

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. А.О. Ватульян, И.И. Ворович, А.Н. Соловьев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Исследуется малоизученный класс краевых задач динамической теории упругости, в которых на части границы тела заданы все компоненты вектора смещений и вектора напряжений (относительно компонент этих полей на остальной части границы ничего неизвестно). Доказывается теорема единственности. Исследование проблемы проводится при помощи сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами. Предлагается схема численного определения неизвестных полей, основанная на сочетании метода граничного элемента и метода регуляризации А.Н. Тихонова. Рассматривается ряд модельных примеров восстановления волновых полей для анизотропного тела.

Для тела, ограниченного поверхностью S , в классической динамической теории упругости, как известно, имеется три основных типа краевых задач, для которых доказаны теоремы существования и единственности [1]. Развитие методик восстановления волновых полей внутри упругих тел на основе измеренных граничных волновых полей приводит к новым постановкам краевых задач в динамической теории упругости. Наиболее актуальной представляется краевая задача, в которой на части границы $S_1 \subset S$ заданы все компоненты вектора смещений и все компоненты вектора напряжений. Краевые задачи такого типа возникают при исследовании обратных граничных задач теории упругости, связанных с определением граничных полей смещений и напряжений на недоступной для непосредственного наблюдения части $S_2 = S \setminus S_1$ упругого тела, а также при восстановлении полей напряжений и смещений внутри тела по заданному (измеренному) полю смещений на свободной от нагрузок части границы [2–5]. Отметим, что весьма важными аспектами при исследовании таких краевых задач являются вопросы единственности, корректности и построения алгоритмов восстановления неизвестных полей.

1. Постановка задачи. Будем считать, что упругое тело V ограничено гладкой поверхностью S , $S = S_1 \cup S_2$, причем область V и ее граница S удовлетворяют следующим условиям:

а) V – ограниченная область, являющаяся объединением областей, каждая из которых звездна относительно некоторого шара;

б) поверхность S допускает разбиение на конечное число частей Σ_k , каждая из которых однозначно проектируется на какую-нибудь координатную плоскость при помощи непрерывно-дифференцируемого отображения, определенного в замкнутой области $\overline{g_k}$.

Краевая задача об установившихся колебаниях анизотропного тела V с частотой ω описывается системой уравнений [1]

$$Lu = c_{ijkl}u_{k,lj} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

и граничными условиями на S_1

$$u_i|_{S_1} = u_{i0}, \quad t_i = c_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{S_1} = p_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

где c_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных, удовлетворяющих обычным требованиям положительной определенности и симметрии, n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности S . На части границы S_2 ни тип граничных условий, ни распределение граничных значений полей смещений и напряжений не известны. Требуется определить граничные значения вектора смещений и напряжений на границе S_2 . Зная значения граничных полей смещений и напряжений на всей поверхности S , нетрудно рассчитать их значения внутри V на основе формул Соммильяны [1].

Отметим, что постановка краевой задачи (1.1), (1.2) не является традиционной в математической физике для уравнений эллиптического типа и требует исследования.

2. Сведение к задаче Коши. Покажем, что краевая задача (1.1), (1.2) несложным образом приводится к задаче Коши для эллиптического оператора теории упругости. Пусть $x_0 \in S_1$ – внутренняя точка S_1 . Введем локальную систему координат с центром в $x_0 - (s_1, s_2, n)$, где s_1, s_2 направлены по линиям главных кривизн, n – в направлении внешней нормали к S_1 . Тогда из граничных условий (1.2), учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = m_{1j} \frac{\partial}{\partial s_1} + m_{2j} \frac{\partial}{\partial s_2} + n_j \frac{\partial}{\partial n}$$

находим

$$u_i|_{S_1} = u_{i0}, \quad c_{ijkl} n_l n_j \frac{\partial u_k}{\partial n} |_{S_1} = p_{i0} \quad (2.1)$$

$$p_{i0} = p_i - c_{ijkl} m_{1l} n_j \frac{\partial u_{k0}}{\partial s_1} - c_{ijkl} m_{2l} n_j \frac{\partial u_{k0}}{\partial s_2}, \quad i = 1, 2, 3$$

В силу положительной определенности упругой энергии система (2.1) относительно $\partial u_k / \partial n$ однозначно разрешима и соотношения (2.1) приводятся к виду

$$u_i|_{S_1} = u_{i0}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n} |_{S_1} = v_{i0}, \quad v_{i0} = (c_{ijkl} n_l n_j)^{-1} p_{i0} \quad (2.2)$$

Таким образом, исходная краевая задача (1.1), (1.2) сводится к задаче Коши (2.2) для системы (1.1). Известно, что такая задача для одного уравнения эллиптического типа некорректна и не является локально разрешимой [6]. Таким же свойством обладает и задача (1.1), (1.2), однако, применяя рассуждения, аналогичные используемым при доказательстве теоремы Хольмгрена [6], можно установить единственность решения задачи (1.1), (1.2).

3. Теорема единственности.

Теорема. Пусть существует решение $u_i \in C^2(V)$ задачи (1.1), (1.2). Тогда оно единственно в указанном классе.

Для доказательства достаточно показать, что $u_i = 0$ внутри области V при $u_{i0} = p_i = 0$ в силу линейности задачи. Введем в рассмотрение произвольную кусочно-гладкую поверхность $S_0 = S_1^- \cup S_1^+$, отсекающую от V часть V_0 , причем $S_1^- \subset S_1$, а S_1^+ лежит внутри V . Кроме того, введем в рассмотрение набор вектор-функций $v_i^{(m)}$, являющихся решениями следующих однотипных краевых задач:

$$Lv^{(m)} = 0, \quad x \in V_0$$

$$v_i^{(m)}|_{S_1^+} = 0, \quad c_{ijkl} n_j^+ \frac{\partial v_k^{(m)}}{\partial x_j} |_{S_1^+} = Q_i \delta_{im}$$

где Q_i – произвольный полином на S_1^+ .

Используя теорему Гаусса–Остроградского и граничные условия для u_i и $v_i^{(m)}$, вычислим разность

$$\begin{aligned} (Lu, v^{(m)}) - (u, Lv^{(m)}) &= \int_{V_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) v_i^{(m)} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial v_k^{(m)}}{\partial x_l} \right) u_i \right] dV = \\ &= \int_{S_0} \left[\left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) v_i^{(m)} n_j^+ - \left(c_{ijkl} \frac{\partial v_k^{(m)}}{\partial x_l} \right) u_i n_j^+ \right] dS = \int_{S_1^+} Q_i(x) \delta_{im} u_i dS_x = 0 \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $Q_i(x)$ следует $u_m(x)|_{S_1^+} = 0$, а в силу произвольности S_1^+ имеем $u_m(x) \equiv 0$ в V_0 , что и доказывает теорему.

Замечание 1. Теорема единственности остается в силе для неоднородной среды с $c_{ijkl}(x) \in C^2(V)$.

4. Построение решения. Поскольку задача (1.1), (1.2) не является классической краевой задачей, для ее решения нельзя использовать хорошо развитый в последнее время метод конечных элементов. Первым этапом в процедуре восстановления полей смещений и напряжений внутри области V является определение граничных полей на части границы S_2 . Одним из наиболее эффективных методов нахождения связи между известными и неизвестными граничными значениями смещений и напряжений является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и основанный на нем метод граничных элементов [7]. В силу отсутствия явного представления фундаментальных решений для анизотропной среды классический подход, основанный на теории потенциала, неэффективен, однако возможна формулировка операторной связи между граничными значениями вектора смещений и вектора напряжений, основанная на использовании ГИУ первого рода с гладкими ядрами экспоненциального типа [8]. Аналогично [8] строится система операторных уравнений, на основе которой для краевой задачи (1.1), (1.2) может быть сформулирована система ГИУ первого рода с гладкими ядрами вида

$$\int_{S_2} K_{mj}^{(1)}(x, \alpha) t_m(x) dS_x - \int_{S_2} K_{mj}^{(2)}(x, \alpha) u_m(x) dS_x = F_{j0}(\alpha), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in C^2$$

где

$$\begin{aligned} K_{mj}^{(1)}(x, \alpha) &= P_m(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_j) \phi_j(x, \alpha) \\ K_{mj}^{(2)}(x, \alpha) &= c_{ksml} P_k(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_j) n_l \frac{\partial \phi_j(x, \alpha)}{\partial x_s} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\phi_j(x, \alpha) = \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \lambda_j(\alpha_1, \alpha_2) x_3))$$

$$F_{j0}(\alpha) = \int_{S_1} K_{mj}^{(2)}(x, \alpha) u_{m0}(x) dS_x - \int_{S_1} K_{mj}^{(1)}(x, \alpha) p_m(x) dS_x$$

Здесь $\lambda_j(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_{3j}(\alpha_1, \alpha_2)$ ($j = 1, 2, 3$) – корни уравнения Кристоффеля

$$\det A = 0, \quad A = \{A_{ik}\}, \quad A_{ik} = c_{ijkl} \alpha_j \alpha_l - \rho \omega^2 \delta_{ik}$$

удовлетворяющие условию $\text{Im} \lambda_j(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \rightarrow \infty$, а $P_m(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_j)$ – полиномы четвертого порядка, являющиеся алгебраическими дополнениями к элементам первой строки матрицы A .

Конкретный вид ядер (4.2) интегральных операторов в (4.1) для изотропных и различных анизотропных материалов приведен ранее [9–11]. Заметим, что ядра пред-

ставляют собой кусочно-гладкие функции, в отличие от классических ГИУ, ядра которых имеют особенности.

Система (4.1) представляет собой систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами относительно неизвестных граничных полей, которая эквивалентна исходной краевой задаче. Эти уравнения представляют собой следствие теоремы взаимности в теории упругости для истинных полей и неоднородных плоских волн в анизотропной среде. Система (4.1) порождает вполне непрерывный оператор, процедура его обращения представляет собой некорректную задачу и требует регуляризации в той или иной форме [12]. В настоящей работе нахождение неизвестных функций осуществляется на основе сочетания метода граничных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова, как это проделано для классических краевых задач динамической теории упругости в изотропном [9] и анизотропном случаях [10, 11].

Замечание 2. Как известно, для некорректной задачи (1.1), (1.2), вообще говоря, отсутствует непрерывная зависимость от данных задачи u_0 и p_i , однако, если отыскивать решение в классе равномерно ограниченных функций в области V , то непрерывная зависимость будет иметь место [13].

5. Модельный пример. В качестве модельного примера рассмотрим простейшую задачу изучаемого типа – задачу об антиплоской деформации ортотропного тела. Краевая задача о восстановлении поля смещений в этом случае имеет вид

$$c_{66}u_{,11} + c_{44}u_{,33} + \rho\omega^2 u = 0 \quad (5.1)$$

$$x_3 = a_3, \quad u = f^{(1)}(x_1), \quad u_{,3} = f^{(2)}(x_1), \quad |x_1| \leq a_1$$

Восстановим поле в области $S = [-a_1, a_1] \times [-a_3, a_3]$. Решение задачи (5.1) легко строится методом разделения переменных и представимо в форме

$$u(x_1, x_3) = u_0(x_1, x_3) + u_1(x_1, x_3) + u_2(x_1, x_3) \quad (5.2)$$

где

$$u_0(x_1, x_3) = f_0^{(1)}(x_1) \cos k(x_3 - a_3) + f_0^{(2)}(x_1) \frac{\sin k(x_3 - a_3)}{k}$$

$$u_1(x_1, x_3) = \sum_{n=1}^M W(x_1, x_3, n), \quad u_2(x_1, x_3) = \sum_{n=M+1}^{\infty} W(x_1, x_3, n)$$

$$W(x_1, x_3, n) = \left(f_n^{(1)} \cos \mu_n(x_3 - a_3) + f_n^{(2)} \frac{\sin \mu_n(x_3 - a_3)}{\mu_n} \right) \sin \lambda_n x_1$$

$$f_0^{(i)}(x_1) = \frac{f^{(i)}(a_1) + f^{(i)}(-a_1)}{2a_1} x_1 + \frac{f^{(i)}(a_1) - f^{(i)}(-a_1)}{2a_1}$$

$$f_n^{(i)} = \frac{1}{a_1} \int_{-a_1}^{a_1} (f^{(i)}(x_1) - f_0^{(i)}(x_1)) \sin \lambda_n x_1 dx_1; \quad i = 1, 2$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a_1}, \quad \mu_n = \sqrt{\frac{k^2 - \lambda_n^2}{\nu}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k^2 = \frac{\rho\omega^2}{c_{44}}, \quad \nu = \frac{c_{66}}{c_{44}}$$

Отметим следующие особенности решения (5.2).

1°. Решение вида (5.2) существует для любых значений волнового числа k , в отличие от классических краевых задач, для которых имеется счетный спектр резонансных значений k .

2°. Слагаемое $u_0(x_1, x_3)$ представляет собой стержневое решение, ибо для каждого фиксированного $x_1 \in (-a_1, a_1)$ оно является решением задачи Коши для полубесконечного стержня ($u_{0,11} = 0$).

3°. В представлении для $u_1(x_1, x_3)$ верхний предел M выбирается из условия

$$\lambda_M < k < \lambda_{M+1}$$

и $u_1(x_1, x_3)$ – сумма некоторых собственных форм колебаний для прямоугольника.

4°. Выражение для $u_2(x_1, x_3)$ представляет собой вообще говоря расходящийся ряд, что обусловлено общим результатом об отсутствии глобального решения.

В то же время, потребовав ограниченности решения, получаем, что необходимо ограничиться конечным числом слагаемых в представлении для $u_2(x_1, x_3)$

$$u(x_1, x_3) = u_0(x_1, x_3) + u_1(x_1, x_3)$$

7. Численная реализация системы ГИУ. В качестве примеров, иллюстрирующих эффективность системы ГИУ (4.1) для задачи восстановления граничных полей (1.1), (1.2), рассмотрим плоскую деформацию ортотропного упругого тела. Будем считать, что оси ортотропии совпадают с осями координат, $u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$, $u_2 = 0$. Свойствами ортотропии обладают аустенитные стали [11], многие композиционные материалы в рамках концепции эффективных модулей.

Рассмотрим краевую задачу о колебаниях ортотропной упругой среды, занимающей область S , ограниченную кусочно-гладкой кривой $L = L_1 \cup L_2$. Будем считать, что на контуре L_1 заданы компоненты вектора смещений и вектора напряжений

$$u_i|_{L_1} = u_{i0}, \quad \sigma_{ij}n_j|_{L_1} = p_i, \quad i = 1, 3 \quad (6.1)$$

а на L_2 компоненты $u_i|_{L_2}$ и $t_i = \sigma_{ij}n_j|_{L_2}$, ($i = 1, 3$) – являются неизвестными. В этом случае аналогично изложенному подходу можно сформулировать систему операторных соотношений, связывающую известные и неизвестные значения граничных полей.

Система (4.1) (в безразмерной форме) в этом случае имеет вид

$$P_1(\beta_1, \pm\beta_{3s}(\beta_1))V_1(k\beta_1, \pm k\beta_{3s}(\beta_1)) + \\ + P_3(\beta_1, \pm\beta_{3s}(\beta_1))V_3(k\beta_1, \pm k\beta_{3s}(\beta_1)) = 0, \quad s = 1, 2 \quad (6.2)$$

где

$$P_1(\beta_1, \beta_3) = \gamma_5\beta_1^2 + \beta_3^2 - 1, \quad P_3(\beta_1, \beta_3) = -(\gamma_5 + \gamma_7)\beta_1\beta_3$$

$$V_1(k\beta_1, k\beta_3) = \int_L \{ \sigma_{11}n_1 + \sigma_{13}n_3 - ik[(\beta_1n_1\gamma_1 +$$

$$+ \beta_3n_3\gamma_5)u_1 + (\beta_1n_3\gamma_7 + \beta_3n_1\gamma_5)u_3 \} e^{ik(\beta, x)} dL_x$$

$$V_3(k\beta_1, k\beta_3) = \int_L \{ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3 - ik[(\beta_1n_3\gamma_5 +$$

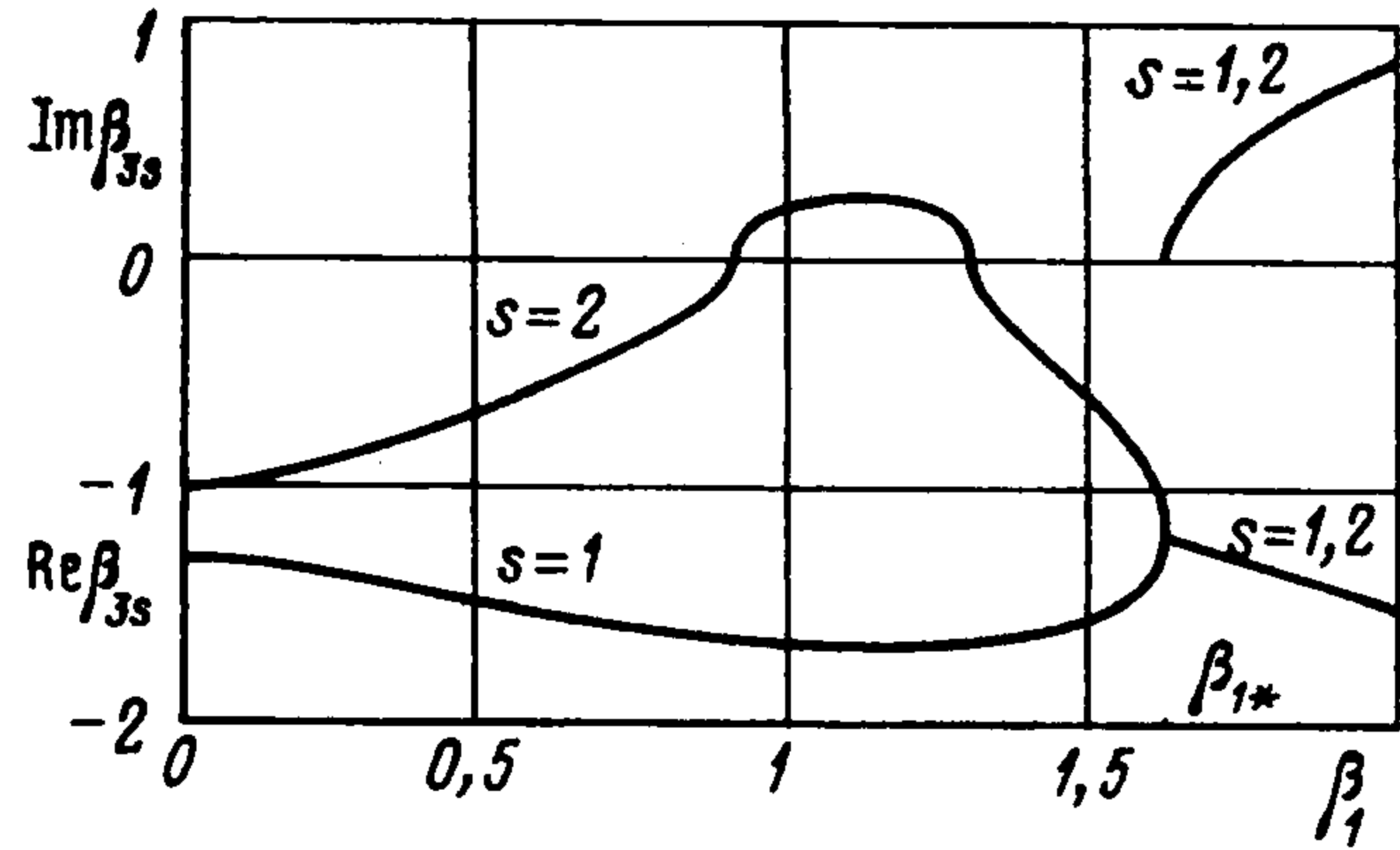
$$+ \beta_3n_1\gamma_7)u_1 + (\beta_1n_1\gamma_5 + \beta_3n_3)u_3 \} e^{ik(\beta, x)} dL_x$$

$$k = \omega\sqrt{\rho/c_{33}}, \quad \gamma_1 = c_{11}/c_{33}, \quad \gamma_5 = c_{44}/c_{33}, \quad \gamma_7 = c_{13}/c_{33}$$

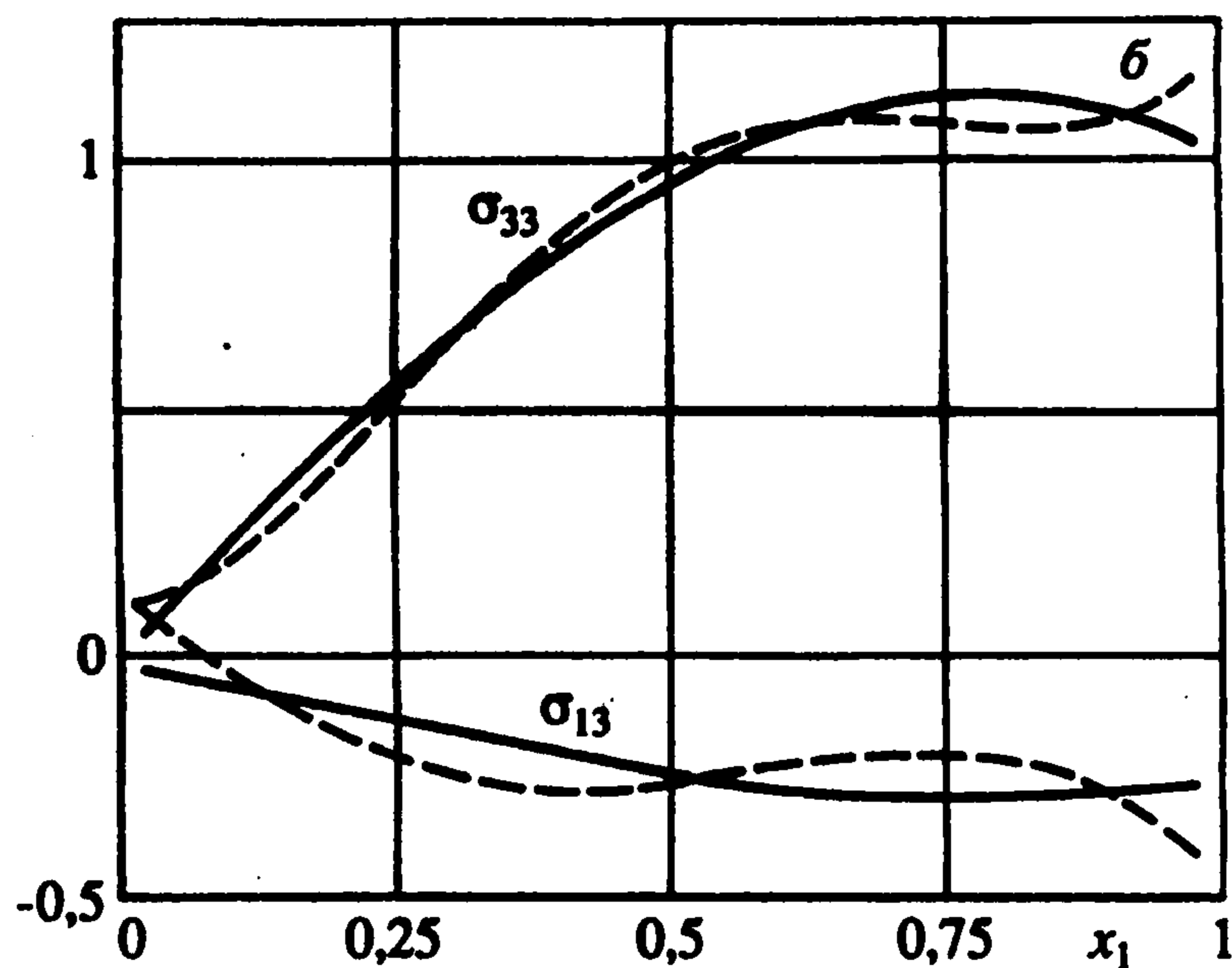
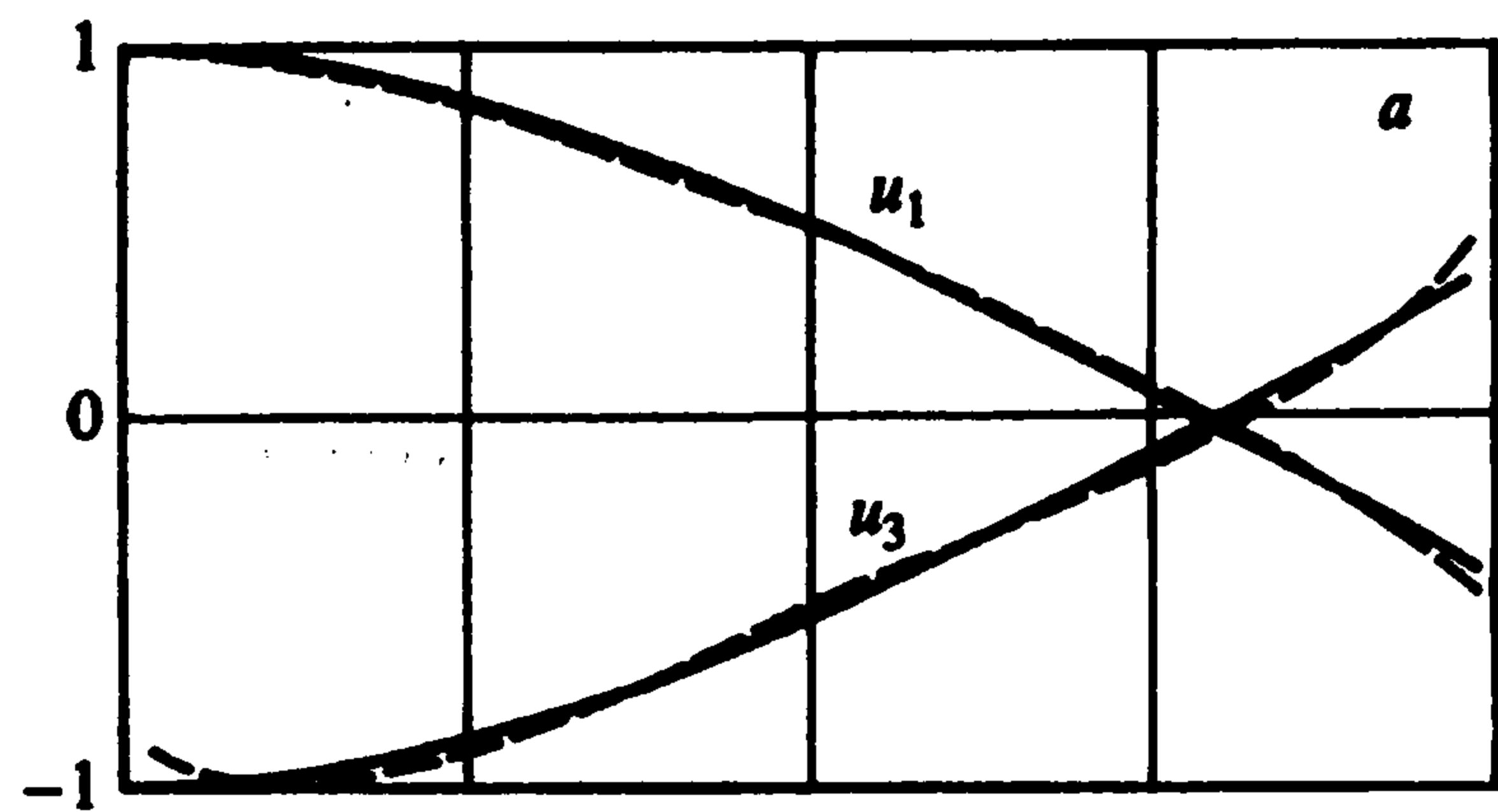
$$\beta_{3s}(\beta_1) = i[A_1(\beta_1) - i(-1)^s(A_2(\beta_1))^{1/2}]^{1/2}, \quad s = 1, 2$$

$$A_1(\beta_1) = (2\gamma_5)^{-1}[(\gamma_1 - 2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_7^2)\beta_1^2 - (1 + \gamma_5)]$$

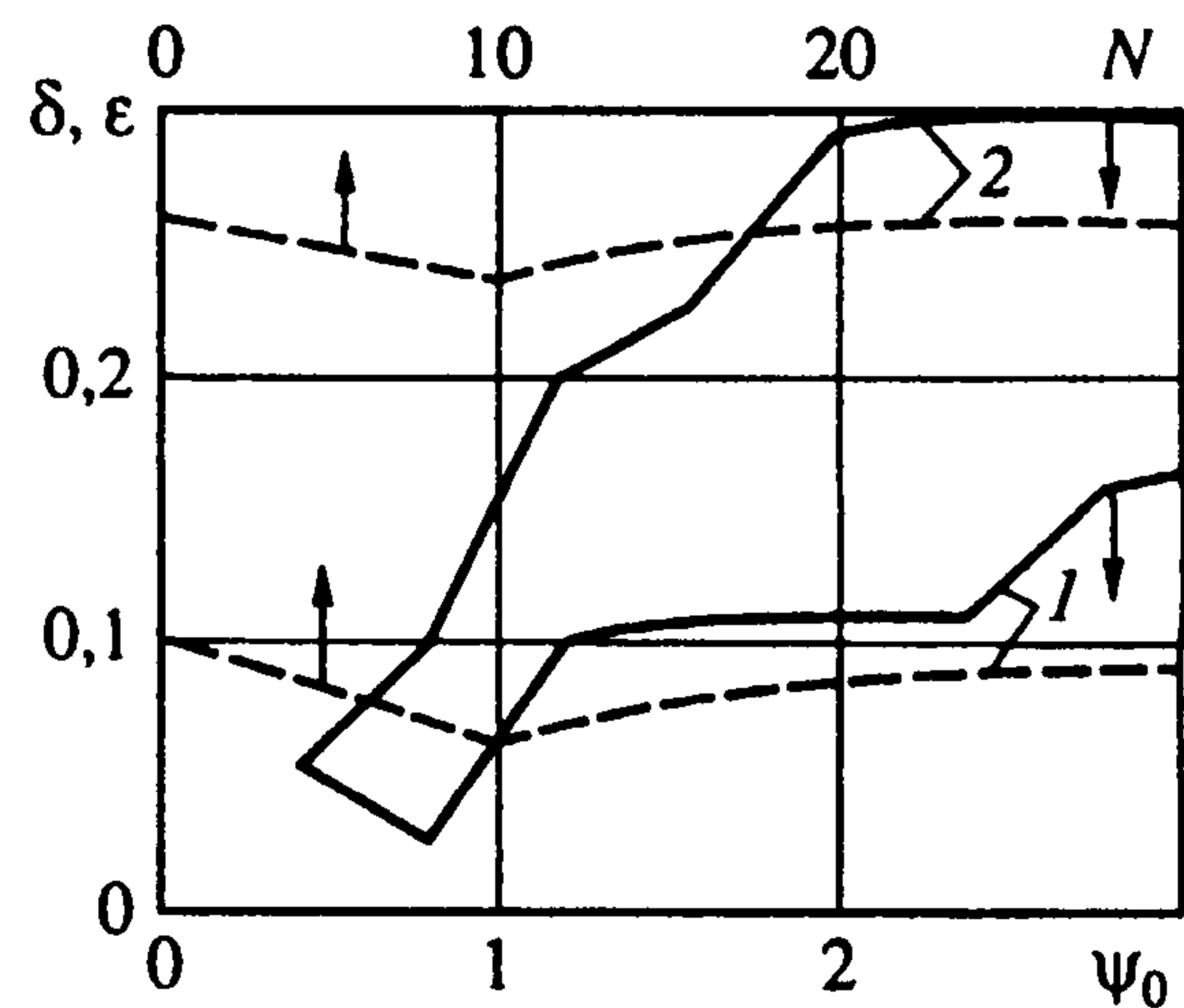
$$A_2(\beta_1) = -(A_1(\beta_1))^2 + (\gamma_5)^{-1}(1 - \gamma_1\beta_1^2)(1 - \gamma_5\beta_1^2)$$



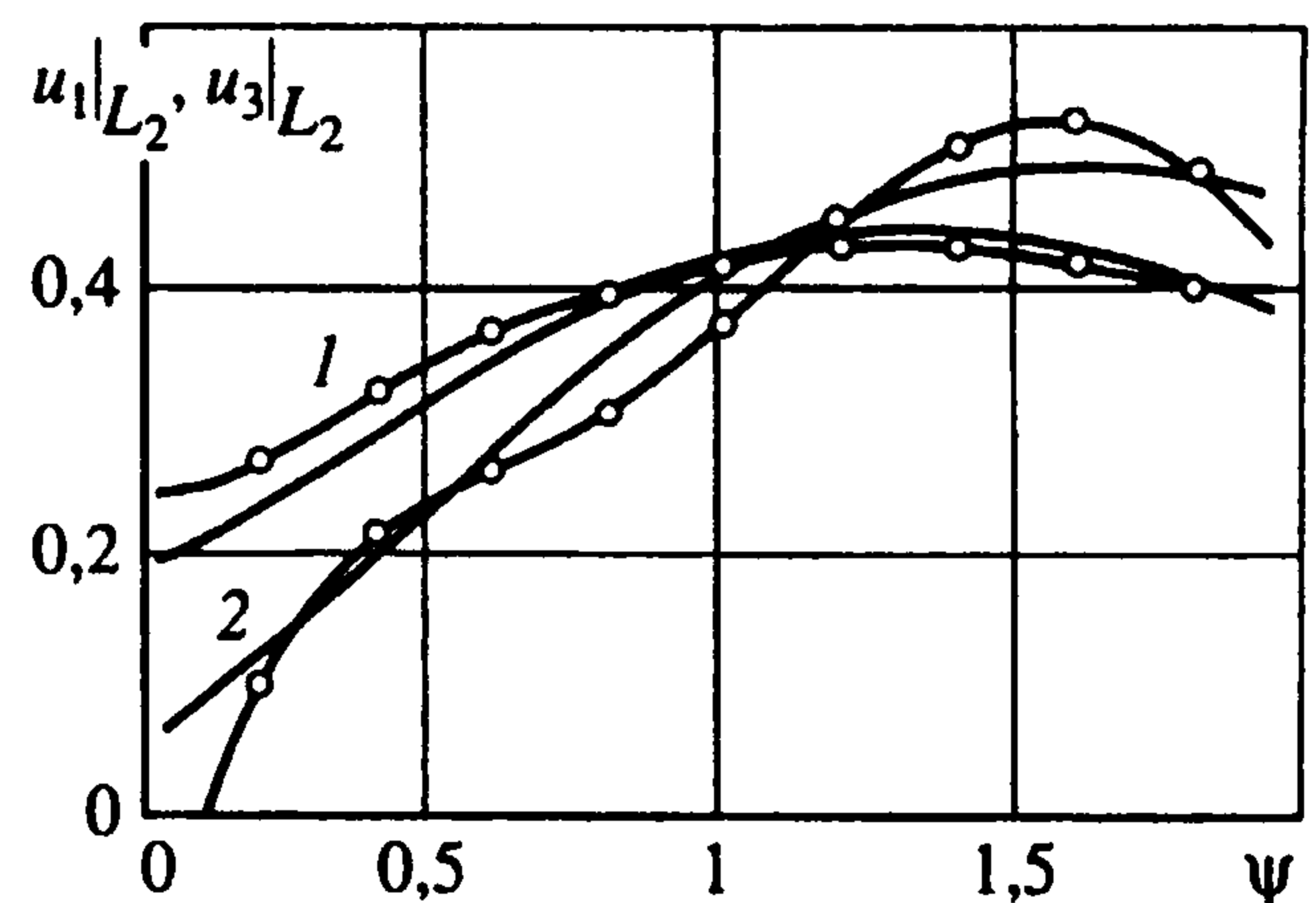
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Ядра интегральных операторов в (6.2) зависят от корней характеристического многочлена оператора ортотропной теории упругости $\beta_{3s}(\beta_1)$ ($s = 1, 2$).

На фиг. 1 приведены зависимости $\beta_{3s}(\beta_1)$ для аустенитной стали со следующими материальными постоянными [11]:

$$\rho = 0,812 \times 10^4 \text{ кг/м}^3$$

$$c_{11} = 0,2627, c_{13} = 0,145, c_{33} = 0,216, c_{44} = 0,129 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2$$

Отметим, что для выбранного материала при малых β_1 корни $\beta_{3s}(\beta_1)$ вещественны; с ростом β_1 один из корней становится чисто мнимым на некотором участке; далее, начиная с некоторого β_{1*} , корни $\beta_{3s}(\beta_1)$ ($s = 1, 2$) комплексно сопряжены.

В качестве примеров, иллюстрирующих реконструкцию граничных полей, рассмотрим две плоские задачи для квадратной и эллиптической области из ортотропного материала с приведенными выше упругими постоянными.

1°. *Задача для квадрата*

$$S = [0, a] \times [0, a]$$

На

$$L_1 = \{ \{x_1 = 0, x_3 \in [0, a]\} \cup \{x_3 = a, x_1 \in [0, a]\} \cup \{x_1 = a, x_3 \in [0, a]\} \}$$

известны функции u_{i0} и p_i ($i = 1, 3$) из (6.1), соответствующие полю перемещений

$$u_1(x_1, x_3) = \text{Re}\{-P_3 Z(x_1, x_3)\}, \quad u_3(x_1, x_3) = \text{Re}\{P_1 Z(x_1, x_3)\} \quad (6.3)$$

$$Z(x_1, x_3) = \exp[ik(\beta_1 x_1 + \beta_3 x_3)], \quad \beta_3 = \beta_{31}(\beta_1), \quad P_i = P_i(\beta_1, \beta_3), \quad i = 1, 3$$

и вычисленному на основе обобщенного закона Гука для ортотропного материала полю напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_3)$, ($i, j = 1, 3$).

Величинами, подлежащими восстановлению на

$$L_2 = \{x_1 \in [0, a]; x_3 = 0\}$$

являются $u_i(x_1, 0)$, $\sigma_{i3}(x_1, 0)$ ($i = 1, 3$). На фиг. 2, а при

$$a = 1, \quad ka = 1,5, \quad k\beta_1 = 2, \quad k\beta_3 = 2,4823$$

представлены графики функций $u_1(x_1, 0)$ и $u_3(x_1, 0)$ на границе L_2 ; сплошные линии соответствуют точному решению (6.3), штриховые линии соответствуют значениям, восстановленным численно. На фиг. 2, б представлены аналогичные зависимости для $\sigma_{13}(x_1, 0)$ и $\sigma_{33}(x_1, 0)$. Расчеты производились при разбиении границы L_2 на 20 элементов. Результаты расчетов показывают достаточную точность (погрешность менее 10%) восстанавливаемых полей в рассмотренной задаче в диапазоне изменения параметра ka от 0,1 до 5.

2°. Задача для эллипса

$$S = \{x_1, x_3 \mid \frac{(x_1 - R)^2}{a^2} + \frac{(x_3 - R)^2}{b^2} \leq 1\}$$

При $a = 0,5$, $b = 0,3$, в качестве тестовых восстанавливаемых полей были взяты компоненты, определенные соотношениями (6.3) в случае

$$ka = 0,9, \quad k\beta_1 = 2, \quad k\beta_3 = -1,4964 + 1,0172i$$

Исследовалась эффективность предложенного метода восстановления упругих полей на границе

$$L_2 = \{x_1 = R + a \cos \psi, \quad x_3 = R + b \sin \psi, \quad \psi \in [0, \psi_0]\}$$

в зависимости от числа граничных элементов N и от относительной длины дуги границы

$$L_1 = \{x_1 = R + a \cos \psi, \quad x_3 = R + b \sin \psi, \quad \psi \in [\psi_0, 2\pi]\}$$

доступной для измерения характеристик упругих полей.

На фиг. 3 штриховыми линиями представлены графики относительных погрешностей δ (кривая 1) и ϵ (кривая 2) в зависимости от числа граничных элементов N

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_3^2}, \quad \delta_i = \frac{\max |u_i - u_i^N|}{\max |u_i|}, \quad i = 1, 3$$

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}, \quad \epsilon_1 = \frac{\max |\sigma_n - \sigma_n^N|}{\max |\sigma_n|}, \quad \epsilon_2 = \frac{\max |\sigma_\tau - \sigma_\tau^N|}{\max |\sigma_\tau|}$$

при восстановлении компонент векторов перемещений и напряжений на границе L_2 при $\psi_0 = \pi/2$ (u_i , σ_n , σ_τ – точное решение, u_i^N , σ_n^N , σ_τ^N – восстановленные значения, максимум берется на границе L_2). Результаты расчетов показывают, что существует оптимальное значение числа элементов N_{opt} , обеспечивающее минимальную погрешность восстановления (в данном случае $N_{opt} = 10$), что соответствует результатам работы [5]. Отметим, что при увеличении числа элементов N обе погрешности монотонно растут, что обусловлено некорректностью исходной задачи (1.1), (1.2).

Кроме того, исследовалась эффективность предложенного метода восстановления упругих полей в зависимости от угла ψ_0 . Неизвестными являются компоненты векторов перемещений и напряжений на границе L_2 . На фиг. 3 сплошными линиями представлены графики относительных погрешностей δ (кривая 1) и ϵ (кривая 2) при восстановлении компонент векторов перемещений и напряжений на границе L_2 при

$\psi_0 \in [\pi/8, \pi]$. При этом использовалась концепция постоянных граничных элементов, а одному элементу соответствует центральный угол с раствором $\psi = \pi/40$.

Серия расчетов по восстановлению упругих полей свидетельствует об относительно точном их определении в случае, когда длина участка L_1 в три и более раз превосходит длину участка L_2 ; точность восстановления падает при относительном увеличении длины участка L_2 .

Как видно из фиг. 4, на которой при $\psi_0 = 5\pi/8$ изображены графики функций $u_1|_{L_2}$ (кривые 1) и $u_3|_{L_2}$ (кривые 2), причем точками отмечены восстановленные значения, наибольшая погрешность в реализованной численной схеме возникает на концах линии L_2 ; внутри интервала погрешность восстановления поля не превосходит 12%. Всплески искомых величин на краях характерны для реализации метода регуляризации А.Н. Тихонова в классе суммируемых функций при решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами.

Представленные примеры восстановления упругих полей свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного численного алгоритма реконструкции.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96087, 00-01-00545).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: Państw. Wyd-wo nauk, 1973. 771 p. = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Бобровницкий Ю.И. Задача восстановления поля в структурной интенсивности: постановка, свойства, численные аспекты // Акуст. ж. 1994. Т. 40. Вып. 3. С. 367–376.
3. Karlsson S.E.S. Identification of external structural loads from measured harmonic responses // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 196. № 1. P. 59–74.
4. Pabst U., Hagedorn P. Identification of boundary conditions as a part of model correction // J. Sound and Vibrat. 1995. V. 182. № 4. P. 565–575.
5. Бобровницкий Ю.И., Коротков М.П., Кочкин А.А., Томилина Т.М. Постановка и решение задачи восстановления волнового поля в упругой конструкции // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 2. С. 190–193.
6. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
7. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wroubel L.C. Boundary Element Techniques. Berlin, etc.: Springer, 1984. = Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
8. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
9. Ватульян А.О., Шамшин В.М. Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 462–469.
10. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. К формулировке граничных интегральных уравнений в динамических задачах анизотропной теории упругости // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. Ростов н/Д. Изд-во Донск. ун-та, 1997. Вып. 2. С. 30–35.
11. Ватульян А.О., Садчиков Е.В. О новой формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях анизотропных тел // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 78–84.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
13. Ландис Е.М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. № 1. С. 3–62.