

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. В.И. Гуляев, П.З. Луговой, Г.М. Иванченко,
Е.В. Яковенко

ДИФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Рассматривается взаимодействие ударной волны с криволинейной поверхностью раздела трансверсально-изотропных упругих сред с различающимися механическими свойствами, сопровождаемое формированием фронтов проникших и отраженных квазипродольных и квазипоперечных ударных волн. Для построения эволюционирующей поверхности фронта ударной волны и вычисления величин разрывов функций деформаций в точках этого фронта используется нулевое приближение лучевого метода. Решение обобщенных уравнений Снеллиуса, характеризующих направления нормалей к поверхностям фронтов, отходящих от поверхности раздела, определяется методом продолжения по параметру совместно с алгоритмом Ньютона. Рассмотрен пример для эллипсоидальной разделяющей поверхности. Установлены особые случаи трансформирования волновых фронтов, связанные с образованием лучевых каустик и бифуркаций фронтовых поверхностей, а также возникновением эффекта типа полного внутреннего отражения.

Применение лучевого метода [1–3] в теории распространения ударных волн разной физической природы дает возможность построить поверхность фронта волны и проследить за поведением полевых функций в некоторой его окрестности. Систематизированное изложение истории развития метода лучевых рядов применительно к задачам о распространении и рассеянии гармонических и нестационарных изотропных упругих волн, известных его обобщений и некоторых смежных вопросов, имеющих теоретический и практический интерес, дано в монографии [3].

Располагая системой волновых лучей, можно ставить задачу о выделении их семейства, имеющего общие огибающие (каустики), на которых лучи фокусируются и интенсивность поля неограниченно возрастает, а также вдоль которых движутся особенности волнового фронта. В геометрической оптике классификация каустик и особенностей фронтов осуществляется на основе теории особенностей дифференцируемых отображений – теории катастроф [1, 4–6].

Задачи динамической теории упругости для анизотропных упругих сред исследованы в гораздо меньшем объеме, нежели сходные по постановке задачи для изотропных сред, так как разработанные для случая изотропии эффективные методы не допускают простого обобщения на анизотропные системы вследствие сложности свойств последних. Наиболее полному исследованию здесь подверглись плоские монохроматические волны, имеется [2, 7] детальный анализ процессов их распространения и дифракции. Был предложен [8] метод определения формы поверхности фронта упругих волн, возбуждаемых источником произвольной формы в неограниченной анизотропной среде, заключающийся в решении задачи Коши для уравнения характеристик. Весомый вклад в развитие лучевого метода применительно к задачам распространения и дифракции упругих волн в анизотропных средах внесен ленинградской школой математиков ([9, 2] и др.). В последнее время была предложена [10] лучевая теория удара, позволяющая эффективно решать вопрос о характере взаимодействия упругого ударника и упругой мишени, а также решен ряд других задач. Имеется обзор последних достижений в этой области [11].

В задачах динамики анизотропных упругих сред благодаря тому, что их поведение отличается наличием различным образом поляризованных волн, фазовые скорости которых

зависят от направления движения, лучи перестают быть ортогональными поверхностям фазовых фронтов и в общем случае возникают дополнительные трудности. В связи с тем что знаменатели соответствующих уравнений Снеллиуса, описывающих кинематику взаимодействия ударных волн с поверхностями раздела упругих сред с различающимися механическими свойствами, перестают быть константами и сами уравнения становятся существенно нелинейными, методика их решения также усложняется. Особые решения этих уравнений связаны с бифуркациями волновых фронтов, формирующихся в результате эффектов отражения – преломления.

1. Разрешающие соотношения. Движение упругой анизотропной среды, характеризуемой тензором упругих постоянных $c_{ik,pq}$ и плотностью ρ , в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнениями

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Здесь $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}/\rho$; u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора упругих смещений.

Представим решения системы (1.1) в виде плоской монохроматической волны с волновым числом k и фазовой скоростью v . Ее фронтами являются поверхности постоянных фаз $\mathbf{n}\mathbf{r} - vt = \text{const}$, движущиеся со скоростью $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{n}$ и локально совпадающие с площадками, перпендикулярными орту $\mathbf{n}$.

Вектор поляризации $\mathbf{A}$ волны и ее фазовая скорость v для выбранного направления $\mathbf{n}$ определяются на основе однородной системы алгебраических уравнений [2, 6]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

матрица коэффициентов которой обладает свойствами симметрии и положительной определенности.

Из условия существования нетривиальных решений этой системы следует уравнение третьей степени относительно v^2 с корнями $v_r^2(\mathbf{n})$. Для каждого значения $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1, 2, 3$) строится система (1.2), с помощью которой вычисляются ортогональные компоненты вектора поляризации $\mathbf{A}^{(r)}$ волны, движущейся в направлении $\mathbf{n}$ с фазовой скоростью $v_r(\mathbf{n})$.

Поверхность фронта ударной волны можно представить соотношением

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0 \quad (1.3)$$

в котором функция τ должна удовлетворять уравнению в частных производных первого порядка [7]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1 \quad (1.4)$$

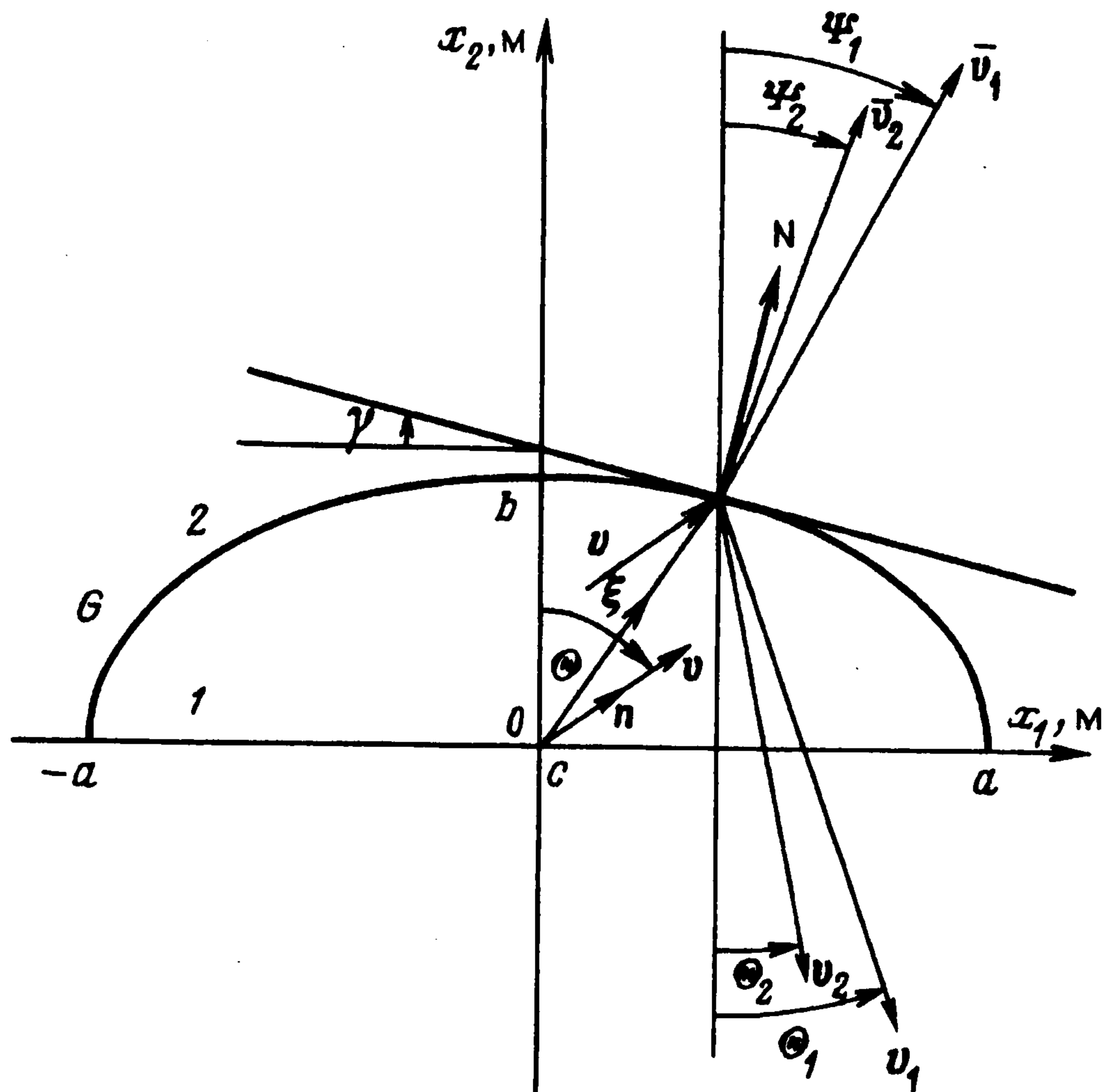
обобщающему уравнение эйконала в геометрической оптике на случай анизотропных упругих сред.

Входящие в (1.4) величины p_k ($k = 1, 2, 3$) представляют собой компоненты вектора рефракции $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v_r(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Для построения волнового фронта (1.3) необходимо найти решения уравнения (1.4), которое с помощью метода характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

Первая группа этих уравнений описывает распространение волны вдоль лучей с лучевой скоростью $\xi = \xi^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$, которые для однородных сред оказываются прямо-



Фиг. 1

линейными, однако в общем случае не ортогональными фазовому фронту. Точки поверхности фронта, в которых определитель матрицы

$$\left\| \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} A_q^{(r)} A_i^{(r)} \right\|, \quad k = 1, 2, 3$$

коэффициентов правой части этой системы обращается в нуль, являются бифуркационными, поскольку в их малой окрестности одному направлению вектора нормали $\mathbf{n}$ могут соответствовать два или более направлений лучей. Поэтому такие точки лежат либо на каустиках, либо в точках фокусировки лучей.

Построенная с помощью (1.5) система лучей и фронтов позволяет приступить к определению интенсивности волны в окрестности фронта. Для этого используется нулевой член разложения решения системы (1.1) вдоль луча в ряд

$$u_q = \sum_{m=0}^{\infty} u_q^{(m)}(x_1, x_2, x_3) f_m[t - \tau(x_1, x_2, x_3)], \quad q = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

где функции f_m , удовлетворяющие соотношениям $f'_m(y) = f_{m-1}(y)$, предполагаются имеющими разрывы непрерывности в производных, например, порядка $n + 2$ [2].

В этом случае вектор $\mathbf{u}^{(0)}$ находится из однородной системы уравнений

$$\sum_{k,p,q} \lambda_{ik,pq} p_k p_p u_q^{(0)} - u_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

решение которой представляется в виде [2]

$$u_q^{(0)} = \frac{c_0(\alpha, \beta) A_q^{(r)}(\tau, \alpha, \beta)}{\sqrt{J(\tau, \alpha, \beta)}} f_0[t - \tau(x_1, x_2, x_3)], \quad q = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

где τ, α, β – система лучевых координат, а функциональный определитель $J = \partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(\tau, \alpha, \beta)$ преобразования лучевых координат в декартовы является мерой расхождения лучей в лучевой трубке.

2. Методика решения. Приведенные выше соотношения позволяют проследивать эволюцию фронта ударной волны и вычислять значения разрывов полевых функций на его поверхности вне границы раздела анизотропных упругих сред с различными свойствами. Рассмотрим случай взаимодействия осесимметричной ударной волны, испущенной из источника S , с эллипсоидальной поверхностью вращения G раздела двух трансверсально-изотропных упругих сред (фиг. 1). Пусть оси симметрии бесконечно высокого порядка упругих свойств их материалов и ось вращения эллипсоида параллельны между собой и задача осесимметрична. Примем "локально-плоское приближение" [2], в соответствии с которым в месте падения волны на разделяющую поверхность G лучи падающей, отраженных и преломленных волн, а также векторы их поляризации лежат в одной плоскости, содержащей луч падающей волны и нормаль к поверхности. Это позволяет вводить в рассмотрение углы Θ_v и Ψ_μ ($\mu, v = 1, 2$), с которыми отраженные и преломленные волны отходят от границы G , и применять обобщенный закон Снеллиуса, выражаемый равенствами

$$\frac{\sin(\Theta - \gamma)}{\nu(\Theta)} = \frac{\sin(\Theta_v + \gamma)}{\nu_v(\Theta_v)} = \frac{\sin(\Psi_\mu - \gamma)}{\bar{\nu}_\mu(\Psi_\mu)}, \quad v, \mu = 1, 2 \quad (2.1)$$

Здесь Θ – угол между направлением волновой нормали падающей в среде 1 волны и осью Ox_2 , Θ_v, Ψ_μ ($v, \mu = 1, 2$) – углы между направлением волновой нормали и осью Ox_2 соответственно отраженных в среду 1 и проникших в среду 2 волн (фиг. 1). Значения индексов $v = \mu = 1$ соответствуют квазипродольным волнам, значения $v = \mu = 2$ – квазипоперечным волнам, γ – угол наклона касательной к эллиптической поверхности раздела.

Отличие соотношений (2.1) от формы закона Снеллиуса для изотропных сред обусловлено зависимостью знаменателей $\nu_v(\Theta_v), \bar{\nu}_\mu(\Psi_\mu)$ от соответствующих углов Θ_v, Ψ_μ и неявно от угла падения Θ . Поэтому, чтобы найти значения углов Θ_v, Ψ_μ ($v, \mu = 1, 2$), соответствующих данному Θ , необходимо решить нелинейную систему уравнений (2.1). Для этого воспользуемся методом Ньютона совместно с методом продолжения решения по параметру [12, 13]. Вследствие того, что в системе (2.1) угол γ переменный, при построении ее решений $\Theta_v(\Theta), \Psi_\mu(\Theta)$ будем варьировать также и его. В качестве ведущего параметра выберем переменную Θ .

Рассмотрим первое равенство системы (2.1). Пусть при некотором значении $\Theta = \Theta^{(n)}$ углы $\Theta_v^{(n)}$ и $\gamma^{(n)}$ определены. Дадим малое приращение $\Delta\Theta^{(n)}$ величине $\Theta^{(n)}$. Соответствующее ему приращение $\Delta\gamma^{(n)}$ найдем как разность углов $\gamma^{(n+1)} - \gamma^{(n)}$, соответствующих значениям $\Theta^{(n+1)}, \Theta^{(n)}$ для выбранного очертания поверхности раздела. Чтобы найти приращения $\Delta\Theta_v^{(n)}$, выпишем вытекающее из (2.1) равенство

$$\begin{aligned} & \sin(\Theta^{(n)} - \gamma^{(n)} + \Delta\Theta^{(n)})\nu_v(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)} + \Delta\Theta_v^{(n)}) - \\ & - \sin(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)} + \Delta\Theta_v^{(n)})\nu(\Theta^{(n)} - \gamma^{(n)} + \Delta\Theta^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

Выделяя его линейную часть, получим

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_v^{(n)} \approx & \{ [\sin(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)})\partial\nu(\Theta^{(n)})/\partial\Theta - \cos(\Theta^{(n)} - \gamma^{(n)})\nu_v(\Theta_v^{(n)})]\Delta\Theta^{(n)} + \\ & + [\cos(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)})\nu(\Theta^{(n)}) - \cos(\Theta_v^{(n)} - \gamma^{(n)})\partial\nu_v(\Theta_v^{(n)})/\partial\Theta]\Delta\gamma^{(n)} \} \times \\ & \times [\sin(\Theta^{(n)} - \gamma^{(n)})\partial\nu_v(\Theta_v^{(n)})/\partial\Theta_v - \cos(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)})\nu(\Theta^{(n)})]^{-1}, \quad \Delta\gamma = f(\Delta\Theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подсчитав $\Delta\Theta_v^{(n)}$, находим кинематические параметры элемента поверхности фронта $\Theta^{(n+1)} = \Theta^{(n)} + \Delta\Theta^{(n)}$, $\Theta_v^{(n+1)} = \Theta_v^{(n)} + \Delta\Theta_v^{(n)}$, $\nu_v(\Theta_v^{(n+1)})$. Выполнив линеаризацию уравнений (2.1) в окрестности этого состояния, определяем $\Delta\Theta_v^{(n+1)}$, соответствующее $\Delta\Theta^{(n+1)}$, и т.д. При этом необходимо иметь в виду, что, поскольку зависимость (2.2) приближенная, погрешность вычисления $\Delta\Theta_v^{(m)}$ с увеличением m возрастает. Поэтому для компенсации неточности необходимо, как это делается в методе Ньютона, добавить в правую часть (2.2) невязку уравнений (2.1), взятую с обратным знаком. В итоге получим вычислительную схему (многоточие означает правую часть приближенного равенства (2.2))

$$\Delta\Theta_v^{(n)} \approx \dots + \sin(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)})\nu(\Theta^{(n)}) - \sin(\Theta^{(n)} - \gamma^{(n)})\nu_v(\Theta_v^{(n)}) \quad (2.3)$$

совмещающую метод продолжения решения по параметру и метод Ньютона, точность которой повышается с уменьшением $\Delta\Theta^{(n)}$. Для вычисления производной $\partial\mathcal{U}/\partial\Theta$ необходимо продифференцировать левую часть уравнения (1.2) по Θ и приравнять производную нулю.

Обозначим B матрицу элементов

$$b_{iq} = \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - \nu^2 \delta_{iq}$$

алгебраические дополнения которых B_{iq} ($i, q = 1, 2, 3$). Тогда, поскольку при варьировании Θ условие (1.2) сохраняется, имеем $\partial|B|/\partial\Theta = 0$, или

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial b_{iq}}{\partial\Theta} B_{iq} = 0$$

Подставив в это равенство

$$\frac{\partial b_{iq}}{\partial\Theta} = \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} \left(n_k \frac{\partial n_p}{\partial\Theta} + n_p \frac{\partial n_k}{\partial\Theta} - 2\nu \frac{\partial\nu}{\partial\Theta} \delta_{iq} \right)$$

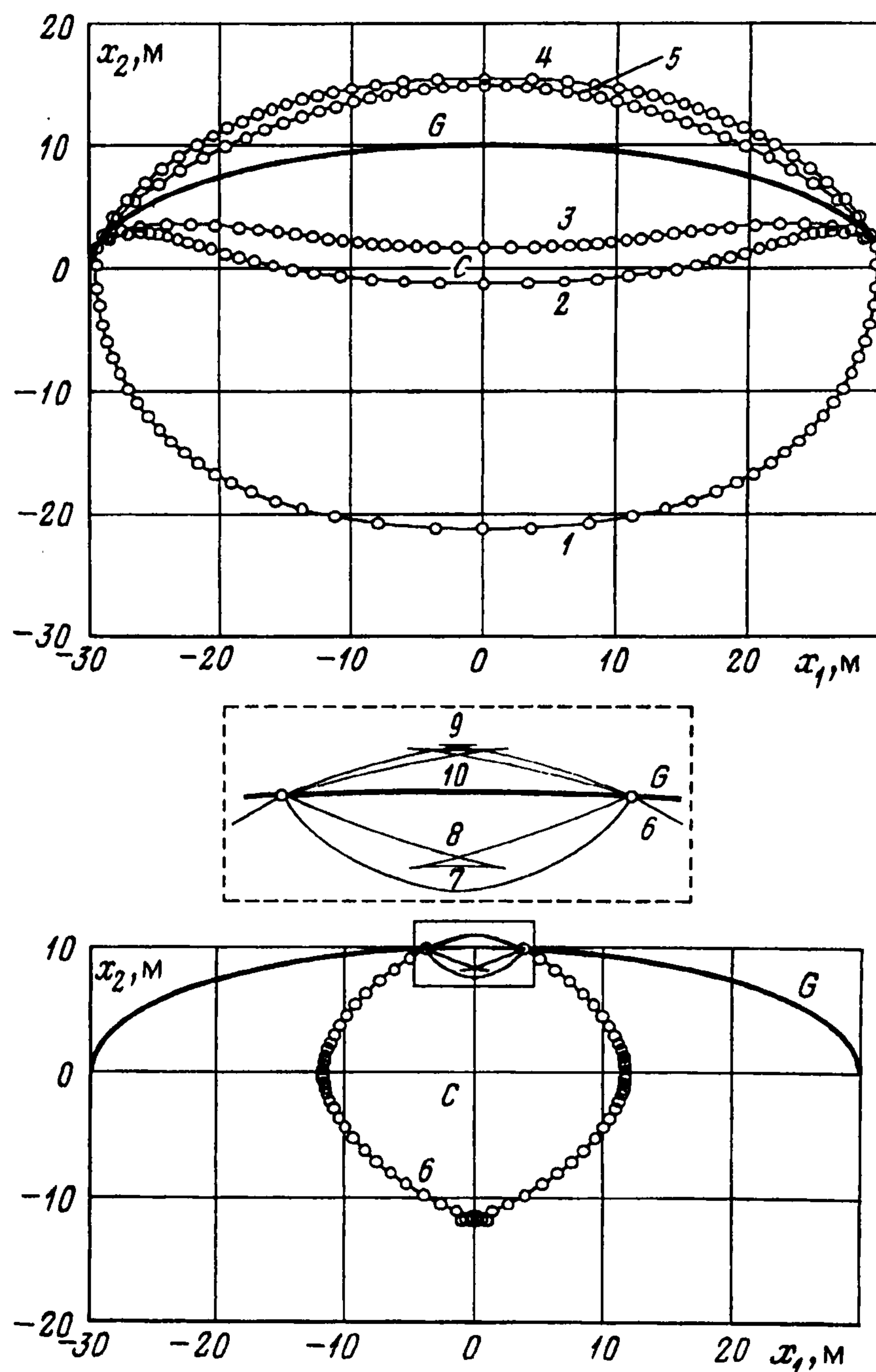
получим уравнение, из которого находим $\partial\nu/\partial\Theta$. Выполнив эти вычисления в окрестности $\Theta = \Theta^{(n)}$, $\nu = \nu(\Theta^{(n)})$, находим $\partial\nu/\partial\Theta^{(n)}$. Аналогично находится $\partial\nu_v(\Theta_v^{(n)})/\partial\Theta_v$.

Реализация вычислений по схеме (2.3) возможна при наличии некоторого начального состояния $\Theta^{(0)}$, $\nu(\Theta^{(0)})$, $\Theta_v^{(0)}$, $\nu_v(\Theta_v^{(0)})$, $\gamma^{(0)}$. Для данного случая в соответствии с (2.1) удобно выбрать $\Theta^{(0)} = 0$, $\nu(0)$, $\Theta_v^{(0)} = 0$, $\nu_v(0)$, $\gamma^{(0)} = 0$. Формула (2.3) позволяет находить единственное приращение $\Delta\Theta_v$ для значения угла падения Θ , при котором знаменатель в правой части (2.3) отличен от нуля. Поэтому равенство

$$\sin(\Theta^{(n)} - \gamma^{(n)})\partial\nu_v(\Theta_v^{(n)})/\partial\Theta_v - \cos(\Theta_v^{(n)} + \gamma^{(n)})\nu(\Theta^{(n)}) = 0 \quad (2.4)$$

представляет собой условие бифуркации решения. Для продолжения решения через это состояние следует в (2.3) добавить члены второго (а в случае необходимости третьего, и т.д.) порядка [12].

Условие (2.4) возможной неединственности решений системы (2.1) соответствует эффекту схождения (касания) и пересечения отраженных и преломленных лучей после взаимодействия падающих лучей с границей раздела G , а множество таких критических ситуаций связано с образованием огибающей семейства лучей – каустики. В данном случае каустиками могут вызываться формирования геометрических особенностей на поверхностях отраженных и преломленных волновых фронтов в



Фиг. 2

результате взаимодействия регулярного падающего волнового фронта даже с плоской границей G .

Поскольку особенности волнового фронта порождаются на каустиках, то на каустиках происходит и его фокусировка, сопровождаемая обращением в нуль функционального определителя J в (1.8) и неограниченным возрастанием интенсивности поля в местах геометрических особенностей. На каустиках также фаза волны изменяется на противоположную [1].

Наиболее общие закономерности бифуркаций каустик и волновых фронтов методами теории особенностей дифференцируемых отображений изучены ранее [1]. Методика, предложенная в данной работе, позволяет реализовать их компьютерное моделирование для анизотропных упругих сред.

3. Результаты исследований. С помощью описанного подхода решена задача о взаимодействии с эллипсоидальной границей раздела G двух трансверсально-изотропных упругих сред фронтов квазипродольной и квазипоперечной ударных волн, порожденных в среде 1 сферическим источником малого радиуса, находящимся в геометрическом центре разделяющей эллипсоидальной поверхности вращения, ось которой совпадает с осью Ox_2 симметрии параметров упругости сред.

Поскольку упругие свойства трансверсально-изотропных сред характеризуются всего лишь пятью неприводимыми параметрами, представим компоненты $C_{ik,pq}$ их

тензоров упругих постоянных в виде квадратной матрицы [2]

$$\|C_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} L & O \\ O & M \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda - l & \lambda \\ \lambda - l & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l \\ \lambda & \lambda - l & \lambda + 2\mu \end{pmatrix},$$

$$M = \text{diag}(\mu - m, \mu, \mu - m) \quad (3.1)$$

соответствие элементов которой с компонентами тензора $c_{ik,pq}$ устанавливаются по схеме

$$(11) \leftrightarrow 1, \quad (22) \leftrightarrow 2, \quad (33) \leftrightarrow 3, \quad (23) = (32) \leftrightarrow 4,$$

$$(31) = (13) \leftrightarrow 5, \quad (12) = (21) \leftrightarrow 6 \quad (3.2)$$

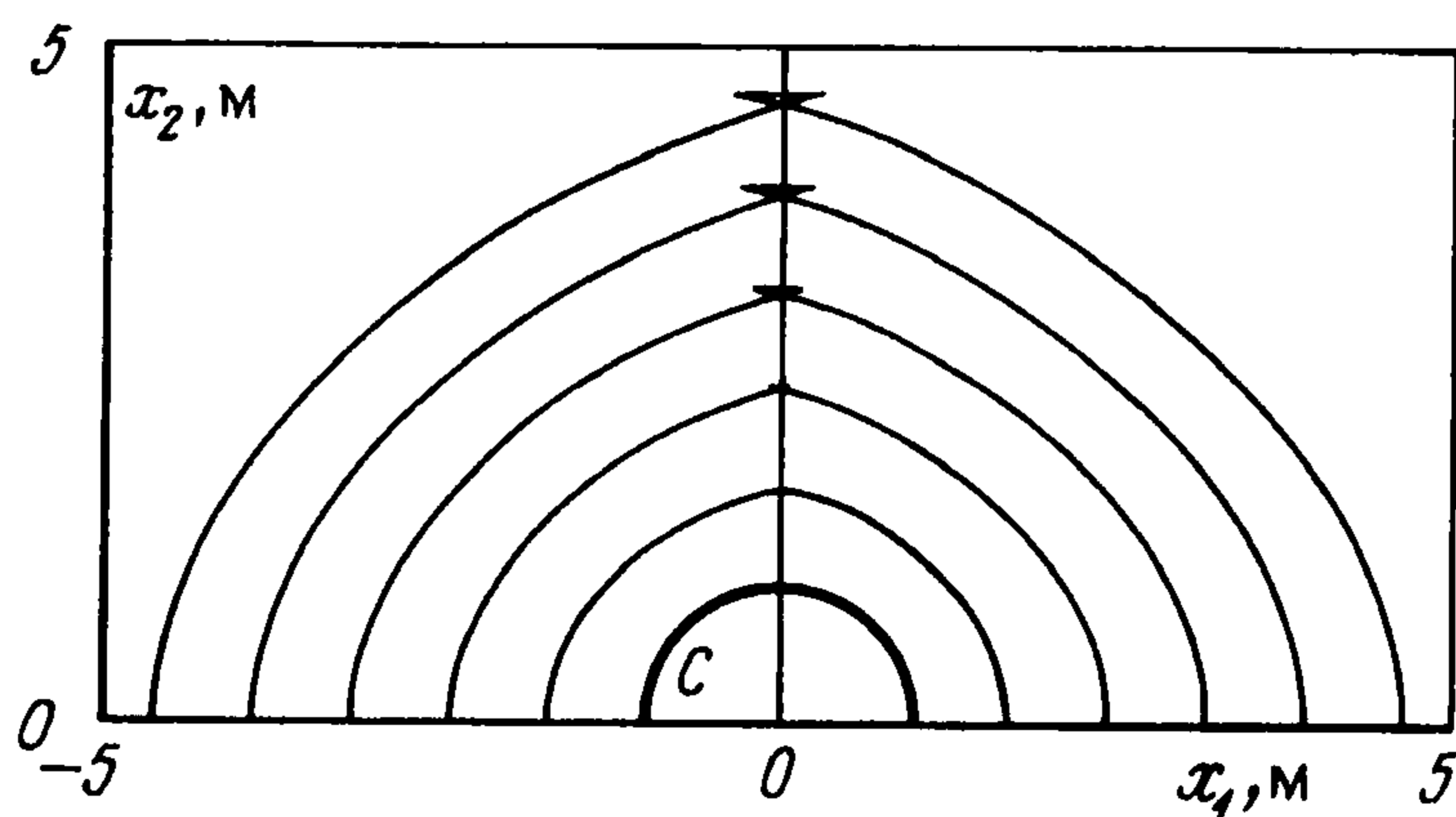
Таким образом, три параметра l, m, p в (3.1), (3.2) характеризуют отличие рассматриваемых сред от изотропной среды с параметрами Ламе λ и μ .

Пусть к сферической полости S среды 1 мгновенно приложено нормальное давление, инициирующее не только квазипродольную (qP), как это бывает в изотропных средах, но и квазипоперечную (qS) ударные волны, поверхности фронтов которых обладают осевой симметрией [2]. Благодаря ей интенсивность квазипоперечной волны, поляризованной ортогонально двум первым, равна нулю. Поэтому и после взаимодействия с поверхностью раздела G будут формироваться только по два вида осесимметричных отраженных и преломленных волн, поляризованных в плоскости осевого сечения.

Будем помечать индексами 1 и 2 параметры волн, распространяющихся в первой и второй средах соответственно; параметры волн до и после взаимодействия с поверхностью G будем идентифицировать знаками минус и плюс.

Значения механических констант, присущих соответствующим изотропным телам, выбирались на основе свойств доломита (для среды 1) и песчаника (для среды 2): $\lambda_1 = 4,972 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 3,906 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_1 = 2,650 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_2 = 3,409 \cdot 10^9$ Па, $\mu_2 = 1,364 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_2 = 2,760 \cdot 10^3$ кг/м³. Величины l, m, p , нарушающие свойства изотропии, варьировались, и расчеты проводились для различных комбинаций их значений. На фиг. 2, а, б приведены результаты для значений $l_i = 0,1\lambda_i$, $m_i = 0,3\mu_i$, $p_i = 0,5(\lambda_i + 2\mu_i)$ ($i = 1, 2$).

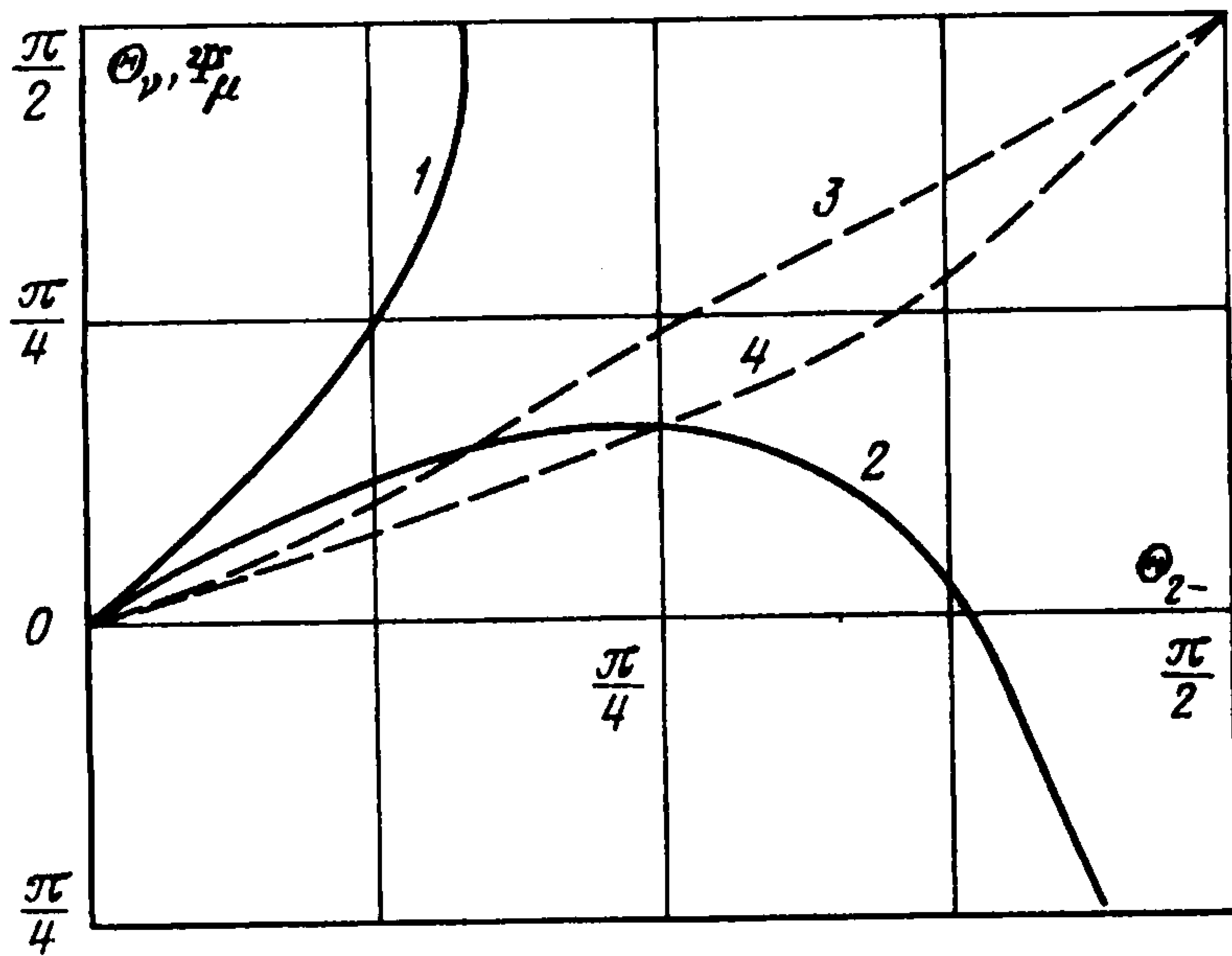
Фиг. 2, а иллюстрирует формы осевых сечений фронтов падающей qP_{1-} (1), отраженных qP_{1+} (2), qS_{1+} (3) и преломленных qP_{2+} (4), qS_{2+} (5) ударных волн, вызванных исходящей из точечного источника qP_{1-} -волной, когда угол между нормалью к падающему фронту и осью Ox_2 составил $\Theta_-^{(1)} = 85^\circ$. Светлыми точками на них обозначены пересечения линии фронта с лучами, соответствующими падающим лучам с разностью углов падения между нормалью n в источнике C $\Delta\Theta_0 = 4^\circ$. В местах их сгущения расхождение лучей уменьшается, в этих зонах поверхности фронта интенсивность напряжений оказывается повышенной. Для рассмотренного случая



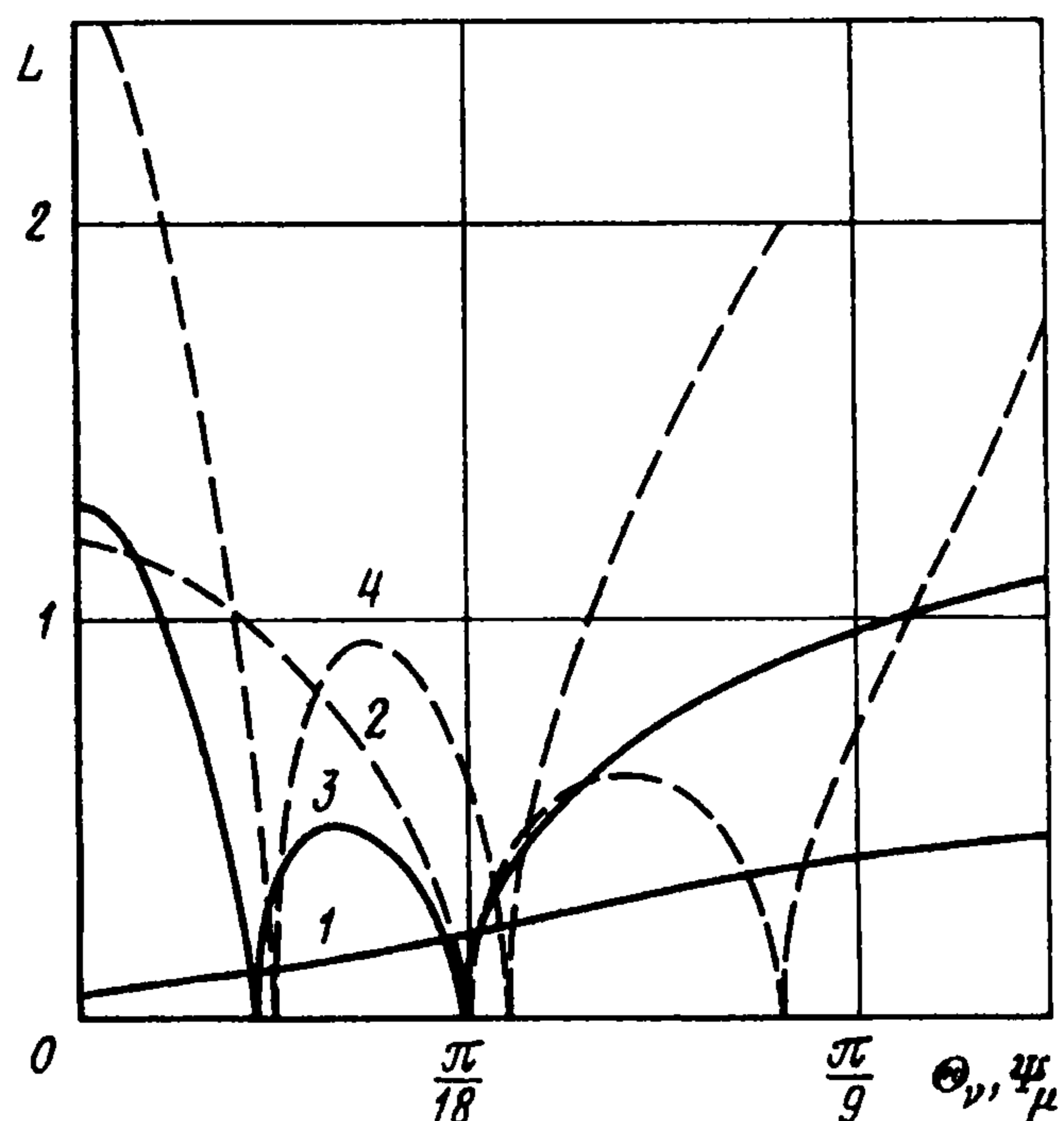
Фиг. 3

свойственно отсутствие особенностей на всех типах исходного и сформировавшихся фронтов.

Характер взаимодействия квазипоперечной qS_{1-} -волны с поверхностью раздела G отражен на фиг. 2, б. Следует отметить, что сечение ее фронта еще до падения на границу G (кривая б) имеет симметрично расположенные особенности типа ласточкина хвоста, которые сохраняются и на сфор-



Фиг. 4



Фиг. 5

мировавшихся фронтах qP_{1+-} , qS_{1+-} , qP_{2+-} , qS_{2+-} -волн (соответственно кривые 7–10).

На фиг. 3 показана последовательность фронтов qS_{1-} -волны по мере ее отхода от сферической поверхности источника C (вследствие симметрии показана лишь область $x_2 \geq 0$). Вначале поверхность имеет гладкое очертание, затем на ней появляются точки возврата. Кривые, вычерчиваемые этими точками при трансформировании фронта, являются каустиками. На них (в рамках теории идеальной упругости) интенсивность поля неограниченно возрастает, а при переходе через них фаза qS_{1-} -волны меняется на противоположную [1].

В результате взаимодействия исходных qP_{1-} и qS_{1-} -волн с поверхностью G сформировались отраженные (qP_{1+-} , qS_{1+-}) и преломленные (qP_{2+-} , qS_{2+-}) волны (фиг. 2, а, кривые 2–5; фиг. 2, б, кривые 7–10). Направления их лучей были определены с помощью алгоритма (2.3). Решение уравнений (2.1) для случая падения qS_{1-} -волны представлены на фиг. 4 в виде зависимостей $\Theta_{v+}(\Theta_{2-})$ (сплошные линии) и $\Psi_{\mu+}(\Theta_{2-})$ (штриховые линии), причем кривые 1, 2 соответствуют $v = 1, 2$, кривые 3, 4 – $\mu = 1, 2$. Анализ этих кривых позволяет заключить, что для квазипродольной отраженной волны qP_{1+} (кривая 1) значение угла падения $\Theta_{2-} = 29,7^\circ$ является предельным, после которого волна перестает быть ударной, и лучевая теория оказывается неприменимой. В малой полукрестности $\Theta_{2-} \leq 29,7^\circ$ происходит сгущение лучей фронта ударной волны qP_{1+} .

Вид кривой 2 свидетельствует о том, что даже для одноименных qS_{1-} и qS_{1+-} -волн угол падения не равен углу отражения (как это бывает в случае изотропных упругих сред [13]). В точке минимума этой кривой одному значению угла отражения qS_{1+-} -волны соответствуют два значения угла падения qS_{1-} -волны. Следовательно, эта точка является точкой возврата для фронта qS_{1+-} -волны. В ней удовлетворяется условие (2.5) и происходит бифуркационное формирование каустики.

Фиг. 5 иллюстрирует зависимость геометрических расхождений пучков лучей [2]

$$L(\Theta) = \sqrt{|J(\Theta)| / \xi(\Theta)} \quad (3.3)$$

от угла $\Theta_v(\Psi_\mu)$ между нормалью к соответствующей поверхности фронта и осью Ox_2 для волн qP_{1+} , qS_{1+} , qP_{2+} , qS_{2+} (кривые 1–4 соответственно). Поскольку определяемая зависимостью (3.3) величина $\sqrt{J}$ входит в знаменатель равенства (1.8), значения углов

Θ_v , Ψ , при которых кривые 1–4 опираются на ось абсцисс, являются особыми. Они соответствуют образованию сингулярностей на поверхностях соответствующих фронтов. Способ вычисления геометрического расхождения, основанный на лучевом методе, приводит к достаточно точным результатам в областях поля лучей, удаленных от особых точек и каустик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
3. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. Киев: Наук. думка, 1988. 219 с.
4. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гуссейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982. Ч. 1. 304 с.
5. Арнольд В.И. Критические точки функций и классификация каустик // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. Вып. 3. С. 243–244.
6. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and its Applications. London, etc.: Pitman, 1978. = Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
7. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
8. Подгорный А.Н., Гузь И.С., Дружинин А.Г. Волновой фронт, возбуждаемый нестационарным источником в однородной анизотропной среде // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 12. С. 28–34.
9. Бабич В.М. О сходимости рядов лучевого метода вычисления интенсивности волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. № 5. С. 25–35.
10. Россихин Ю.А. Удар жесткого шара по упругому полупространству // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 5. С. 15–21.
11. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (Обзор) // Прикл. механика. 1996. Т. 32. № 12. С. 3–27.
12. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных механических систем. Львов: Выща шк., 1982. 254 с.
13. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Взаимодействие фронтов ударных волн с плоскостью раздела transversально-изотропных упругих сред // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 4. С. 30–36.