

УДК 532.5

© 2000 г. Х.В. Оганесян, А.М. Тер-Крикоров

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ВИХРЕВОЙ НИТЬЮ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ

Показано, что стационарное решение точного нелинейного уравнения движения идеального равномерно стратифицированного газа, порождаемое вихревой нитью, неустойчиво, и исследован характер этой медленно развивающейся неустойчивости.

1. Постановка задачи. Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + W + u \right) + \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$w = \frac{g}{N^2} W, \quad Nt = \tau, \quad u = -\frac{N^2}{g^2} \int_{+\infty}^r \frac{v_\theta^2(x)}{x} dx \quad (1.2)$$

описывающее внутренние волны в идеальном газе, заполняющем трехмерное пространство, было выведено [1] для случая, когда движение обладает осевой симметрией, газ стратифицирован экспоненциально, изменения скорости звука в жидких частицах малы по сравнению со скоростью звука. Это позволяет брать уравнение сохранения массы в том же виде, как и для несжимаемой жидкости, что эквивалентно пренебрежению акустическими колебаниями по сравнению с колебаниями плавучести. В (1.2) переменная w задает отклонение по вертикали жидких частиц от положения равновесия, g – ускорение силы тяжести, N – частота Брента–Вайсяля для идеального газа, t – время, r – расстояние частицы от оси симметрии, произвольная функция $v_\theta(r)$ задает распределение окружных скоростей. Для случая вихревой нити $v_\theta(r) = \Gamma/(2\pi r)$, где Γ – циркуляция скорости по простому контуру, охватывающему вихревую нить, и в силу (1.2) $u = N^2 \Gamma^2 / (8\pi^2 r^2)$.

Уравнение (1.1) имеет стационарное решение $W = -u$. Было показано [1], что стационарное решение линейно неустойчиво. Ниже предпринята попытка исследования устойчивости стационарного решения в нелинейной постановке.

Зададим произвольные начальные возмущения

$$W(\tau, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u^k, \quad \frac{\partial W(\tau, 0)}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^k \quad (1.3)$$

Полагая в уравнении (1.1) и (1.2) $W = -u + e^u \omega$, сводим исходную задачу к задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial u} (L\omega) + \omega + e^u \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} + \omega \right) (L\omega - \omega) = 0, \quad L\omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} + \omega \quad (1.4)$$

$$\omega(u, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u^k, \quad \frac{\partial \omega(u, 0)}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) u^k$$

2. Решение нелинейной задачи. Структура полученного ранее [1] точного решения линеаризированной задачи Коши (1.4) наводит на идею разыскания решения нелинейной задачи Коши (1.4) в виде ряда

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \omega_n(\tau, z), \quad z = \sqrt{2u\tau}, \quad \omega_0 = 0 \quad (2.1)$$

Подставляя разложение (2.1) в уравнения (1.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u , получаем бесконечную рекуррентную систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z}(z^{2k+2}(L\omega_{k+1} + P_{k+1}(\omega_k, \omega_{k-1}))) + 2z^{2k+1}\omega_k + 2z^{2k+1}S_k(\omega_1, \dots, \omega_k) = 0 \quad (2.2)$$

где

$$P_k(\omega_{k-1}, \omega_{k-2}) = \frac{2}{z} \frac{\partial^2 \omega_{k-1}}{\partial \tau \partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 \omega_{k-2}}{\partial z^2} - \frac{1}{z^3} \frac{\partial \omega_{k-2}}{\partial z}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n R_{n-k}(L\omega_k - \omega_k P_k)$$

$$Q_k(\omega_k, \omega_{k+1}) = \frac{1}{2z^{2k+1}} \frac{\partial}{\partial z}(z^{2k+2}\omega_{k+1}(\tau, z)) + \omega_k$$

$$R_k(\omega_1, \dots, \omega_{k+1}) = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k-m}}{(k-m)!} Q_m(\omega_m, \omega_{m+1}) u^m$$

Начальные условия в силу (1.4) таковы:

$$\omega_k(0) = \alpha_k, \quad \partial \omega_k(0) / \partial t = \beta_k - \alpha_k \quad (2.3)$$

Первые два уравнения (2.2) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z}(z^2 L\omega_1) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z^4 L\omega_2 + 2z^3 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \tau \partial z} \right) + 2z^3 \omega_1 + z^2 \frac{\partial}{\partial z}(z^2 \omega_1)(L\omega_1 - \omega_1) = 0 \quad (2.5)$$

Поскольку $z^2 = u\tau$, $u\omega_1 = 2c/\tau$, то ограниченное решение уравнения (2.4) получим в виде

$$\omega_1 = \frac{a'(z)}{z^3} \cos \tau + \frac{b'(z)}{z^3} \sin \tau \quad (2.6)$$

где $a(z)$, $b(z)$ – произвольные функции.

Так же, как и уравнение (2.4), уравнение (2.5) приводится к виду

$$z^4 L\omega_2 + 2z^3 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \tau \partial z} + 2a(z) \cos \tau + 2b(z) \sin \tau - \frac{1}{2}(z^2 \omega_1^2) = 0 \quad (2.7)$$

Для того чтобы не возникало вековых членов, коэффициенты при косинусе и синусе должны обратиться в нуль, и поэтому неизвестные функции должны удовлетворять системе уравнений

$$a'' - \frac{3a'}{z} - b = 0, \quad b'' - \frac{3b'}{z} + a = 0$$

Функция $F(z) = (b + ai)z^{-2}$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$z^2 F'' + zF' - (iz^2 + 4) = 0$$

и поэтому функции $a(z)$, $b(z)$ выражаются через функции Кельвина [2]

$$a(z) = Az^2 \operatorname{bei}_2 z + Bz^2 \operatorname{ber}_2 z, \quad b(z) = Az^2 \operatorname{ber}_2 z - Bz^2 \operatorname{bei}_2 z$$

$$\omega_1(t, z) = a'(z)z^{-3} + b'(z)z^{-3}$$

Воспользовавшись разложением функций Кельвина в степенные ряды, получаем из (2.6) при малых значениях $z^2 = ut$, после использования начальных условий

$$\omega_1 = \left(-\alpha_1 \left(-1 + \frac{z^4}{384} + \dots \right) + (\beta_1 - \alpha_1) \left(\frac{z^2}{16} - \frac{z^6}{18432} + \dots \right) \right) \cos \tau +$$

$$+ \left(-\alpha_1 \left(\frac{z^2}{16} - \frac{z^6}{18432} + \dots \right) - (\beta_1 - \alpha_1) \left(-1 + \frac{z^4}{384} + \dots \right) \right) \sin \tau$$

При помощи асимптотических выражений для функций Кельвина при больших значениях аргумента найдем

$$\omega_1(t, z) \approx \frac{e^{z/\sqrt{2}}}{2z\sqrt{\pi z}} \left(A \cos \tau \sin \left(\frac{z}{2} + \frac{9\pi}{8} \right) + B \sin \tau \cos \left(\frac{z}{2} + \frac{9\pi}{8} \right) \right)$$

$$z = \sqrt{2uNt}, \quad ut \rightarrow +\infty$$

Из этой формулы следует, что при $ut \rightarrow +\infty$ решение стремится к бесконечности. Поэтому, на больших временах колебания становятся неограниченными. Однако при ограниченных значениях $z^2 = ut$ колебания будут ограниченными.

Найдем функцию $\omega_2(z)$. Из уравнения (2.7) получаем

$$\omega_2(z) = \frac{a'^2 + b'^2}{z^5} + \frac{a'^2 - b'^2}{3z^5} \cos 2\tau + \frac{2a'b'}{3z^5} \sin 2\tau + a_2(z) \cos \tau + b_2(z) \sin \tau$$

Неизвестные функции $a_2(z)$, $b_2(z)$ определяются из условий разрешимости уравнений третьего приближения. Таким образом, и в нелинейной постановке состояние равновесия неустойчиво, но эта неустойчивость развивается медленно.

Поскольку функции ω_n растут экспоненциально при $z \rightarrow +\infty$, то ряд (2.1), вероятно, будет сходиться, когда величина u , определенная равенством (1.2), достаточно мала, а величина z , определенная равенством (2.1), имеет порядок единицы.

Можно предположить, что неустойчивость стационарного решения связана с тем, что вихревая нить рассматривается в неограниченном пространстве. Представляет интерес исследование устойчивости для случая среды, ограниченной одной или двумя жесткими горизонтальными плоскостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оганесян Х.В., Тер-Крикоров А.М. Неустойчивость стационарных течений, генерируемых вихревой нитью в стратифицированном газе // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 467–469.
2. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, graphs and Mathematical Tables / *Ens. M. Abramovitz and I. Stegun*. Washington: Gov. Print. Off., 1964. = Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стинган. М.: Наука, 1977. 830 с.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
5.VII.1999