

УДК 539.3: 534.1;518.12

© 2000 г. А.В. Белокоп, В.А. Еремеев, А.В. Наседкин,
А.Н. Соловьев

БЛОЧНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АКУСТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Для динамических задач акустоэлектроупругости предлагается ряд схем, использующих блочные формы матриц метода конечных элементов (МКЭ). Отмечаются специфические для электроупругости особенности решения обобщенных задач на собственные значения для больших разреженных матриц, а также реализации метода разложения по собственным формам в гармонических и нестационарных задачах. Предлагается и обсуждается явно-неявная схема интегрирования по времени уравнений МКЭ нестационарной акустоэлектроупругости. Указаны подходы для расчета пьезоэлектрических устройств при малых частотах модуляции. Программы пакета ARPACK для решения задач на собственные значения интегрированы в специализированный конечно-элементный комплекс ACELAN, для которого реализованы соответствующие блочные алгоритмы. Проведены численные эксперименты по определению первых собственных частот и форм колебаний осесимметричного составного пьезоизлучателя в ACELAN и в известном конечно-элементном пакете ANSYS. Метод разложения по собственным формам иллюстрируется расчетом пьезотрансформатора продольно-продольного типа.

Для динамических задач акустоэлектроупругости характерна связанность физико-механических полей различной природы. При расчетах пьезоэлектрических устройств из-за наличия пьезоэффекта обязателен учет связанности механических и электрических полей. В случаях взаимодействия пьезоэлектриков с акустической средой или существенных изменений температур требуется также и учет акустических или температурных полей. В общем случае при частичной (по пространственным координатам) конечно-элементной аппроксимации линейных задач акустотермоэлектроупругости, объединяя известные результаты [1,2], можно получить векторные уравнения вида

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (0.1)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{M}_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 & \mathbf{R}_{u\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{C}_{\psi\psi} & 0 \\ \mathbf{K}_{u\theta}^T & -\mathbf{K}_{\phi\theta}^T & 0 & \mathbf{C}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (0.2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} & 0 & -\mathbf{K}_{u\theta} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & -\mathbf{K}_{\phi\phi} & 0 & \mathbf{K}_{\phi\theta} \\ 0 & 0 & -\mathbf{K}_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\phi \\ 0 \\ \mathbf{F}_\theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \\ \Psi \\ \mathbf{T} \end{Bmatrix} \quad (0.3)$$

и для нестационарных задач к (0.1) следует добавить начальные условия.

Здесь неизвестный вектор узловых степеней свободы $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ может содержать узловые механические перемещения $\mathbf{U}$, электрические потенциалы Φ , потенциалы скоростей акустической среды Ψ и приращения температур $\mathbf{T}$. Блоки матриц $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ и вектора $\mathbf{F}$ формируются при учете взаимодействия полей, которые указаны в нижних индексах. Обозначения в нижних индексах соответствуют следующим полевым функциям: u – поле механических перемещений, ϕ – поле электрического потенциала, ψ – потенциал поля скоростей акустической среды, θ – приращение температур или просто температура.

Для задач о гармонических колебаниях с частотой f

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \exp(j\omega t), \quad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \exp(j\omega t), \quad \omega = 2\pi f \quad (0.4)$$

из (0.1), опуская множитель $\exp(j\omega t)$ и тильду для амплитудных значений $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$, имеем

$$-\omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} + j\omega \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (0.5)$$

В (0.1)–(0.5) структура уравнений МКЭ задач акустотермоэлектроупругости представлена в общем виде. Реально форматы хранения матриц и векторов МКЭ зависят от алгоритмов решения задач (0.1) или (0.5) и стратегий формирования конечно-элементных объектов и работы с ними.

Отметим также следующие обстоятельства:

- 1) в матрицах из (0.2), (0.3) имеется значительное число нулевых блоков;
- 2) степени свободы электрического потенциала Φ – безмассовые;
- 3) матрицы $\mathbf{R}_{u\psi}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_{u\psi}$ из (0.2) – сильно разреженные, они описывают взаимодействие твердотельной структуры и акустической среды только по их общей границе;
- 4) связанность поля температур такова, что в большинстве задач, требующих учета температуры, можно пренебречь блоками $\mathbf{K}_{u\theta}^T$ и $\mathbf{K}_{\phi\theta}^T$ в матрице $\mathbf{C}$ из (0.2).

В результате для различных задач оказываются удобными и различные формы представления конечно-элементных объектов в (0.1)–(0.5):

- 1) полностью "перемешанная" форма, когда в векторе $\mathbf{a}$ последовательно для каждого узла записываются компоненты различных степеней свободы;
- 2) блочная форма, когда $\mathbf{U}$, Φ , Ψ , $\mathbf{T}$ и соответствующие блоки матриц из (0.2), (0.3) формируются отдельно;
- 3) частично "перемешанная" форма, когда в векторе $\mathbf{a}$ отдельно выделены подвекторы лишь для некоторых типов полей.

Ниже анализируются два последних случая, в которых удобна работа с блочными матрицами или с выделением отдельных блоков.

1. Определение собственных частот пьезоэлектрических устройств. Важнейшими характеристиками пьезоэлектрических устройств являются их частоты электрических резонансов $f_{ri} = \omega_{ri}/(2\pi)$ и антирезонансов $f_{ai} = \omega_{ai}/(2\pi)$. Частоты электрических резонансов и антирезонансов являются собственными частотами пьезоэлектрических устройств и вычисляются без учета влияния демпфирования, температурных факторов и взаимодействия с акустическими средами. Таким образом, эти частоты могут быть определены по МКЭ из решения получающейся из (0.5) обобщенной задачи на собственные значения вида

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

При этом для электрических резонансов и антирезонансов матрицы $\mathbf{K}_{u\phi}$ и $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ в (1.2) различаются. Математически это отличие состоит в следующем. Если для частот

электрических резонансов матрицу $\mathbf{K}$ и вектор Φ представить в блочной форме

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi}^c & \mathbf{K}_{u\phi}^s \\ \mathbf{K}_{u\phi}^{cT} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{cc} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{cs} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^{sT} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{csT} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{ss} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_c \\ \Phi_s \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

то для частот электрических резонансов матрица $\mathbf{K}$ и вектор Φ будут иметь вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi}^c \\ \mathbf{K}_{u\phi}^{cT} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{cc} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \Phi_c \quad (1.4)$$

Здесь в векторе Φ в (1.3) выделены отдельно степени свободы Φ_s , для которых при нахождении частот электрических антирезонансов считается, что электрические заряды в соответствующих узлах равны нулю, а при нахождении частот электрических резонансов — $\Phi_s = 0$.

Таким образом, для определения частот электрических резонансов и антирезонансов требуется решать два раза задачи (1.1), (1.2) с матрицами $\mathbf{K}$ в формах (1.3) и (1.4).

Математическое исследование континуальных форм спектральных задач (1.1)–(1.3) и (1.1), (1.2), (1.4) было проведено ранее [3]. Полученные результаты естественно переносятся и на дискретизированные по МКЭ задачи. Так, имеют место следующие свойства.

Матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ симметричны; $\mathbf{M}_{uu} > 0$; $\mathbf{K} \geq 0$; $\mathbf{K}_{uu} \geq 0$; $\mathbf{K}_{\phi\phi} > 0$; $\mathbf{K}_{\phi\phi}^{cc} > 0$; $\mathbf{K}_{\phi\phi}^{ss} > 0$, причем здесь и далее неравенства $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ для матриц означают, что матрица $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ соответственно положительно определена или полуопределена. При этом предполагается, что на поле электрического потенциала ϕ наложена хотя бы одна связь, исключающая его неопределенность с точностью до произвольной постоянной.

Задачи (1.1)–(1.3) или (1.1), (1.2), (1.4) можно представить в форме

$$\bar{\mathbf{K}}_{uu} \cdot \mathbf{U} = \lambda \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{U}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (1.5)$$

где

$$\bar{\mathbf{K}}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\phi} \cdot \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\phi}^T, \quad \Phi = \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\phi}^T \cdot \mathbf{U} \quad (1.6)$$

Для матриц $\bar{\mathbf{K}}_{uu}$ задач о нахождении частот электрических антирезонансов ($\bar{\mathbf{K}}_{uu}^a$) и резонансов ($\bar{\mathbf{K}}_{uu}^r$) выполняются неравенства: $\bar{\mathbf{K}}_{uu}^a \geq \bar{\mathbf{K}}_{uu}^r \geq 0$, где $\bar{\mathbf{K}}_{uu}^a$ и $\bar{\mathbf{K}}_{uu}^r$ получаются из (1.6), (1.3) и (1.6), (1.4) соответственно.

Собственные значения $\lambda_{rk} = \omega_{rk}^2$ и $\lambda_{ak} = \omega_{ak}^2$ ($k = 1, 2, \dots, n$; n — порядок матриц $\mathbf{M}_{uu}$ и $\mathbf{K}_{uu}$) вещественны и неотрицательны. Соответствующие им собственные векторы, которые будем обозначать через $\mathbf{W}_{rk}$ и $\mathbf{W}_{ak}$, образуют базисы в R^n , причем эти векторы можно выбрать ортонормированными относительно матрицы масс $\mathbf{M}_{uu}$

$$\langle \mathbf{W}_{\gamma k}, \mathbf{W}_{\gamma m} \rangle = \mathbf{W}_{\gamma k}^T \cdot \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{W}_{\gamma m} = \delta_{km} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{W}_{\gamma k}^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_{uu}^{\gamma} \cdot \mathbf{W}_{\gamma m} = \omega_{\gamma m}^2 \delta_{km}, \quad \gamma = r, a \quad (1.8)$$

Если частоты электрических резонансов ω_{rk} и антирезонансов ω_{ak} занумеровать в порядке возрастания, то имеют место неравенства

$$\omega_{rk}^2 \leq \omega_{ak}^2; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Итак, связанные спектральные задачи (1.1), (1.2) относительно троек неизвестных $\{\omega, \mathbf{U}, \Phi\}$ фактически являются обобщенными задачами на собственные значения

(1.5), (1.6) относительно пар $\{\omega, U\}$. Переход от (1.1), (1.2) к задаче (1.5), (1.6) можно трактовать как процедуру статической конденсации путем исключения степеней свободы Φ . Если при практической реализации этой процедуры формировать матрицу $\bar{K}_{uu}$ явно, то свойства разреженности матриц МКЭ будут потеряны. При такой стратегии для решения обобщенных задач на собственные значения можно применять методы, трансформирующие матрицу $\bar{K}_{uu}$. Именно такой подход для определения собственных частот пьезоэлектрических устройств предлагается в известном конечно-элементном пакете ANSYS [4], где реализован метод HBI (Hauseholder – Bisection – Inverse iteration).

Переход от разреженных матриц к заполненным вряд ли можно признать удачным решением. Более привлекательными представляются алгоритмы, использующие блочные формы матриц и сохраняющие структуры разреженности.

Покажем, что для решения спектральных задач (1.5), (1.6) могут быть эффективно применены современные методы решения обобщенных задач на собственные значения для больших разреженных матриц. Для конкретных задач эти методы требуют от пользователя реализации процедур умножения матрицы на вектор, сложения матриц и решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В зависимости от используемого метода, а также поставленных задач поиска групп собственных значений с теми или иными свойствами экстремальности, спектральная задача (1.5) модифицируется к одному из следующих основных видов

$$A) A_M \cdot U = \mu U, A_M = M_{uu}^{-1} \cdot A_\sigma \quad (1.9)$$

$$A_s) A_s \cdot y = \mu y, A_s = L_M^{-1} \cdot A_\sigma \cdot L_M^{-T} \quad (1.10)$$

$$B) A_M^{-1} \cdot U = \nu U, A_M^{-1} = A_\sigma^{-1} \cdot M_{uu} \quad (1.11)$$

$$B_s) A_s^{-1} \cdot y = \nu y, A_s^{-1} = L_M^T \cdot A_\sigma^{-1} \cdot L_M \quad (1.12)$$

где

$$y = L_M^T \cdot U, M_{uu} = L_M \cdot L_M^T, A_\sigma = \bar{K}_{uu} - \sigma M_{uu} \quad (1.13)$$

L_M – множитель Холецкого матрицы M_{uu} , σ – величина сдвига, $\mu = \lambda - \sigma$, $\nu = (\lambda - \sigma)^{-1}$.

Матрицы A_s и A_s^{-1} задач A_s и B_s симметричны, а методы решения этих задач поддерживают обычную ортогональность вычисляемых собственных векторов y . Тогда получающиеся из (1.13) собственные векторы $U = W_{\gamma k}$ оказываются ортогональными в смысле скалярного произведения из (1.7), т.е. ортогональными по матрице масс.

Матрицы A_M и A_M^{-1} задач A и B можно рассматривать как симметричные операторы в пространстве R^n со скалярным произведением из (1.7)

$$\langle A_M^{(-1)} \cdot a, b \rangle = \langle a, A_M^{(-1)} \cdot b \rangle, \forall a, b \in R^n$$

Поэтому для задач A и B обычно поддерживается ортогональность векторов U в смысле скалярного произведения из (1.7).

Таким образом, задачи A и A_s или B и B_s и методы их решения фактически отличаются только используемым скалярным произведением. В связи с этим далее рассмотрим только задачи A и B .

Для решения задачи A итерационными методами для больших разреженных матриц необходима реализация процедур умножения матрицы A_M на итерируемый вектор U и умножения матрицы M_{uu} на вектор для вычисления скалярного произведения из (1.7).

Для этого на подготовительном этапе нужно сформировать матрицу

$$A_{\sigma uu} = K_{uu} - \sigma M_{uu} \quad (1.14)$$

и найти множители Холецкого матриц M_{uu} и $K_{\varphi\varphi}$ ($K_{\varphi\varphi} = L_{\varphi\varphi} \cdot L_{\varphi\varphi}^T$)

$$M_{uu} \rightarrow L_M, K_{\varphi\varphi} \rightarrow L_{\varphi\varphi} \quad (1.15)$$

Далее алгоритм вычисления $z = A_M \cdot U$ для блочных матриц, как следует из (1.9), (1.6), (1.14) и (1.15), можно реализовать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &:= K_{u\varphi}^T \cdot U \\ \text{Solve } L_{\varphi\varphi} \cdot x_2 &= x_1 \text{ for } x_2 \\ \text{Solve } L_{\varphi\varphi}^T \cdot x_1 &= x_2 \text{ for } x_1 \\ v_1 &:= K_{u\varphi} \cdot x_1 \\ v_2 &:= A_{\sigma uu} \cdot U \\ v_1 &:= v_1 + v_2 \\ \text{Solve } L_M \cdot v_2 &= v_1 \text{ for } v_2 \\ \text{Solve } L_M^T \cdot z &= v_2 \text{ for } z \end{aligned} \quad (1.16)$$

При решении задачи B необходима процедура вычисления вектора $z = A_M^{-1} \cdot U$ или $z = A_\sigma^{-1} \cdot v$; $v = M_{uu} \cdot U$ для итерируемых векторов U. Таким образом, здесь для определения вектора z требуется решать СЛАУ

$$G_\sigma = K - \sigma M = \begin{bmatrix} A_{\sigma uu} & K_{u\varphi} \\ K_{u\varphi}^T & -K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, G_\sigma \cdot \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

относительно вектора $[z, x]^T$, или СЛАУ

$$A_\sigma \cdot z = v \quad (1.18)$$

относительно вектора z.

Решение СЛАУ (1.17) может быть осуществлено с помощью LDL^T -факторизации матрицы G_σ с последующим выделением вектора z из вектора решений. Этот способ не требует формирования блоков матрицы K. Альтернативный подход состоит в использовании итерационных методов решения СЛАУ (1.17) или (1.18), для которых требуются реализации умножений G_σ или A_σ на векторы. Такая операция при блочном подходе для СЛАУ (1.18) осуществима первыми шестью шагами алгоритма (1.16).

2. Методы разложения по модам для динамического анализа пьезоэлектрических устройств. Классический метод разложения по собственным формам или модам для решения линейных задач об установившихся колебаниях и нестационарных задач применительно к расчету пьезоэлектрических устройств имеет особенность, обусловленную наличием несвязанной составляющей электрического потенциала φ [5].

Как и в разд. 1, будем исследовать пьезоэлектрические устройства без учета температурных факторов и акустических сред, но теперь включим в рассмотрение демпфирующие свойства. Аналогично приближенному способу описания механизма демпфирования по Релею, применяемому в структурном анализе, для пьезоэлектриков примем

$$C_{uu} = \alpha_d M_{uu} + \bar{\beta}_d \bar{K}_{uu} \quad (2.1)$$

где α_d , $\bar{\beta}_d$ – коэффициенты затухания. Отметим, что поскольку в C_{uu} входит матрица

$\bar{\mathbf{K}}_{uu}$, а не $\mathbf{K}_{uu}$, то формула (2.1) учитывает в совокупности как механические, так и пьезоэлектрические и диэлектрические потери.

Рассмотрим вначале задачи об установившихся колебаниях пьезоэлектрических устройств. В конечно-элементном уравнении (0.5) матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ и вектор $\mathbf{a}$ имеют вид (1.2), а

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{uv} \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{F}_\varphi + \mathbf{K}_{\varphi v} \cdot \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

причем в $\mathbf{F}$ вектором $\mathbf{V}$ учтены неоднородные электрические главные граничные условия, а механические главные граничные условия предполагаются нулевыми.

Разрешив уравнение (0.5) относительно Φ , при учете (1.2), (2.2) будем иметь

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_{uu} + j\omega \mathbf{C}_{uu} + \bar{\mathbf{K}}_{uu}) \cdot \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}_u \quad (2.3)$$

$$\Phi = \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^T \cdot \mathbf{U} + \Phi_{st} \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_u = \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{uv} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi_{st}, \quad \Phi_{st} = -\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_\varphi + \mathbf{K}_{\varphi v} \cdot \mathbf{V}) \quad (2.5)$$

Вектор Φ_{st} из (2.5) и представляет собой несвязанную составляющую электрического потенциала, определяемую фактически из отдельной задачи квазиэлектростатики

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi_{st} = -\mathbf{F}_\varphi - \mathbf{K}_{\varphi v} \cdot \mathbf{V} \quad (2.6)$$

Будем разыскивать решение задачи (2.3) в виде разложения по собственным векторам (модам) $\mathbf{W}_{\gamma m}$ задачи (1.5), (1.6) с теми же однородными главными граничными условиями

$$\mathbf{U} = \sum_{m=1}^n Z_m \mathbf{W}_{\gamma m} \quad (2.7)$$

Здесь $\gamma = r$ или $\gamma = a$ в зависимости от соответствия однородных главных граничных условий задачи (2.3) – (2.5) и (1.5), (1.6), причем, обычно, $\gamma = r$.

Подставляя выражение (2.7) в (2.3) и умножая полученное равенство скалярно на $\mathbf{W}_{\gamma k}^T$, при учете соотношений ортогональности (1.7), (1.8) и представления (2.1) находим

$$Z_k = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2j\xi_k \omega \omega_k} P_k \quad (2.8)$$

где

$$P_k = \mathbf{W}_{\gamma k}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_u, \quad \xi_k = \alpha_d \frac{1}{2\omega_k} + \bar{\beta}_d \frac{\omega_k}{2} \quad (2.9)$$

Формулами (2.7) – (2.9), (2.4) и определяются решения задач об установившихся колебаниях пьезоэлектрических устройств методом разложения по модам колебаний.

Решения нестационарных задач (0.1), (1.2), (2.2), (2.1) методом разложения по модам находятся аналогичным способом, только теперь коэффициенты Z_m в (2.7) являются функциями времени, как и компоненты вектора правых частей $\mathbf{F}$. Итоговые выражения для коэффициентов Z_k имеют такой же вид, как и в структурном анализе [6].

Преимущества и недостатки метода разложения по модам хорошо известны из практики решения задач структурного анализа. Так, к важному достоинству метода следует отнести возможность прямого определения коэффициентов затухания ξ_k от-

дельных мод, без учета формулы из (2.9). Эти коэффициенты можно задать, исходя из экспериментально измеряемых величин механической добротности Q_k моды с номером k : $\xi_k = 1/(2Q_k)$.

Наличие несвязанного потенциала Φ_{st} и матриц $K_{u\varphi}$, $K_{\varphi\varphi}^{-1}$ в (2.4), (2.5) определяет необходимость использования блочных форм матрицы K , даже если при нахождении собственных значений и мод этот подход и не применялся. Отметим, что, задавая предварительно векторы внешних воздействий F_u , F_φ и V и допуская в дальнейшем только их пропорциональное изменение, можно вычислить величины P_k в (2.9) еще на этапе решения задачи на собственные значения.

3. Явно- неявные схемы интегрирования по времени уравнений акустоэлектроупругости для нестационарных процессов. Рассмотрим нестационарные задачи акустоэлектроупругости без температурных воздействий. Выражая, как в разд. 2, электрический потенциал Φ через U , преобразуем систему (0.1) – (0.3) без температурных полей T и диссипативных свойств акустической среды ($\tilde{R}_{u\psi} = 0$ [2]) к виду

$$M \cdot \ddot{a} + C \cdot \dot{a} + K \cdot a = F \quad (3.1)$$

$$\Phi = K_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot K_{u\varphi}^T \cdot U + \Phi_{st}, \quad \Phi_{st} = -K_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot (F_\varphi + K_{\varphi v} \cdot V) \quad (3.2)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & M_{\psi\psi} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{uu} & R_{u\psi} \\ -R_{u\psi}^T & C_{\psi\psi} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \bar{K}_{uu} & 0 \\ 0 & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$F = [F_u - K_{uv} \cdot V - K_{u\varphi} \cdot \Phi, 0]^T, \quad a = [U, \Psi]^T \quad (3.4)$$

и в системе (3.1), (3.2) могут быть учтены и неоднородные механические главные граничные условия.

Для интегрирования по времени задачи (3.1) – (3.4) удобно семейство схем Вильсона и Ньюмарка, представленное в единой форме [7]. Частным случаем схем из [7] является обычный метод центральных разностей, который и будем далее рассматривать.

На временной сетке $t_i = \tau i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$; $\tau = \Delta t$ – шаг по времени) аппроксимируем производные по времени центральными разностями

$$\ddot{a}_i = \frac{1}{\tau^2} (a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}), \quad \dot{a}_i = \frac{1}{2\tau} (a_{i+1} - a_{i-1}) \quad (3.5)$$

где $a_i = a(t_i)$.

Подставляя (3.5) в систему (3.1), (3.2), записанную для момента времени t_i , получаем шаговую схему вида

$$M^{eff} \cdot a_{i+1} = F^{eff} (F_{ui}, V_i, \Phi_i, a_i, a_{i-1}), \quad M^{eff} = \frac{1}{\tau^2} M + \frac{1}{2\tau} C \quad (3.6)$$

$$F^{eff} = F_i + \left(\frac{2}{\tau^2} M - K \right) \cdot a_i - \left(\frac{1}{\tau^2} M - \frac{1}{2\tau} C \right) \cdot a_{i-1} \quad (3.7)$$

После определения $a_{i+1} = [U_{i+1}, \Psi_{i+1}]^T$ из (3.6), (3.7), (3.4) по значениям F_{ui} , V_i , Φ_i , a_i , a_{i-1} для перехода на следующий временной слой требуется еще определить Φ_{i+1} из (3.2), т.е. решить СЛАУ

$$K_{\varphi\varphi} \cdot \Phi_{i+1} = K_{u\varphi}^T \cdot U_{i+1} - F_{\varphi,i+1} - K_{\varphi v} \cdot V_{i+1} \quad (3.8)$$

Таким образом, даже если возможна диагонализация матрицы $\mathbf{M}^{eff}$, и схема в шаге (3.6) становится явной, на этапе нахождения Φ_{i+1} требуется решение СЛАУ (3.8). Схема (3.6)–(3.8) близка к описанной ранее [8], и по отмеченным причинам была названа явно-неявной схемой интегрирования. Естественно, схема (3.6)–(3.8) условно устойчива, как и обычный метод центральных разностей.

Обсудим отдельно проблемы, связанные с нахождением обратной матрицы $(\mathbf{M}^{eff})^{-1}$. Из (3.6), (3.3) имеем

$$\mathbf{M}^{eff} = \frac{1}{2\tau} \begin{vmatrix} \frac{2}{\tau} \mathbf{M}_{uu} + \mathbf{C}_{uu} & \mathbf{R}_{u\psi} \\ -\mathbf{R}_{u\psi}^T & \frac{2}{\tau} \mathbf{M}_{\psi\psi} + \mathbf{C}_{\psi\psi} \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Здесь $\mathbf{M}_{uu}$ и $\mathbf{M}_{\psi\psi}$ – матрицы "масс" твердотельной структуры и акустической среды соответственно, $\mathbf{C}_{\psi\psi}$ – матрица, получаемая в результате конечно-элементной аппроксимации импедансных условий на заданных внешних границах акустической среды, $\mathbf{R}_{u\psi}$ – матрица связи твердотельной структуры и акустической среды по их общей границе Γ_{hws} [2], причем с потенциалами скоростей акустической среды удобно связывать нормальные компоненты перемещений твердотельной структуры на Γ_{hws} в общих узлах. Если предположить, что матрица демпфирования $\mathbf{C}_{uu}$ пропорциональна матрице масс $\mathbf{M}_{uu}$ ($\mathbf{C}_{uu} = \alpha_d \mathbf{M}_{uu}$), то все элементные матрицы блоков матриц из (3.9) вычисляются как интегралы только от произведений функций формы. В то же время элементные матрицы блоков матрицы $\mathbf{K}$ вычисляются как интегралы от произведений производных функций формы. Следовательно, к элементным матрицам блоков из (3.9) применимы стандартные подходы, аналогичные методам диагонализации матрицы масс в структурном анализе.

Будем вычислять элементные матрицы для блоков матриц (3.9) методом узлового интегрирования [9]. Тогда матрицы $\mathbf{M}_{uu}$, $\mathbf{C}_{uu}$, $\mathbf{M}_{\psi\psi}$ и $\mathbf{C}_{\psi\psi}$ станут диагональными. В элементных матрицах $\mathbf{R}_{u\psi}$ при соответствующей нумерации степеней свободы ненулевые элементы будут находиться только на второй главной диагонали, противоположной обычной диагонали матрицы. В итоге после перенумерации степеней свободы матрицу $\mathbf{M}^{eff}$ можно будет представить в следующей блочно-диагональной форме:

$$\mathbf{M}^{eff} \rightarrow \mathbf{M}_d^{eff} = \begin{vmatrix} \mathbf{D}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_M \end{vmatrix}$$

где $\mathbf{D}_M$ – диагональная подматрица, собранная из вкладов степеней свободы, не взаимодействующих на границе Γ_{hws} , $\mathbf{B}_M$ – блочно-диагональная подматрица, каждый блок которой с номером j отвечает за взаимодействие твердотельной структуры и акустической среды в одном узле на Γ_{hws} и представляет собой (2×2) -матрицу

$$\mathbf{B}_{Mj} = \begin{vmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j \\ -b_{12}^j & b_{22}^j \end{vmatrix}$$

причем компонента b_{11}^j – вклад матрицы $\mathbf{M}_{uu}$, b_{22}^j – вклад матрицы $\mathbf{M}_{\psi\psi}$, а b_{12}^j – вклад матрицы $\mathbf{R}_{u\psi}$.

Обратная к $\mathbf{M}_d^{eff}$ матрица легко вычисляется в явной форме

$$(\mathbf{M}_d^{eff})^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{D}_M^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_M^{-1} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B}_{Mj}^{-1} = \frac{1}{b_{11}^j b_{22}^j + (b_{12}^j)^2} \begin{vmatrix} b_{22}^j & -b_{12}^j \\ b_{12}^j & b_{11}^j \end{vmatrix}$$

Таким образом, этапы (3.6), (3.7) шаговой схемы можно представить в явной форме

$$\mathbf{a}_{i+1} = (\mathbf{M}_d^{eff})^{-1} \cdot \left[\mathbf{F}_i + \left(\frac{2}{\tau^2} \mathbf{M}_d - \mathbf{K} \right) \cdot \mathbf{a}_i - \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{M}_d - \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_d \right) \cdot \mathbf{a}_{i-1} \right] \quad (3.10)$$

где матрицы $\mathbf{M}_d$ и $\mathbf{C}_d$ диагонализированы к блочному виду аналогично матрице $\mathbf{M}_d^{eff}$.

Заметим, что при блочной диагонализации матриц $\mathbf{M}^{eff}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{C}$ можно воспользоваться и методом выделения "главной диагонали" [10], считая, что для $\mathbf{R}_{u\psi}$ выделяется вторая главная диагональ.

В результате имеем явно- неявную схему интегрирования (3.10), (3.8) по методу центральных разностей, для которой требуются процедуры умножения матрицы на вектор и решения СЛАУ (3.8).

4. Пироэлектрические устройства при малых частотах модуляции температурных полей. Было отмечено [11], что работу пироэлектрических датчиков при малых частотах модуляции температурных полей можно моделировать следующей из (0.1)–(0.3) системой МКЭ (влияние акустической среды при этом не учитывается)

$$\mathbf{C}_{\theta\theta} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_{\theta} \quad (4.1)$$

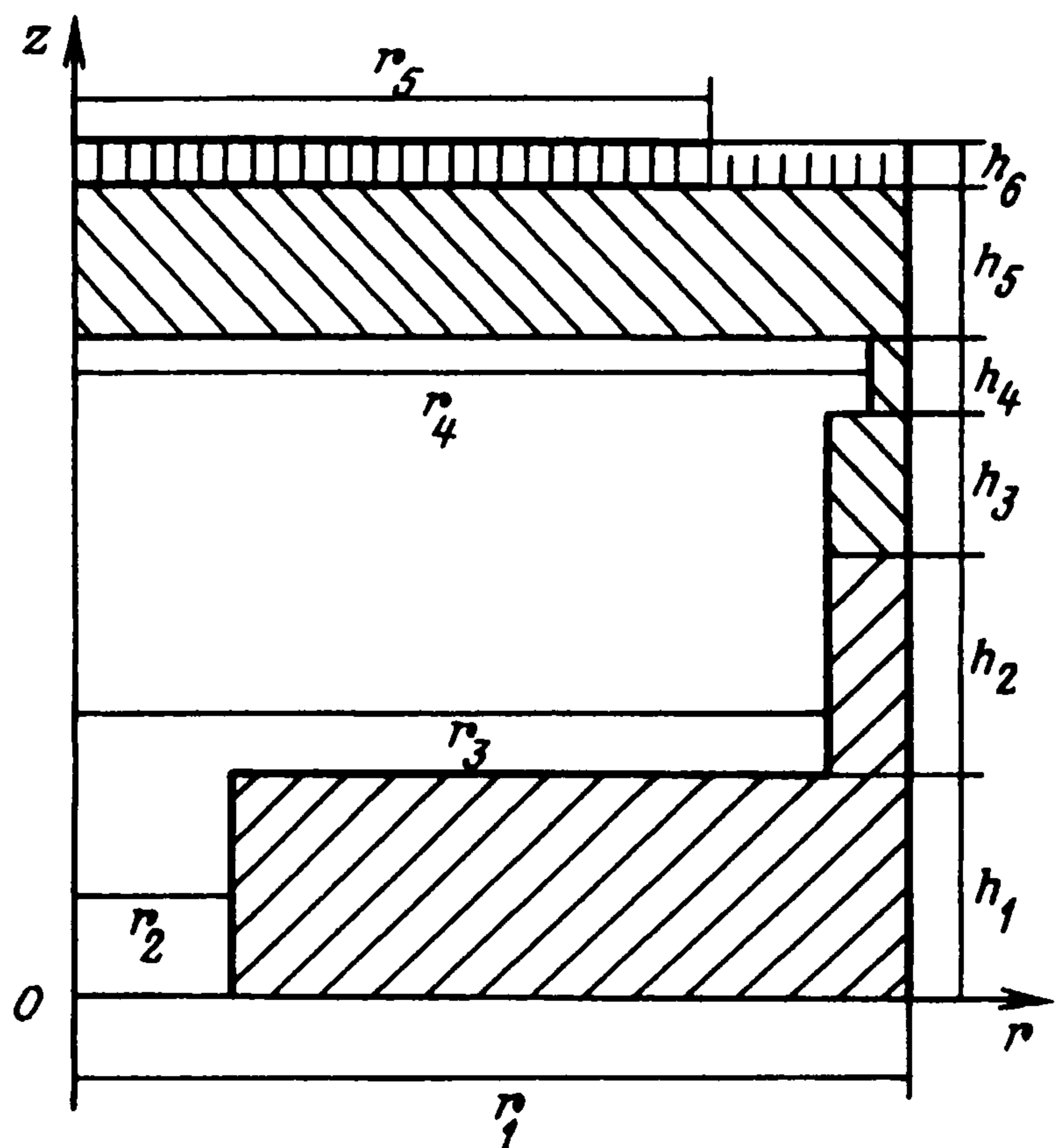
$$\mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\phi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u + \mathbf{K}_{u\theta} \cdot \mathbf{T} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^T \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_{\phi} - \mathbf{K}_{\phi\theta} \cdot \mathbf{T} \quad (4.3)$$

Задача (4.1)–(4.3) оказывается связанной относительно полей температуры и перемещений – электрических потенциалов лишь посредством векторов правых частей. Здесь удобно формирование отдельных блоков $\mathbf{C}_{\theta\theta}$, $\mathbf{K}_{\theta\theta}$, $\mathbf{K}_{u\theta}$ и $\mathbf{K}_{\phi\theta}$. Система (4.1)–(4.3) может быть решена стандартными методами, как для задач о гармонических режимах, так и для нестационарных задач.

5. Численные эксперименты. При решении обобщенной задачи на собственные значения (1.5) из разд. 1 применялся пакет ARPACK [12], использующий метод Арнольди. Были выбраны программы ARPACK для спектральной задачи в форме (1.9). Все процедуры ввода параметров исходной задачи, формирования конечно-элементной модели и вывода результатов проводились с помощью конечно-элементного программного комплекса ACELAN [13]. К пакету ACELAN были специально добавлены программы, реализующие шаги алгоритма (1.14)–(1.16) с блочными матрицами, хранящимися в разреженном строчном формате. Код, генерируемый пакетом ARPACK, был включен в библиотеку подпрограмм ACELAN.

В качестве примера рассмотрим составной пьезоэлектрический излучатель акустических волн осесимметричной формы, меридиональное сечение которого в цилиндрической системе координат Orz показано на фиг. 1. Механические колебания в устройстве генерирует пьезоэлемент радиуса r_1 и толщины h_6 , выполненный из пьезокерамики ЦТБС-3, поляризованной по толщине (на фиг. 1 показан вертикальной штриховкой). Торцевые поверхности пьезоэлемента $z = H_1 =$



Фиг. 1

$= h_1 + \dots + h_5$ и $z = H_2 = h_1 + \dots + h_6$ покрыты сплошными круговыми электродами с одинаковым радиусом r_5 . Пьезоэлемент жестко сцеплен со стальным полым цилиндром с верхней крышкой (показан штриховкой с наклоном влево), который в свою очередь жестко сцеплен с полым цилиндром из алюминия с нижним дном, имеющем круговое отверстие (показан штриховкой с наклоном вправо). Для увеличения податливости при изгибных колебаниях стальная часть устройства имеет выемку толщины h_4 размером $\delta = r_4 - r_2$.

Геометрические размеры, указанные на фиг. 1, следующие: $r_1 = 21$ мм, $r_2 = 4$ мм, $r_3 = 19$ мм, $r_4 = 20$ мм, $r_5 = 16$ мм, $h_1 = h_2 = 5,5$ мм, $h_3 = 3,5$ мм, $h_4 = 2$ мм, $h_5 = 3,5$ мм, $h_6 = 1,2$ мм. Материальные константы пьезокерамики ЦТБС-3 были взяты из [14], сталь характеризовалась плотностью $\rho_{st} = 7,86 \cdot 10^3$ кг/м³, модулем Юнга $E_{st} = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² и коэффициентом Пуассона $\nu_{st} = 0,29$, а алюминий – набором констант: $\rho_{al} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_{al} = 7,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_{al} = 0,33$.

Для данного устройства требуется определить первые изгибные частоты колебаний $f_{r(j)}$, возбуждаемые разностью потенциалов

$$\varphi|_{z=H_1} - \varphi|_{z=H_2} = V \exp(j2\pi f_{r(j)} t)$$

между электродами пьезоэлемента. Для этого строятся конечно-элементные модели и решаются задачи на собственные значения (1.1)–(1.3) для определения частот электрических резонансов f_{rk} и (1.1), (1.2), (1.4) для частот электрических антирезонансов f_{am} . Эти две задачи с однородными механическими естественными граничными условиями различаются только электрическими граничными условиями: для f_{rk} принимается $\varphi = 0$ при $z = H_1$ и $z = H_2$, а для f_{am} –

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } z = H_1; \\ \text{const} \cdot \exp(j2\pi f t) & \text{при } z = H_2; \end{cases} \quad \int_0^{r_5} D_z r dr = 0 \quad \text{при } z = H_2$$

где $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции. Из сравнения полученных собственных частот f_{rk} и f_{am} находятся действительные рабочие частоты электрических резонансов $f_{r(j)}$ и $f_{a(j)}$, которые близки друг другу, но тем не менее существенно различаются. Нумерация (j) этих частот, вообще говоря, не совпадает с нумерацией k и m .

Численные результаты, полученные в ACELAN при использовании осесимметричных квадратичных треугольных конечных элементов с шестью узлами, сравнивались с аналогичными результатами, полученными авторами в ANSYS, где для осесимметричных задач пьезоэлектрического анализа возможны только четырехугольные конечные элементы с четырьмя узлами. Ниже приведены значения собственных частот пьезоэлектрического излучателя (в кГц), вычисленные по ACELAN при ND = 239 и (в скобках) по ANSYS при ND = 253, где ND – количество узлов в конечно-элементных моделях

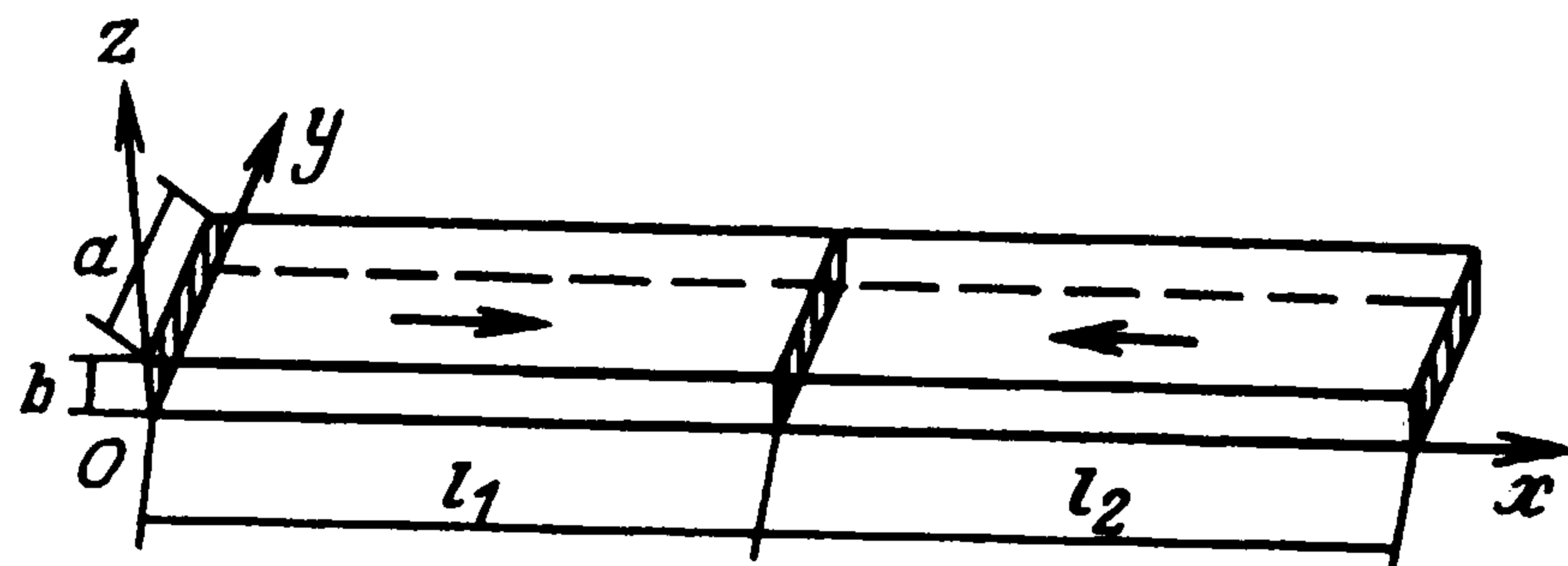
$$\begin{aligned} f_{r1} &= 0,11 \cdot 10^{-3}(0), & f_{a1} &= 0,43 \cdot 10^{-3}(0), \\ f_{r2} &= 14,55(14,44), & f_{a2} &= 14,94(14,85), \\ f_{r3} &= 22,11(22,01), & f_{a3} &= 22,31(22,20). \end{aligned}$$

Как видно, имеется достаточно хорошее совпадение результатов вычислений по ACELAN и по ANSYS.

Рабочими частотами пьезоизлучателя являются частоты электрических резонансов $f_{r(1)} = f_{r2}$ или $f_{r(2)} = f_{r3}$, для которых соответствующие частоты электрических антирезонансов равны $f_{a(1)} = f_{a2}$ или $f_{a(2)} = f_{a3}$. На этих частотах происходят изгибные колебания пьезоизлучателя. В результате расчетов было получено, что мода колебаний на частоте $f_{r(1)}$ содержит ярко выраженные противофазные движения нижнего и верхнего торцов пьезоизлучателя, а мода колебаний на частоте $f_{r(2)}$, наоборот – синфазные движения. Отметим, что формы мод при расчетах по ACELAN и по ANSYS практически не различались между собой. (Интересные практические приложения представленных результатов и оптимизация размеров пьезоизлучателя остаются за рамками настоящей работы.)

В других тестовых расчетах при модальном анализе задач электроупругости также было получено хорошее согласование результатов ACELAN и ANSYS.

Следует ожидать, что метод разложения по модам из разд. 2 будет эффективным при расчете устройств, работающих на ярко выраженных резонансных частотах. Для примера рассмотрим пьезотрансформатор продольно-продольного типа [15], представленный на фиг. 2. Секции трансформатора выполнены из пьезокерамики ЦТБС-3 [14] и имеют следующие размеры: $l_1 = l_2 = 0,05$ м, $a = 0,02$ м, $b = 0,005$ м. (Направления поляризации пьезокерамики в секциях возбуждателя и генератора показаны на фиг. 2 жирными стрелками.)



Фиг. 2

В рабочем режиме электрод $x = l_1$ заземлен ($\varphi = 0$), а на электрод $x = 0$ подается потенциал $\varphi = V_{in} \exp(j2\pi ft)$. На электроде $x = l_1 + l_2$ значение потенциала неизвестно, но суммарный заряд равен нулю. В процессе работы трансформатор генерирует на электроде $x = l_1 + l_2$ потенциал $\varphi = V_{out} \exp(j2\pi ft)$, где $V_{out} \in \mathbb{C}$. Мерой эффективности данного устройства служит коэффициент трансформации по напряжению: $K = |V_{out}|/V_{in}$. Основными рабочими частотами пьезотрансформатора продольно-продольного типа являются первые частоты электрического резонанса с модами растяжения – сжатия по x .

Сравним следующие модели пьезотрансформатора: упругую одномерную по x модель с дополнительными элементами, описывающими пьезоэлектрические эффекты (1D), пьезоэлектрическую двумерную в плоскости Oxy модель в рамках гипотез плоского напряженного состояния (2D) и пьезоэлектрическую трехмерную модель (3D). В табл. 1 приведены первые частоты электрических резонансов $f_{r(k)}$ и антирезонансов $f_{a(k)}$ (в кГц), на которых проявляются пьезоэлектрические связи. (Здесь номера рабочих электрических резонансных частот не совпадают с их порядковыми номерами собственных частот рассматриваемого тела.) Расчеты проводились на ANSYS при прямоугольных конечных элементах с разбиением длины $l_1 + l_2$ на 20 элементов (1D, 2D, 3D), ширины a на 5 элементов (2D, 3D) и толщины b на 2 элемента (3D).

Из табл. 1 видно, что первые частоты растяжения – сжатия хорошо определяются по одномерной теории.

Коэффициент трансформации K определим из решения задач об установившихся колебаниях для одномерной модели с применением метода разложения по четырем модам колебаний и для одномерной и двумерной моделей с решением полной СЛАУ (2.3).

Демпфирование для одномерной модели с применением метода разложения по модам зададим через коэффициент затухания $\xi_k = 1/(2Q)$ при механической добротности $Q = 350$. Для одномерной и двумерной моделей с решением полной СЛАУ затухание будем определять через коэффициенты α_d и β_d , входящие в представление матрицы демпфирования [4]

$$C_{uu} = \alpha_d M_{uu} + \beta_d K_{uu} \quad (5.1)$$

Предположим, что добротности пьезотрансформатора на резонансных частотах $f_{r(1)}$ и $f_{r(2)}$ соответственно равны $Q_{(1)}$ и $Q_{(2)}$. Из сравнения представлений (5.1) и (2.1) можно получить следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_d &= 2\pi f_{r(1)} f_{r(2)} [(1 + k_{(1)}^2) f_{r(2)} Q_{(2)} - (1 + k_{(2)}^2) f_{r(1)} Q_{(1)}] / \Delta \\ \beta_d &= (1 + k_{(1)}^2)(1 + k_{(2)}^2) [f_{r(2)} Q_{(2)} - f_{r(1)} Q_{(1)}] / (2\pi \Delta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\Delta = Q_{(1)} Q_{(2)} [(1 + k_{(1)}^2) f_{r(2)}^2 - (1 + k_{(2)}^2) f_{r(1)}^2]$$

$$k_{(j)}^2 = (W_{r(j)}^T \cdot K_{\phi u}^T \cdot K_{\phi \phi}^{-1} \cdot K_{\phi u} \cdot W_{r(j)}) / (W_{r(j)}^T \cdot K_{uu} \cdot W_{r(j)})$$

Таблица 1

Модель	$f_{r(1)}$	$f_{a(1)}$	$f_{r(2)}$	$f_{a(2)}$
1D	18,80	21,08	38,87	42,28
2D	18,70	20,87	38,39	41,66
3D	18,73	20,89	38,45	41,76

Таблица 2

Модель	$K_{(1)}$	$K_{(2)}$
1D (Mode sup.)	65,92	66,21
1D (Full)	65,89	66,20
2D (Full)	63,97	64,97

Они использовались при расчете коэффициентов трансформации K_j в двумерной модели, а для одномерной модели, редуцированная СЛАУ которой включала матрицу $\bar{K}_{ин}$, использовались другие значения коэффициентов α_d и $\bar{\beta}_d$, формально получаемые из (5.2) при $k_{(1)} = k_{(2)} = 0$.

В табл. 2 сведены результаты расчетов коэффициентов трансформации $K_{(j)}$ на первых двух рабочих частотах, близких к первым резонансным частотам $f_{r(j)}$ ($j = 1, 2$) из табл. 1. Видно, что метод разложения по модам (Mode sup.) дает для данной задачи значения коэффициентов трансформации, практически не отличающиеся от значений, рассчитанных по методам, использующим решения полной СЛАУ (Full).

Авторы благодарят коллег по разработке пакета ACELAN О.Н. Акопова, К.А. Надолина и А.С. Скалиуха, результаты работы которых использовались при проведении численных экспериментов, а также Ю.А. Крамарова за постановку задачи расчета пьезоизлучателя оригинальной конструкции.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rao S.S., Sunar M. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures // AIAA Journal. 1993. V. 31. № 7. P. 1280–1286.
2. Наседкин А.В. К расчету по МКЭ пьезопреобразователей, нагруженных на акустическую среду // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1999. № 1. С. 48–51.
3. Белоконов А.В., Наседкин А.В. О некоторых свойствах собственных частот электроупругих тел ограниченных размеров // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 151–158.
4. ANSYS. Theory Reference. Rel. 5.5. // Ed. P. Kothnke // ANSYS Inc. Houston, 1998.
5. Жарий О.Ю. Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 109–115.
6. Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.
7. Наседкин А.В. Альтернативные формулировки методов Ньюмарка и Вильсона // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 2-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 1996. Ростов-н/Д: МП "Книга", 1996. Т. 2. С. 115–119.
8. Wojcik G.L., Vaughan D.K., Abboud N., Mould J. Electromechanical modeling using explicit time-domain finite elements // Proc. IEEE Ultrason. Symp. 1993. V. 2. P. 1107–1112.
9. Fried I., Malkus D.S. Finite element mass matrix lumping by numerical integration with no convergence loss // Intern. J. Solids and Structures. 1975. V. 11. № 4. P. 461–466.

10. *Hinton E., Rock T., Zienkewicz O.C.* A note on mass lumping and relating processes in finite element method // Intern. J. Earthquake. Eng. and Struct. Dyn. 1976. V. 4. № 3. P. 245–249.
11. *Наседкин А.В.* Конечно-элементный динамический анализ пьезоэлектрических излучателей акустических волн // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 4-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 1998. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 1999. Т. 2. С. 89–93.
12. *Lehoucq R.B., Sorensen D.C., Vu P., Yang C.* ARPACK: An implementation of the Implicitly Re-started Arnoldi Iteration that computes some of the eigenvalues and eigenvectors of a large sparse matrix // Available from netlib@ornl. gov under the directory scalapack, 1996.
13. *Акопов О.Н., Белокопъ А.В., Надолин К.А. и др.* Статистический анализ пьезоэлектрических устройств в ACELAN. I. Структура и возможности. II. Численные эксперименты // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 4-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 1998. Ростов-н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 1999. Т. 1. С. 14–22.
14. *Аронов Б.С.* Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 271 с.
15. *Лавриненко В.В.* Пьезоэлектрические трансформаторы. М.: Энергия, 1975. 111 с.

Ростов-на-Дону
e-mail: nasedkin@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
4.VIII.1999