^2 + t^2} \right)$$

где $K_0(t)$ – функция Макдональда, величина d_n определена формулой (1.12).

2. Приближенное решение интегрального уравнения. Нулевой член асимптотического решения ИУ (1.1) для больших p и $h < a$ удобно строить в виде суперпозиции решений ИУ [1, 2, 6, 7]

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_+^L(\xi, p) k \left(\frac{\xi - x}{\Lambda}, p \right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad -1 \leq x < \infty \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^1 \varphi_-^L(\xi, p) k \left(\frac{\xi - x}{\Lambda}, p \right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad -\infty < x < 1 \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^L(\xi, p) k \left(\frac{\xi - x}{\Lambda}, p \right) d\xi = 2\pi f^L(p) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

по формуле

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L \left(\frac{1+x}{\Lambda}, p \right) + \varphi_-^L \left(\frac{1-x}{\Lambda}, p \right) - \varphi_{\infty}^L \left(\frac{x}{\Lambda}, p \right) \quad (2.4)$$

Ядра $k(t, p)$ ИУ (2.1)–(2.3) совпадают с (1.2), где контур интегрирования Γ деформирован в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ и совпадает с действительной осью ($\tau = 0, -\infty < \sigma < \infty$).

В (2.1), (2.2) делается замена переменных по формулам (знак плюс для (2.1), минус – для (2.2))

$$\pm \xi = \Lambda \xi' - 1, \quad \pm x = \Lambda x' - 1, \quad \pm d\xi = \Lambda d\xi'$$

В результате оба уравнения (2.1), (2.2) преобразуются в ИУ Винера–Хопфа [1, 7]

$$\int_0^{\infty} \varphi_{\pm}^L(\xi, p) k(\xi - x) d\xi = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (2.5)$$

Уравнение (2.3) после замены переменных

$$\xi = \Lambda \xi', \quad x = \Lambda x', \quad d\xi = \Lambda d\xi'$$

переходит в ИУ типа свертки на всей оси [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^L(\xi, p) k(\xi - x) d\xi = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.6)$$

Построив решение ИУ (2.5) для $\varphi_+^L(x, p)$, определим тем самым и $\varphi_-^L(x, p)$, так как в рассматриваемом случае $\varphi_+^L(x, p) = \varphi_-^L(x, p)$.

Следуя общей схеме решения ИУ Винера–Хопфа (2.5) [7, 8] для определения $\varphi_+^L(x, p)$ на первом шаге его решения ИУ (2.5) доопределяется на всю действительную ось, а затем с помощью интегрального преобразования Фурье (1.8) оно сводится к решению функционального уравнения

$$K(u, p)\Phi_+(u, p) = -\frac{1}{iu} \frac{f^L(p)}{\Lambda} + \frac{1}{2\pi} E_-(u, p) \quad (2.7)$$

справедливого в некоторой полосе $\tau_- < \text{Im}(u) < \tau_+$ комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, в которой введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_+(u, p) &= \int_0^{\infty} \varphi_+(\xi, p) \exp(iu\xi) d\xi \\ E_-(u, p) &= \int_{-\infty}^0 e(\xi) \exp(iu\xi) d\xi, \quad e(x, p) = \int_{-\infty}^0 \varphi_+^L(\xi, p) k(\xi - x) d\xi, \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом функция $\Phi_+(u, p)$ регулярна в верхней полуплоскости ($\text{Im}(u) > \tau_-$, $-1 \leq \tau_- \leq 0$), а $E_-(u, p)$ – в нижней полуплоскости ($\text{Im}(u) < \tau_+$, $0 < \tau_+ \leq 1$). Функции $K(u, p)$ вида (1.9), (1.10) регулярны по крайней мере в полосе $|\text{Im}(u)| < 1$.

В функциональном уравнении (2.7) функции $K(u, p)$ представим в виде ряда (1.13), где $K(u)$ – символ ядра ИУ соответствующей антиплоской НДКЗ о сдвиге штампом упругого полупространства [5]

$$K(u) = \sigma^{-1} \quad (2.9)$$

а d_n, b_n определены формулами (1.12).

Подставляя $K(u, p)$ вида (1.13) в функциональное уравнение (2.7) и осуществляя факторизацию функции $K(u)$ [7], которая в рассматриваемом случае достигается элементарными средствами,

$$K(u) = K_+(u)K_-(u), \quad K_+(u) = K_-(-u) = (1 - iu)^{-1/2} \quad (2.10)$$

и разделив полученное равенство на $K_-(u)$, получим функциональное уравнение

$$K_+(u)\Phi_+(u, p) = -\frac{f^L(p)}{\Lambda} g(u) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n M^n(u, p) + \frac{1}{2\pi} \frac{E_-(u, p)}{K_-(u)} \quad (2.11)$$

$$g(u) = \frac{1}{iuK_-(u)}, \quad M^n(u, p) = K_+(u)\Phi_+(u, p) \exp(-b_n \sigma)$$

Функции $g(u)$ и $M^n(u, p)$ представляются в виде суммы двух функций, одна из которых регулярна в верхней ($\text{Im}(u) > \tau_-$), а другая – в нижней полуплоскости ($\text{Im}(u) < \tau_+$) комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$

$$g(u) = g_+(u) + g_-(u) \quad (2.12)$$

$$M^n(u) = M_+^n(u) + M_-^n(u) \quad (2.13)$$

что можно сделать, например, воспользовавшись общей теоремой [7], откуда получим

$$g_+(u) = \frac{1}{iuK_-(0)}, \quad g_-(u) = \frac{1}{iu} \left[\frac{1}{K_-(u)} - \frac{1}{K_-(0)} \right] \quad (2.14)$$

$$M_+^n(u, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} K_+(\zeta) \Phi_+(\zeta, p) \exp(-b_n \sigma) \frac{d\zeta}{\zeta - u}, \quad \tau_- < c < \tau_+$$

$$M_-^n(u, p) = M^n(u, p) - M_+^n(u, p) \quad (2.15)$$

Подставив выражения (2.12), (2.13) в (2.11) и собрав регулярные в верхней ($\text{Im } u > \tau_-$) полуплоскости функции в левой части равенства, а регулярные в нижней ($\text{Im } u < \tau_+$) полуплоскости – в правой части того же равенства, получим равенство, которое в совокупности левой и правой его частей определяет некоторую функцию в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. В предположении, что функции $\Phi_+(u, p)$ и $E_-(u, p)/K_-(u)$ – убывающие при $|u| \rightarrow \infty$, можно показать, что левая и правая части полученного равенства убывают на бесконечности. Тогда определяемая ими функция – убывающая при $|u| \rightarrow \infty$. По теореме Лиувилля [7, 8] такая функция тождественно равна нулю в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. В этом случае из последнего равенства получаются два соотношения, определяющие $\Phi_+(u, p)$ и $E_-(u, p)$,

$$K_+(u) \Phi_+(u, p) + \frac{f^L(p)}{\Lambda} g_+(u) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n M_+^n(u, p) = 0 \quad (2.16)$$

$$-\frac{f^L(p)}{\Lambda} g_-(u) K_-(u) + 2 K_-(u) \sum_{n=1}^{\infty} d_n M_-^n(u, p) + E_-(u, p) = 0 \quad (2.17)$$

Определяя из равенства (2.16) искомую функцию $\Phi_+(u, p)$ и записывая полученную формулу в развернутом виде, получим для $\Phi_+(u, p)$ ИУ второго рода

$$\Phi_+(u, p) = -\frac{f^L(p)}{\Lambda} \frac{g_+(u)}{K_+(u)} + \frac{1}{\pi i K_+(u)} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \int_{\Gamma} N_n(\zeta, p) \frac{\Phi_+(\zeta, p)}{\zeta - u} d\zeta \quad (2.18)$$

$$N_n(u, p) = K_+(u) \exp(-b_n \sigma).$$

Контур Γ расположен в полосе регулярности функционального уравнения $\tau_- < \text{Im}(u) < \tau_+$. При этом, если $u \in \Gamma$, то (2.18) является сингулярным ИУ второго рода, а интеграл в правой его части понимается в смысле главного значения по Коши [7].

Интегральные уравнения, подобные (2.18), и подходы к их решению рассматривались ранее [7]. Здесь предлагается другой способ решения ИУ (2.18), учитывающий специфику его ядра.

Сингулярный интеграл в (2.18) ($u \in \Gamma$) для $N_n(\zeta, p) \Phi_+(\zeta, p) \in L_q(\Gamma)$ ($1 < q < \infty$) является ограниченным линейным отображением функционального пространства $L_q(\Gamma)$ на себя при любом q ($1 < q < \infty$) [10]. Поэтому решение ИУ (2.18) можно построить методом последовательных приближений.

При оценке интегрального оператора в (2.18) при $|u| \rightarrow \infty$, необходимой для выявления структуры метода последовательных приближений, учитывается оценка $K_+(u) = O(|u|^{-1/2})$ ($|u| \rightarrow \infty$) в предположении, что $\Phi_+(u, p) = O(|u|^{-1/2})$ ($|u| \rightarrow \infty$), с последующим применением метода перевала [11] к его исследованию, в результате чего получается неравенство ($|u| \rightarrow \infty$)

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} N_n(\zeta, p) \frac{\Phi_+(\zeta, p)}{\zeta - u} d\zeta \right| < \frac{|c_0(p)|}{|u|} \exp(-b_n) \quad (2.19)$$

где $c_0(p)$ – постоянная, зависящая от p , контур интегрирования Γ расположен в полосе регулярности $\tau_- < \text{Im}(u) < \tau_+$ и может совпадать с действительной осью. При этом особая точка $\zeta = u$ обходится снизу, если $u \in \Gamma$.

Для решения ИУ (2.18) методом последовательных приближений предлагается следующая итерационная схема:

$$\Phi_+^{m+1}(u, p) = -\frac{f^L(p)}{\Lambda} \frac{g_+(u)}{K_+(u)} + \frac{1}{\pi i K_+(u)} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \int_{\Gamma} N_n(\zeta, p) \frac{\Phi^m(\zeta, p)}{\zeta - u} d\zeta \quad (2.20)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

в которой за нулевое приближение $\Phi_+^0(u, p)$ берется известная функция из правой части равенства (2.20)

$$\Phi_+^0(u, p) = -\frac{f^L(p)}{\Lambda} \frac{g_+(u)}{K_+(u)} \quad (2.21)$$

которая в свою очередь является изображением Лапласа–Фурье решения соответствующей НДКЗ о сдвиге штампом упругого полупространства [5].

При реализации итерационного процесса (2.20) метода последовательных приближений вычисленные квадратуры записываются, как правило, в виде специальных функций и затрудняют выявление его структуры.

Выявление структуры итерационного процесса осуществляется с помощью асимптотического анализа интегрального оператора в (2.20).

Для $m = 0$ соотношение (2.20) приобретает специальный вид

$$\Phi_+^1(u, p) = \Phi_+^0(u, p) + \Delta\Phi_+^0(u, p) \quad (2.22)$$

$$\Delta\Phi_+^0(u, p) = \frac{1}{K_+(u)} \sum_{n_1=1}^{\infty} d_{n_1} \int_{\Gamma_1} N_{n_1}(\zeta_1, p) \frac{\Phi_+^0(\zeta_1, p)}{\zeta_1 - u} d\zeta_1$$

Воспользовавшись в данном случае неравенством (2.19), для оценки $\Delta\Phi_+^0(u, p)$ при $|u| \rightarrow \infty$ получим неравенство

$$|\Delta\Phi_+^0(u, p)| \leq \frac{|c_1(p)|}{|u|^{1/2}} \sum_{n_1=1}^{\infty} d_{n_1} \exp(-b_{n_1}) \quad (2.23)$$

Функция $\Phi_+^1(u, p)$ содержит бесконечное количество слагаемых, в каждом из которых присутствует (в асимптотическом смысле) экспонента $\exp(-b_{n_1})$ ($n_1 = 1, 2, \dots$). Эти слагаемые уточняются при последующих шагах метода последовательных приближений.

При $m = 1$ соотношение (2.20) после подстановки в него $\Phi_+^1(u, p)$ из (2.22) приобретает вид

$$\Phi_+^2(u, p) = \Phi_+^1(u, p) + \Delta\Phi_+^1(u, p) \quad (2.24)$$

$$\Delta\Phi_+^1(u, p) = \frac{1}{(\pi i)^2 K_+(u)} \sum_{n_2=1}^{\infty} d_{n_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} d_{n_1} \times \\ \times \int_{\Gamma_2} \frac{\exp(-b_{n_2} \sigma(\zeta_2))}{\zeta_2 - u} d\zeta_2 \int_{\Gamma_1} N_{n_1}(\zeta_1, p) \frac{\Phi_+^0(\zeta_1, p)}{\zeta_1 - \zeta_2} d\zeta_1$$

Для $\Phi_+^1(u, p)$ при $|u| \rightarrow \infty$ можно получить оценку

$$|\Delta\Phi_+^1(u, p)| \leq \frac{|c_2(p)|}{|u|^{1/2}} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \exp(-b_{n_1+n_2}) \quad (2.25)$$

которая свидетельствует о том, что к бесконечной сумме слагаемых в $\Phi_+^1(u, p)$ добавляется двукратная сумма слагаемых с экспонентами: $\exp(-b_{n_1} - b_{n_2})$, наименьший показатель которых $(b_{n_1} + b_{n_2}) = b_2$, так как $b_{n_1} + b_{n_2} = b_{n_1+n_2}$, а $\inf(n_1 + n_2) = 2$. Отсюда следует, что двукратная сумма $\Delta\Phi_+^1(u, p)$ не содержит слагаемого с экспонентой $\exp(-b_1)$ и, естественно, не дает поправки слагаемому в $\Phi_+^1(u, p)$, содержащему экспоненту с тем же показателем $-b_1$. Все другие слагаемые $\Phi_+^1(u, p)$ с экспонентами $\exp(-b_2), \exp(-b_3), \dots$ получают поправки от двукратной суммы $\Delta\Phi_+^1(u, p)$.

Таким образом, $\Phi_+^1(u, p)$ содержит только одно (первое) слагаемое с экспонентой $\exp(-b_1)$ в своей бесконечной сумме, не получающее поправок от дальнейших последовательных приближений. Функция $\Phi_+^2(u, p)$, являющаяся вторым приближением к $\Phi_+(u, p)$, содержит два слагаемых с экспонентами: $\exp(-b_1)$ и $\exp(-b_2)$, не подвергающихся изменению при дальнейших последовательных приближениях.

Для произвольного m интеграционная схема (2.20) записывается в виде

$$\Phi_+^{m+1}(u, p) = \Phi_+^m(u, p) + \Delta\Phi_+^m(u, p), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_+^m(u, p) = & \frac{1}{(\pi i)^{m+1} K_+(u)} \sum_{n_{m+1}=1}^{\infty} d_{n_{m+1}} \sum_{n_m=1}^{\infty} \dots \sum_{n_1=1}^{\infty} d_{n_{m+1}} \int_{\Gamma_{m+1}} \frac{\exp(-l_{n_{m+1}}(\zeta_{m+1}))}{\zeta_{m+1} - u} d\zeta_{m+1} \times \\ & \times \int_{\Gamma_m} \frac{\exp(-l_{n_m}(\zeta_m))}{\zeta_m - \zeta_{m+1}} d\zeta_m \dots \int_{\Gamma_1} \frac{K_+(\zeta_1) \Phi_+^0(\zeta_1, p)}{\zeta_1 - \zeta_2} \exp(-l_{n_1}(\zeta_1)) d\zeta_1 \\ l_{n_j}(u) = & b_{n_j} \sigma(u), \quad \sigma(u) = (u^2 + 1)^{1/2} \end{aligned}$$

где Γ_j – контуры интегрирования, лежащие в полосе регулярности $\tau_- < \text{Im}(u) < \tau_+$ ($j = 1, 2, \dots, m+1$), $\Phi_+^0(u, p)$ дается формулой (2.21).

Оценка

$$|\Delta\Phi_+^m(u, p)| \leq \frac{|c_m(p)|}{|u|^{1/2}} \sum_{n_{m+1}=1}^{\infty} \sum_{n_m=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \exp(-b_{n_1+n_2+\dots+n_{m+1}}), \quad |u| \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

показывает, что $\Phi_+^{m+1}(u, p)$ содержит $m+1$ первых слагаемых бесконечной суммы, не подвергающихся изменению при дальнейших итерациях, так как только первый член $m+1$ кратной суммы в $\Delta\Phi_+^m(u, p)$ с наименьшим показателем в экспоненте $\exp(-b_{m+1})$ ($\inf(n_1 + n_2 + \dots + n_{m+1}) = m+1$, а $b_{n_1} + b_{n_2} + \dots + b_{n_{m+1}} = b_{n_1+n_2+\dots+n_{m+1}}$ уточняет $(m+1)$ -й член, содержащийся в $\Phi_+^m(u, p)$, а также все последующие с показателями экспонент большими по номеру: $b_{m+2}, b_{m+3}, \dots$. Первые $m+1$ слагаемых в $\Phi_+^{m+1}(u, p)$ являются математическим описанием $m+1$ переотраженных от нижней грани слоя упругих волн, пришедших под штамп, и для их определения требуется выполнить m итераций в (2.20).

Важно отметить, что полученные приближенные решения $\Phi_+^j(u, p)$ ($j = 1, 2, \dots, m+1$) ИУ (2.18) будут того же порядка точности по u , что и $\Phi_+^0(u, p)$. Это подтверждается оценками (2.13), (2.25), (2.27).

Для построения приближенного решения рассматриваемых НКЗД с одной переотраженной от нижней грани слоя волной, пришедшей под штамп, необходимо взять решение ИУ (2.18) $\Phi_+^1(u, p)$ (2.22). Подставив (2.21) в (2.22) и воспользовавшись явными

выражениями для $K_{\pm}(u)$ (2.10) получим

$$\begin{aligned} \Phi_+^1(u, p) = & \Phi_+^0(u, p) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) \Phi_+^0(u, p) + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n \Phi_+^0(u, p) \int_0^{\infty} \frac{K_1(v_n(\xi)) \exp(iu\xi)}{v_n(\xi)} d\xi, \quad v_n(x) = \sqrt{b_n^2 + x^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $K_1(u)$ – функция Макдональда.

Применяя к (2.21) и к (2.28) обратное преобразование Фурье, найдем нулевое и первое приближения решения ИУ (2.5)

$$\Phi_{\pm}^{mL}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\pm}^m(u, p) e^{-iux} du, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Реализация (2.29) приводит к формулам [3, 4, 12]

$$\Phi_+^{0L}(x, p) = \frac{f^L(p)}{\Lambda} \left(\operatorname{erf} \sqrt{x} + \frac{\exp(-x)}{\sqrt{\pi x}} \right) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}^{1L}(x, p) = & \Phi_{\pm}^{0L}(x, p) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) \Phi_{\pm}^{0L}(u, p) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n \int_0^{\infty} \frac{K_1(b_n v(\xi)) \Phi_{\pm}^{0L}(x - b_n \xi, p)}{v(\xi)} d\xi, \quad v(x) = \sqrt{1 + x^2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Нулевое приближение $\Phi^{0L}(x, p)$ не содержит отраженных от нижней грани слоя упругих волн и пришедших под штамп (соответствует решению НДКЗ для упругой полуплоскости), о чем свидетельствует верхний нулевой индекс, $\Phi^{1L}(x, p)$ – первое приближение – содержит одну отраженную от нижней грани слоя упругую волну, о чем свидетельствует верхний индекс единица.

ИУ (2.6) для рассматриваемых НДКЗ допускает точное решение с помощью интегрального преобразования Фурье (1.8) и имеет вид

$$\Phi_{\infty}^L(x, p) = \frac{f^L(p)}{\Lambda} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp(-b_n) \right], \quad g_n = \begin{cases} -1 & \text{для задачи А} \\ (-1)^{n+1} & \text{для задачи Б} \end{cases} \quad (2.32)$$

При решении ИУ (2.6) можно использовать метод последовательных приближений, предложенный для решения ИУ (2.18). Для этого ИУ (2.6) с помощью интегрального преобразования Фурье (1.8) сводится к решению функционального уравнения

$$K(u, p) \Phi_{\infty}(u, p) = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda} \delta(u) \quad (2.33)$$

где $\delta(u)$ – дельта-функция Дирака. Функции $K(u, p)$ для задач А и Б представляем в специальной форме (1.11) и подставляем в (2.33), и после деления на $K(u)$ получаем

$$\Phi_{\infty}(u, p) = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda} \frac{\delta(u)}{K(u)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n \sigma) \Phi_{\infty}(u, p)$$

Итерационный процесс организуется по схеме, аналогичной (2.20),

$$\Phi_{\infty}^{m+1}(u, p) = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda} \frac{\delta(u)}{K(u)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n \sigma) \Phi_{\infty}^m(u, p), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

$$\Phi_{\infty}^0(u, p) = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda} \frac{\delta(u)}{K(u)}$$

и может быть записан по новой схеме, аналогичной (2.26),

$$\Phi_{\infty}^{m+1}(u, p) = \Phi_{\infty}^m(u, p) + \Delta\Phi_{\infty}^m(u, p), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

$$\Delta\Phi_{\infty}^m(u, p) = 2 \sum_{n_{m+1}=1}^{\infty} d_{n_{m+1}} 2 \sum_{n_m=1}^{\infty} d_{n_m} \dots 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} d_{n_1} \exp(-b_{n_1+n_2+\dots+n_{m+1}}) \Phi_{\infty}^0(u, p)$$

Повторяя рассуждения, описанные при реализации итерационной схемы (2.26), нетрудно установить на основании (2.35), что при $m = 0$ (2.34) дает

$$\Phi_{\infty}^1(u, p) = 2\pi \frac{f^L(p)}{\Lambda K(u)} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n \sigma) \right) \delta(u) \quad (2.36)$$

Используя свойства дельта-функции в равенстве (2.36) и применяя к нему обратное преобразование Фурье, получим решение

$$\varphi_{\infty}^{1L}(x, p) = \frac{f^L(p)}{\Lambda} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) \right) \quad (2.37)$$

которое содержит нулевой и первый члены, совпадающие с точным решением (2.32), а полученная таким образом функция $\varphi_{\infty}^{m+1,L}(x, p)$ будет содержать первые $m + 2$ членов, совпадающих с точным решением (2.32).

Нулевой член асимптотического решения ИУ (1.1), содержащий описание одной (первой) переотраженной от нижней грани слоя упругой волны и пришедшей под штамп, строится по формуле

$$\varphi^{1L}(x, p) = \varphi_+^{1L}\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_-^{1L}\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_{\infty}^{1L}\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) \quad (2.38)$$

где верхний индекс указывает количество отраженных волн, содержащихся в решении. В (2.38) $\varphi_+^{1L}(x, p)$ дается формулой (2.31), а $\varphi_{\infty}^{1L}(x, p)$ – формулой (2.37).

3. Решение рассматриваемых НДКЗ. В предыдущем разделе определено приближенное решение ИУ НДКЗ – функция $\varphi^{1L}(x, p)$ (2.38), являющаяся трансформантой Лапласа искомых контактных напряжений. Для определения решения НДКЗ, поставленных в разд. 1, достаточно взять обращение по Лапласу от $\varphi^{1L}(x, p)$ (2.38). В результате этого получим решение поставленных задач в виде

$$\varphi^1(x, t) = \varphi_+^1\left(\frac{a(1+x)}{c}, t\right) + \varphi_-^1\left(\frac{a(1-x)}{c}, t\right) - \varphi_{\infty}^1\left(\frac{ax}{c}, t\right) \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_{\pm}^1(x, t) = \varphi_{\pm}^0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_{\pm}^0(x, t - \beta_n) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{d}{dt} \int_0^{\xi_*} \frac{d\xi}{v^2(\xi)} \int_{t_*}^t \frac{\tau \varphi_{\pm}^0(x - \beta_n \xi, t - \tau)}{\sqrt{\tau^2 - \beta_n^2 v^2(\xi)}} d\tau \quad (3.2)$$

$$\varphi_+^0(u, t) = \frac{G}{c} \left[\frac{1}{\pi \sqrt{u}} \frac{d}{dt} \int_u^t \tau^{-1} \sqrt{\tau - u} \varepsilon(t - \tau) d\tau + \varepsilon'(t) - \varepsilon(\beta_n) \right] \quad (3.3)$$

$$\varphi_{\infty}^1(u, t) = \frac{G}{c} \left[\varepsilon'(t) + \varepsilon(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\varepsilon'(t - \beta_n) + \varepsilon(\beta_n)) \right] \quad (3.4)$$

Здесь

$$t_* = \max\{\beta_n \sqrt{\xi^2 + 1}, x - \beta_n \xi\} \quad \xi_* = \min\left\{\frac{\sqrt{t^2 - \beta_n^2}}{\beta_n}, \frac{a(1+x)}{\beta_n c}\right\}, \quad \beta_n = 2n \frac{h}{c}$$

причем для функции $\varphi_+^0(x, t)$, стоящей вне суммы в (3.2), $\beta_n = 0$; G – модуль сдвига.

В наиболее простом случае, когда $\varepsilon(t) = w_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, решение НДКЗ принимает наиболее простой вид (3.1), где

$$\varphi_+^0(u, t) = \frac{Gw_0}{c} \left[\frac{\sqrt{t-u}}{\pi t \sqrt{u}} + \delta(t) \right], \quad \varphi_\infty^1(u, t) = \frac{Gw_0}{c} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta(t - \beta_n) + \delta(t) \right] \quad (3.5)$$

а $\varphi_\pm^1(x, t)$ вычисляется по формуле (3.2).

Формулы (3.1)–(3.5) позволяют проанализировать характер волнового поля напряжений под штампом, в том числе и в период прихода под штамп первой отраженной от нижней грани слоя волны. При $0 < t < \beta_1$ (до прихода отраженной волны) поле контактных напряжений полностью совпадает с полем контактных напряжений задачи о сдвиге штампом упругого полупространства [5]. При $\beta_1 < t < \beta_2$ пришедшая под штамп отраженная от нижней грани слоя волна напряжений в момент времени $t = \beta_1$ порождает новые волны контактных напряжений, распространяющиеся от краев штампа, как от источников со скоростью звука c .

На фронте этих волн при $\beta_1 < t < \beta_2$, как и при $0 < t < \beta_1$, особенность отсутствует, постоянные же особенности напряжений в краях штампа присутствуют в решении.

4. Величина силы, действующей на штамп. Величина действующей на штамп силы, под действием которой штамп смещается по закону $\varepsilon(t)$, вычисляется по формуле

$$T(t) = a \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx \quad (4.1)$$

В рассматриваемом случае ее трансформанту Лапласа можно найти по формуле

$$T^{1L}(p) = a \int_{-1}^1 \varphi^{1L}(x, p) dx \quad (4.2)$$

(функция $\varphi^{1L}(x, p)$ дана формулой (2.38)). В этом случае формула (4.2) преобразуется к виду

$$T^{1L}(p) = T_+^{1L}(p) + T_-^{1L}(p) - T_\infty^{1L}(p) \quad (4.3)$$

$$T_\pm^{1L}(p) = a \int_{-1}^1 \varphi_\pm^{1L}(x, p) dx, \quad T_\infty^{1L}(p) = a \int_{-1}^1 \varphi_\infty^{1L}(x, p) dx$$

В рассматриваемом случае имеем ($T_+^{1L}(p) = T_-^{1L}(p)$)

$$T_+^{1L}(p) = T_+^{0L}(\theta, p) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) T_+^{0L}(\theta, p) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n \int_0^{\theta/(b_n)} \frac{K_1(b_n \nu(\xi)) T_+^{0L}(\theta - b_n \xi, p)}{\nu(\xi)} d\xi, \quad \theta = \frac{2}{\Lambda} = \frac{2ap}{c} \quad (4.4)$$

$$T_+^0(u, p) = a \frac{f^L(p)}{\Lambda} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf} \sqrt{u} + \sqrt{\frac{u}{\pi}} \exp(-u) + u \right]$$

$$T_\infty^1(p) = 2a \frac{f^L(p)}{\Lambda} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) \right]$$

Применяя к (4.3) обратное преобразование Лапласа, получим ($T_+^1(t) = T_-^1(t)$)

$$T^1(t) = 2T_+^1(t) - T_\infty^1(t) \quad (4.5)$$

$$T_+^1(t) = T_+^0(2a/c, t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n T_+^0(2a/c, t - \beta_n) + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{d}{dt} \int_0^{\xi_*} \frac{d\xi}{v^2(\xi)} \int_{t_*}^t \frac{\tau T_+^0(2a/c - \beta_n \xi, t - \tau)}{\sqrt{\tau^2 - \beta_n^2 v^2(\xi)}} d\tau$$

$$\beta_n = 2n \frac{h}{c}, \quad \xi_* = \frac{2a - ct}{nh}, \quad t_* = \beta_n v(\xi)$$

где

$$T_+^0(u, t) = G \left[\frac{1}{2} \varepsilon(t) + u(\varepsilon'(t) + \varepsilon(0)) - \frac{\sqrt{u}}{2\pi} S_1(u, t) + \frac{\sqrt{u}}{\pi} \frac{d}{dt} S_2(u, t) - \frac{u\sqrt{u}}{\pi} \frac{d}{dt} S_1(u, t) \right] \quad (4.6)$$

$$S_1(u, t) = \int_u^t \frac{\varepsilon(t - \tau)}{\tau \sqrt{\tau - u}} d\tau, \quad S_2(u, t) = \int_u^t \frac{\varepsilon(t - \tau)}{\tau \sqrt{\tau - u}} d\tau.$$

$$T_\infty^1(t) = \frac{2a}{c} G \left[\varepsilon'(t) + \varepsilon(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\varepsilon'(t - \beta_n) + \varepsilon(\beta_n)) \right]$$

В простейшем случае, когда $\varepsilon(t) = w_0 H(t)$, имеем вместо (4.6)

$$T_+^0(u, t) = G w_0 \left[\frac{1}{2} H(t) - \frac{1}{\pi u} \operatorname{arctg} \sqrt{u(t - u)} + \frac{u \sqrt{u(t - u)}}{\pi(1 + u(t - u))} + u \delta(t) \right]$$

$$T_\infty^1(t) = \frac{2a}{c} G w_0 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta(t - \beta_n) + \delta(t) \right]$$

Отметим, что, как и ранее, бесконечная сумма в (4.5) содержит только одну первую отраженную волну описываемую первым слагаемым суммы, остальные выписываются формально и требуют уточнения. Анализ формулы показывает, что слагаемые в (4.5), находящиеся вне суммы, составляют силу $T(t)$ соответствующей НДКЗ для полупространства ($0 < t < \beta_1$) [9]. Первое слагаемое в (4.5) в бесконечной сумме соответствует алгебраической добавке при $\beta_1 < t < \beta_2$ к силе за счет прихода первой отраженной от нижней грани слоя волны напряжений.

5. О движении штампа. Устанавливается закон движения штампа $\varepsilon(t)$, когда известна его погонная масса m и скорость $\dot{\varepsilon}(0) = v_0$ в начальный момент времени ($t = 0$). В этом случае уравнение движения штампа имеет вид

$$m \ddot{\varepsilon}(t) = -T(t) \quad (5.1)$$

при начальных условиях $\dot{\varepsilon}(0) = v_0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, где ε_0 — начальное до момента времени $t = 0$ смещение штампа. Силу $T(t)$ упругого сопротивления движению штампа, обусловленную контактными напряжениями между штампом и упругим слоем, будем считать равной величине $T^1(t)$ для начального промежутка времени $0 < t < 4hc^{-1}$, которая определяется формулой (4.5).

Применив для решения уравнения (5.1) методы операционного исчисления [13], для изображения $\varepsilon^L(p)$ искомой функции $\varepsilon(t)$ получим

$$m[p^2 \varepsilon^L(p) - \varepsilon(0)p - \dot{\varepsilon}(0)] = -T^1 L(p) \quad (5.2)$$

где $T^{1L}(p)$ дается формулой (4.3). В рассматриваемом случае

$$\varepsilon^L(p) = \frac{\varepsilon(0)p + \dot{\varepsilon}(0)}{mp^2 + GN(p)} \quad (5.3)$$

$$N(p) = 2m_+^0(\theta, p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) m_+^0(\theta, p) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) \theta + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n \int_0^{a/(nh)} \frac{K_1(b_n \nu(\xi)) m_+^0(\theta - b_n \xi, p)}{\nu(\xi)} d\xi - \theta \quad (5.4)$$

$$m_+^0(\theta, p) = (\theta + 1/2) \operatorname{erf} \sqrt{\theta} + \sqrt{\gamma/\pi} \exp(-\theta) + \theta$$

Для получения приближенного решения $\varepsilon(t)$ в (5.3), (5.4) заменяем все функции их асимптотиками ($p, \theta \rightarrow \infty$)

$$m_+^0(\theta, p) = (\theta + 1/2 - \exp(-\theta)/(2\sqrt{\pi\theta}) + O(\theta^{-3/2} \exp(-\theta))), \quad \theta \rightarrow \infty$$

$$K_1(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} \exp(-u) \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right), \quad u \rightarrow \infty$$

а для оценки интеграла в (5.4) применяется метод перевала [11]. Тогда получаем приближенную формулу

$$\varepsilon^L(p) = \frac{\varepsilon(0)p + \dot{\varepsilon}(0)}{M(p)} + \frac{\varepsilon(0)p + \dot{\varepsilon}(0)}{M^2(p)} Q(p), \quad M(p) = mp^2 + \theta G + G \quad (5.5)$$

$$Q(p) = G \left[\frac{\exp(-\theta)}{\sqrt{\pi\theta}} - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(-b_n) \left(4\theta + 3 - 3 \frac{\exp(-\theta)}{\sqrt{\pi\theta}} \right) \right]$$

При малых t ($0 < t < \beta_2$) получим

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)(\dot{E}(t) + \dot{D}(t)) + \dot{\varepsilon}(0)(E(t) + D(t)) \quad (5.6)$$

$$\text{Здесь } D(t) = \int_{\beta_n}^t \tau E(\tau) F(t - \tau) d\tau$$

$$F(t) = \frac{G}{\sqrt{\pi\tau_0}} \left[2\sqrt{t - \tau_0} - \sum_{n=1}^{\infty} d_n (4\tau_0 \delta(t - \beta_n) + 3H(t - \beta_n) - 6\sqrt{t - \tau_0 - \beta_n}) \right] \quad (5.7)$$

$$E(t) = m^{-1} \exp(-\delta t) \times \begin{cases} \omega^{-1} \sin \omega t, & \omega = \sqrt{\delta_0 - \delta^2} \\ \omega^{-1} \operatorname{sh} \omega t, & \omega = \sqrt{\delta^2 - \delta_0} \\ t, & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\delta = aG/(cm), \quad \delta_0 = G/m, \quad \tau_0 = 2a/c, \quad \beta_n = 2nh/c$$

Формула (5.6) для $\varepsilon(t)$ ($\varepsilon(0) = 0$) показывает, что в зависимости от знака величины $\Delta = a^2\rho - m$ (ρ – плотность материала слоя) закон движения штампа будет затухающим при $\Delta \geq 0$ и колебательно-затухающим при $\Delta < 0$. Первое и второе слагаемые во второй формуле (5.7), стоящие под знаком суммы ($n = 1$), показывают, в случае задачи А, что отраженная от нижней жестко заземленной грани слоя волна напряжений, пришедшая под штамп, действует на штамп в противоположном его первоначальному движению направлении ($d_1 = 1$), а в случае задачи Б та же волна сообщит ему дополнительный импульс в направлении его первоначального смещения ($d_1 = -1$).

Полученные формулы справедливы до момента времени $2a/c$, необходимого для прохождения упругой волны от одного края штампа до другого, и имеют смысл при $h < a$, когда хотя бы одна отраженная от нижней грани слоя упругая волна успевает прийти под штамп.

Автор благодарит В.М. Александрова за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00-428 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
3. Bateman H., Erdelyi A. et. al. Tables of integral transforms. N.Y., etc.: Mc Graw-Hill, 1954. = Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
4. Dwight H. Tables of integrals and other mathematical data. N.Y.: Mc Millan, 1961. = Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228 с.
5. Коваленко Е.В., Зеленцов В.Б. Асимптотические методы в нестационарных динамических контактных задачах для упругого полупространства // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 111–119.
6. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
7. Noble B. Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. London, etc.: Pergamon Press, 1968. = Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
9. Titchmarsh E.C. The theory of functions. Oxford University Press, 1939. = Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
10. Pressdorf S. Einige Klassen singulärer Gleichungen. Akademie Verlag Berlin, 1974. = Прессдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. 493 с.
11. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
13. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1966. 405 с.