

УДК 539.375

© 2000 г. Г.Я. Попов

ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО КОНУСА, ОСЛАБЛЕННОГО ТРЕЩИНАМИ

С помощью метода разрывных решений задача о напряженном состоянии упругого конуса, ослабленного трещинами, сводится к системе одномерных интегродифференциальных уравнений, заданных на участках конических поверхностей, где расположены трещины. Таких поверхностей и участков может быть произвольное количество. Предлагаемая схема реализована на примере задачи о кручении конуса, ослабленного полубесконечной конической трещиной, под действием произвольной нагрузки (включая приложение центра вращения у острия конуса). Получено точное решение этой задачи и дана формула для коэффициента интенсивности напряжений. Поскольку решение задачи о напряженном состоянии конуса без трещин при действии центра вращения в литературе отсутствует, дается решение и этой задачи, с помощью полученного здесь же нового интегрального преобразования. Оно также может быть использовано для решения задач о напряженном состоянии усеченных по сферическим поверхностям конусов. Из решенной задачи о напряженном состоянии конуса, загруженного центром вращения у острия, следует, что при таком нагружении напряжение $\tau_{\theta\varphi}$ всюду равно нулю внутри конуса, и потому коническая трещина не ослабляет конус.

1. Постановка задачи и сведение ее к системе одномерных интегродифференциальных уравнений. Упругий (μ – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига) круговой конус ($0 < r < \infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $0 < \theta < \omega$) загружен произвольной статической нагрузкой по поверхности $\theta = \omega$, т.е. ($\tau_{\theta r} \equiv \tau_r$, $\tau_{\theta\varphi} \equiv \tau_\varphi$)

$$\|\sigma_\theta(r, \omega, \varphi), \tau_r(r, \omega, \varphi), \tau_\varphi(r, \omega, \varphi)\| = \|f_1(r, \varphi), f_2(r, \varphi), f_3(r, \varphi)\| \quad (1.1)$$

в том числе и сосредоточенными воздействиями у острия конуса. Компоненты полей смещений и напряжений в конусе от этих воздействий считаем известными и будем их помечать нулевым верхним индексом. Внутри конуса по поверхностям $\theta = \omega_j$, $a_j \leq r \leq b_j$, $\omega_j < \omega$ ($j = 1, 2, \dots, N$) имеются трещины, берега которых $\theta = \omega_j - 0$ и $\theta = \omega_j + 0$ предполагаются незагруженными. Требуется определить распределение напряжений в упругом конусе и дать формулы для коэффициента интенсивности напряжений.

Как и ранее [1], вместо смещений u_r, u_θ, u_φ введем функции

$$u(r, \theta, \varphi) = ru_r, \quad v(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta u_\theta, \quad w(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta u_\varphi \quad (1.2)$$

и их трансформанты Фурье

$$\|u_n(r, \theta), v_n(r, \theta), w_n(r, \theta)\| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\|u(r, \theta, \varphi), v(r, \theta, \varphi), w(r, \theta, \varphi)\|}{2\pi \exp(in\varphi)} d\varphi \quad (1.3)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

а в качестве основных неизвестных примем $u(r, \theta, \varphi), \Theta(r, \theta, \varphi), \Omega(r, \theta, \varphi)$ или

$u_n(r, \theta), \Theta_n(r, \theta), \Omega_n(r, \theta)$, через которые напряжения выражаются по формулам

$$\begin{aligned} (2G)^{-1} \sigma_{\theta n} &= \mu_0 \Theta_n - r^{-2} u_n' - r^{-2} \sin^{-2} \theta [\nu_n \sin \theta + i n w_n \sin \theta] \\ \mu_0 &= (1 - \mu)(1 - 2\mu)^{-1} \\ \tau_{rn} &= G \left[r \operatorname{cosec} \theta (r^{-2} \nu_n)' + r^{-2} u_n^* \right] \\ G^{-1} r \tau_{\varphi n} &= \Omega_n + 2r^{-1} \sin^{-2} \theta [i n \nu_n - w_n \cos \theta] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Функции ν_n и w_n должны быть взяты по формулам (3.6) или (3.7) из [1]. Здесь и ниже штрих означает производную по r (первой переменной), а точка – по θ (второй переменной).

Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию функций $u_n(r, \theta), \Theta_n(r, \theta), \Omega_n(r, \theta)$. Их будем разыскивать в виде

$$\|u_n, \Theta_n, \Omega_n\| = \left\| u_n^0 + \sum_{j=0}^N {}_j u_n, \Theta_n^0 + \sum_{j=0}^N {}_j \Theta_n, \Omega_n^0 + \sum_{j=0}^N {}_j \Omega_n \right\| \quad (1.5)$$

Здесь $u_n^0, \Theta_n^0, \Omega_n^0$ – известные функции, определяющие поле напряжений и смещений в рассматриваемом конусе без трещин (в том числе и от сосредоточенных воздействий у его острия), а для ${}_j u_n, {}_j \Theta_n, {}_j \Omega_n$ ($j = 1, 2, \dots, N$), определяющих разрывное решение уравнений Ламе для конического дефекта (трещины), расположенного на поверхности $\theta = \omega_j$, можно воспользоваться формулами (2.4)–(2.6) из [1], снабдив их передними индексами j , приняв $\omega = \omega_j$ и заменив отрезок интегрирования $[0, R]$ на $[a_j, b_j]$. Для скачков указанных функций и их нормальных (к дефекту) производных сохраняют силу формулы¹ (3.4) и (3.5) из [1], в которых следует положить $\langle \tau_{rn} \rangle = \langle \sigma_{\theta n} \rangle = \langle \tau_{\varphi n} \rangle = 0$ и принять $\omega = \omega_j$. Функции же ${}_j \nu_n(r, \theta)$ и ${}_j w_n(r, \theta)$, соответствующие этим разрывным решениям, получим по формулам (3.6) и (3.7) из [1] с аналогичной модификацией.

При написании формул (1.5) использована идея трактовать границу конуса $\theta = \omega = \omega_0$ как дополнительный дефект (трещину), что позволяет считать слагаемые ${}_0 u_n, {}_0 \Theta_n, {}_0 \Omega_n$ разрывным решением уравнений Ламе для этого дефекта, причем $a_0 = 0, b_0 = \infty$. Если полагать, что берега этого дефекта (трещины) одинаково загружены, то скачки напряжений будут равны нулю, как и для заданных трещин, а скачки для основных функций, определяющих поле напряжений и смещений, будут определяться теми же формулами, что и для трещин, но в которых следует положить $j = 0$.

Как видим, поставленная задача будет решена, если будут найдены трансформанты скачков смещений, т.е. $\langle {}_j u_n \rangle, \langle {}_j \nu_n \rangle, \langle {}_j w_n \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Уравнения для их определения получим, реализовав условие отсутствия напряжений на берегах трещины, а также граничные условия (1.1), записанные в трансформантах Фурье, т.е. (δ_{jk} – символ Кронекера)

$$\sigma_{\theta n}(r, \omega_l - 0) = \delta_{l0} f_{1n}(r), \quad \tau_{rn}(r, \omega_l - 0) = \delta_{l0} f_{2n}(r), \quad \tau_{\varphi n}(r, \omega_l - 0) = \delta_{l0} f_{3n}(r) \quad (1.6)$$

$$a_l \leq r \leq b_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N$$

С целью избежать излишней громоздкости, реализацию указанных условий выполним для осесимметричного случая, т.е. когда $n = 0$. В этом случае реализация, например, третьего условия из (1.6) приводит к следующей системе интегродиф-

¹ В формуле (2.4) из [1] в первом слагаемом правой части должно быть $\langle \Theta_n^* \rangle$, а не $\langle \Theta_n \rangle$. Такое же исправление должно быть внесено в последнее слагаемое в формуле (2.5); кроме того, вместо (n) должно быть $|n|$. В формуле (3.3) из [1] после $\langle u_n \rangle$ следует знак плюс (он пропущен).

ференциальных уравнений (ИДУ):

$$\begin{aligned}
& \langle_l w_0 \rangle \operatorname{tg} \omega - \int_{a_l}^{b_l} \left[\rho \langle_l w_0 \rangle'' \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \theta, \omega_l \right) \sin \omega_l + 2 \cos \omega_l \langle_l w_0 \rangle \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial}{\partial \omega_l} \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \theta, \omega_l \right) \right]_{\theta=\omega_l} \frac{d\rho}{\rho} - \sum_{j=0}^N * \sin \omega_l \int_{a_j}^{b_j} \left[\rho \langle_j w_0 \rangle'' \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \theta, \omega_j \right) + \right. \\
& + 2 \operatorname{ctg} \omega_j \langle_j w_0 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega_j} \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \theta, \omega_j \right) \left. \right]_{\theta=\omega_l} \frac{d\rho}{\rho} + 2 \operatorname{ctg} \omega_l \int_0^{\omega_l} \sum_{j=0}^N \int_{a_j}^{b_j} \left[\rho \langle_j w_0 \rangle'' \times \right. \\
& \times \left. \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \tau, \omega_j \right) + 2 \operatorname{ctg} \omega_j \langle_j w_0 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega_j} \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \tau, \omega_j \right) \right] \sin \tau d\tau = \\
& = \frac{r \sin \omega_l}{G} [\delta_{l0} f_{30}(r) - \tau_{\theta\varphi}^0(r, \omega_l)], \quad a_l \leq r \leq b_l, \quad l = 0, 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Звездочка у знака суммы означает, что слагаемое при $j = l$ исключается.

Аналогичную систему получим после реализации первого и второго условия и (1.6), причем она оказывается совместной относительно скачков $\langle_l \nu_0 \rangle$ и $\langle_l \mu_0 \rangle$ ($l = 0, 1, \dots, N$).

Таким образом, задача распадается на задачу о кручении конуса, которая сводится к системе ИДУ (1.7) относительно скачков $\langle_l w_0 \rangle$, и задачу об осесимметричной деформации этого конуса, сводящуюся к аналогичной системе ИДУ относительно скачков $\langle_l \nu_0 \rangle$ и $\langle_l \mu_0 \rangle$, причем в правой части этой системы будут содержаться вместо $\tau_{\theta\varphi}^0(r, \omega_l)$ напряжения $\sigma_{\theta}^0(r, \omega_l)$ и $\tau_{\theta\varphi}^0(r, \omega_l)$ от сосредоточенного воздействия у острия конуса. Таковым в данном случае может быть только сила, действующая вдоль оси конуса.

Решение этой задачи было получено Мичелем (см. [2,3]). В случае же кручения сосредоточенным воздействием у острия конуса может быть только центр вращения, и значение $\tau_{\theta\varphi}^0(r, \omega_l)$ должно быть взято из решения соответствующей задачи. Поскольку решение такой задачи в литературе отсутствует, займемся ее решением. Попытка идти тем же путем, что и Мичель (см. [2,3]), до цели не привела, и поэтому была использована идея [4] заменить рассматриваемый конус на усеченный конус ($\varepsilon \leq r < \infty$), загрузить его по сферической поверхности $r = \varepsilon$ подходящей нагрузкой и затем устремить ε к нулю. Реализация этой идеи потребовала решить вопрос о разложении произвольной функции на отрезке $[\delta, \omega]$ по собственным функциям регулярной [5] краевой задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned}
& T''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta T'(\theta) - [\lambda + \frac{1}{4} + m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta] T(\theta) = 0, \quad \delta < \theta < \omega \\
& [T'(\theta) - \operatorname{ctg} \theta T(\theta)]_{\theta=\delta, \omega} = 0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

из которой следует перейти к нужному здесь случаю $\delta = 0$ (нерегулярному случаю) предельным переходом.

Займемся решением этого вопроса, тем более, что указанное разложение необходимо при решении и более сложных краевых задач для усеченного конуса.

2. Проблема разложения произвольной непрерывной функции по ортогональным функциям конуса. Решениями дифференциального уравнения в (1.8) являются функции конуса [6]

$$T(\theta) = P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}^m(\cos \theta), \quad Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}^m(\cos \theta)$$

Приведем задачу Штурма – Лиувилля заменой $y(\theta) = \sqrt{\sin \theta} T(\theta)$ к виду [5]

$$\begin{aligned} y''(\theta) - \{\lambda + q(\theta)\}y(\theta) &= 0, \quad \delta < \theta < \omega \quad (q(\theta) \sin^2 \theta = m^2 - 1/4) \\ y(\delta) \cos \alpha + y'(\delta) \sin \alpha &= 0, \quad y(\omega) \cos \beta + y'(\omega) \sin \beta = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \sin(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\Omega_\delta} \sin(\delta, \omega), \quad \cos(\alpha, \beta) = -\frac{3}{2\Omega_\omega} \cos(\delta, \omega) \\ \Omega_\delta^2 &= \sin^2 \delta + \frac{9}{4} \cos^2 \delta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следуя известной схеме [5], отправляемся от функций

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta, \lambda) &= \sqrt{\sin \theta} P_v^m(\cos \theta), \quad \chi_0(\theta, \lambda) = \sqrt{\sin \theta} Q_v^m(\cos \theta) \\ v &= -1/2 + i\sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad (2.3)$$

и подсчитываем их Вронскиан, учитывая формулу 3.4 (25) из [6]. Получим

$$\begin{aligned} W(\varphi_0, \chi_0) &= \omega_0 = -\Gamma_m(v), \quad \Gamma_m(v) = 2^{2m} (m+v) \Gamma[(m+v)/2] \times \\ &\times \Gamma[1/2 + (m+v)/2] \{ (v-m) \Gamma[(v-m)/2] \Gamma[1/2 + (v-m)/2] \}^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее строим функции

$$-\Omega_\delta^{(m)} \left\| \begin{matrix} \varphi(\theta, \lambda) \\ \chi(\theta, \lambda) \end{matrix} \right\| = \sqrt{\sin \theta} \left\| \begin{matrix} \sqrt{\sin \delta} F_v^m(\theta, \delta) \\ \sqrt{\sin \omega} F_v^m(\theta, \omega) \end{matrix} \right\|, \quad \Omega_\delta^{(m)} = \Gamma_m(v) \Omega_\delta \quad (2.5)$$

$$F_v^m(\theta, \gamma) = P_v^m(\cos \theta) l_\gamma Q_v^m - Q_v^m(\cos \theta) l_\gamma P_v^m, \quad l_\gamma = \sin \gamma \frac{d}{d\gamma} - \cos \gamma$$

и их производные

$$-\Omega_\delta^{(m)} \left\| \begin{matrix} \varphi'(\theta, \lambda) \\ \chi'(\theta, \lambda) \end{matrix} \right\| = \sqrt{\sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} \left\| \begin{matrix} \sqrt{\sin \delta} F_v^m(\theta, \delta) \\ \sqrt{\sin \omega} F_v^m(\theta, \omega) \end{matrix} \right\| + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \left\| \begin{matrix} \sqrt{\sin \delta} F_v^m(\theta, \delta) \\ \sqrt{\sin \omega} F_v^m(\theta, \omega) \end{matrix} \right\| \right\}$$

Вронскиан записанных функций оказывается равным

$$W(\varphi, \chi) = \omega(\lambda) = -\sqrt{\sin \delta \sin \omega} \left[\Omega_\delta^{(m)} \Omega_\omega \right]^{-1} \Delta_v^{(m)} \quad (2.6)$$

$$\Delta_v^{(m)} = l_\delta P_v^m l_\omega Q_v^m - l_\delta Q_v^m l_\omega P_v^m$$

Тем самым функция $\Phi(\theta, \lambda)$ построена.

Пусть λ_k – собственные числа задачи (2.1). Они должны находиться из уравнения

$$\Delta_{v_k}^{(m)} \equiv l_\delta P_{v_k}^m l_\omega Q_{v_k}^m - l_\delta Q_{v_k}^m l_\omega P_{v_k}^m = 0, \quad v_k = -1/2 + i\sqrt{\lambda_k} \quad (2.7)$$

из которого следует равенство

$$l_\delta P_{v_k}^m \left[l_\omega P_{v_k}^m \right]^{-1} = l_\delta Q_{v_k}^m \left[l_\omega Q_{v_k}^m \right]^{-1} \quad (2.8)$$

Согласно используемой схеме [5] для получения требуемого разложения осталось подсчитать вычет функции $\Phi(\theta, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$ и найти величину K_k , которая

оказывается равной

$$K_k = \frac{\chi(\theta, \lambda_k)}{\varphi(\theta, \lambda_k)} = \frac{\sqrt{\sin \omega} \Omega_\delta l_\omega P_{v_k}^m}{\sqrt{\sin \delta} \Omega_\omega l_\delta P_{v_k}^m} \quad (2.9)$$

Если учесть, что

$$\frac{d\omega(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \frac{d\omega}{dv} = -\frac{1}{2v+1} \frac{d\omega}{dv} \quad (2.10)$$

то искомое разложение получим [5] в виде

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_\delta Q_{v_k}^m \sqrt{\sin \theta} F_{v_k}^m(\theta, \omega) (2v_k + 1)}{l_\omega Q_{v_k}^m \Gamma_m(v_k) \Delta_{mk}} \int_{\delta}^{\omega} F_{v_k}^m(\theta', \omega) \sqrt{\sin \theta'} f(\theta') d\theta' \quad (2.11)$$

$$\Delta_{mk} = \partial \Delta_v^m / \partial v \Big|_{v=v_k}$$

В полученном разложении совершим предельный переход $\delta \rightarrow 0$. Если при этом учесть асимптотику функций Лежандра в окрестности единицы, то в уравнении (2.7) основной вклад при $\delta \rightarrow 0$ будет вносить второе слагаемое, и поэтому в пределе уравнение (2.7) переходит в такое:

$$l_\omega P_{v_k}^m = (v_k - m + 1) P_{v_k+1}^m(\cos \omega) - (v_k + 2) \cos \omega P_{v_k}^m(\cos \omega) = 0 \quad (2.12)$$

Первое равенство следует из формулы 3.8 (19) руководства [6]. На том же основании после дифференцирования выражения (2.7) по v (или v_k) основной вклад будет вносить слагаемое вида

$$-l_\delta Q_{v_k} \Delta_{mk}(\omega), \quad \Delta_{mk}(\omega) = l_\omega \partial P_v^m / \partial v \Big|_{v=v_k} \quad (2.13)$$

и потому при $\delta \rightarrow 0$ в (2.11) Δ_{mk} можно заменить на величину из (2.13). Если затем учесть, что при $\delta \rightarrow 0$ $F_{v_k}^m(\theta, \omega)$ переходит в $l_\omega Q_{v_k}^m P_{v_k}^m(\cos \theta)$, то разложение (2.11) переходит в следующее:

$$f(\theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{mk}(\omega) \sqrt{\sin \theta} P_{v_k}^m(\cos \theta) \int_0^{\omega} \sqrt{\sin \theta'} P_{v_k}^m(\cos \theta') f(\theta') d\theta' \quad (2.14)$$

$$\sigma_{mk}(\omega) = (2v_k + 1) l_\omega Q_{v_k}^m [\Delta_{mk}(\omega) \Gamma_m(v_k)]^{-1}; \quad 0 \leq \theta \leq \omega$$

причем значения v_k должны находиться из трансцендентного уравнения (2.12).

Дадим асимптотическое решение этого уравнения для больших значений v_k , воспользовавшись асимптотической формулой 3.9.1 (2) из [6], оставив в ней только главный член. В результате вместо (2.12) будем иметь

$$\operatorname{tg} A = (m^2 + 2 + 3v_k / 2) [m^2 + (v_k + 1)^2]^{-1} \operatorname{ctg} \omega \quad (2.15)$$

$$A = (v_k + 1/2)\omega - \pi / 4 + m\pi / 2$$

Далее выявляем, что

$$\operatorname{tg} A = \begin{cases} \operatorname{tg}[(v_k + 1/2)\omega - \pi / 4], & m = 2j \\ -\operatorname{ctg}[(v_k + 1/2)\omega - \pi / 4], & m = 2j + 1; \quad j = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (2.16)$$

Рассмотрим случай $m = 2j + 1$. Подставив выражение (2.16) в (2.15) и учтя, что при $v_k \rightarrow \infty$ правая часть равенства (2.15) стремится к $a_k = 3(2v_k)^{-1} \operatorname{ctg} \omega$, после очевидных

преобразований с тригонометрическими функциями приходим к уравнению

$$\operatorname{tg}[(v_k + \frac{1}{2})\omega] = -(1 + a_k)(1 - a_k)^{-1}$$

Его правая часть при $v_k \rightarrow \infty$ стремится к минус единице. Отсюда для искомых v_k получаем асимптотическую формулу

$$v_k = -\frac{1}{2} - (-\pi/4 \pm k\pi)\omega^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогичную формулу с помощью тех же преобразований можно вывести и для $m = 2j$. Полученная формула справедлива только для больших значений k . Важно отметить, что $v_0 = 1$ для любого $m > 2$ и $m = 1$. Это непосредственно следует из (2.12), если учесть, что [6]

$$P_n^m(z) = 0, \quad m > n \quad (2.17)$$

а для случая $m = 1$ следует дополнительно учесть формулы 8.813 из [7].

Если формулу (2.14) использовать для разложения функции $f(\theta) = (\sin \theta)^{-1/2} g(\theta)$, введя для функции $g(\theta)$ ее трансформанту

$$\int_0^\infty \sin \theta P_{v_k}^m(\cos \theta) g(\theta) d\theta = g_k \quad (2.18)$$

то формулу (2.14) можно записать в виде формулы обращения для этой трансформанты

$$g(\theta) = - \sum_{k=0}^\infty \sigma_{mk}(\omega) g_k P_{v_k}^m(\cos \theta) \quad (2.19)$$

Рассмотрим случай $\omega = \pi/2$. В этом случае трансцендентное уравнение (2.12) допускает явное решение $v_k = 2k - m$ (при учете формулы 3.4 (20) из [6]), и формулы (2.18) и (2.19) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \theta P_{2k-m}^m(\cos \theta) g(\theta) d\theta &= g_k \\ g(\theta) &= - \sum_{k=m}^\infty \sigma_{mk}^* P_{2k-m}^m(\cos \theta) g_k \\ \sigma_{mk}^* &= \frac{(4k - 2m + 1)\Gamma(1 + k - m)\Gamma(\frac{1}{2} + k - m)}{2^{2m} k! \Gamma(\frac{1}{2} + k)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Наличие формул (2.18)–(2.20) позволяет решить не только проблему о загрузке конуса центром вращения у острия, но и более сложные краевые задачи для усеченных конусов.

3. Задача о загрузке конуса центром вращения у острия. Как указывалось в конце разд. 1, предварительно решим такую задачу. Усеченный конус $\varepsilon \leq r < \infty$ загружен по сферической поверхности (торец конуса) крутильной нагрузкой, т.е.

$$\tau_{r\varphi}|_{r=\varepsilon} = A \sin \theta, \quad A \equiv \text{const}, \quad 0 < \theta < \omega \quad (3.1)$$

Крутящий момент, создаваемый этой нагрузкой, будет определяться формулой (ср. [8])

$$M = 2\pi\varepsilon^2 \int_0^\omega A \sin^3 \theta d\theta = 4\pi\varepsilon^2 A A_\omega \quad (3.2)$$

$$A_\omega = \sin^2 \frac{\omega}{2} \left[1 - \frac{1}{3} (\cos^2 \omega + \cos \omega + 1) \right]$$

Требуется определить смещения и напряжения в усеченном конусе.

Уравнение кручения конуса имеет вид [2, 3]

$$(r^2 u'_\varphi)' + u''_\varphi + \operatorname{ctg} \theta u'_\varphi - \operatorname{cosec}^2 \theta u_\varphi = 0, \quad \varepsilon \leq r < \infty, \quad 0 < \theta < \omega \quad (3.3)$$

Через его решение напряжения выражаются по формулам

$$\tau_{r\varphi} = Gr(r^{-1} u_\varphi)', \quad r \sin \theta \tau_{\theta\varphi} = Gl_\theta u_\varphi \quad (3.4)$$

Оператор l_θ определен в (2.5).

Если считать, что боковая поверхность конуса не загружена, то рассматриваемая задача сводится к решению уравнения (3.3) с краевыми условиями

$$[r(r^{-1} u_\varphi)']_{r=\varepsilon} = AG^{-1} \sin \theta, \quad 0 < \theta < \omega \quad (3.5)$$

$$l_\omega u_\varphi = 0, \quad \varepsilon \leq r < \infty$$

Для решения краевой задачи (3.3), (3.5) применим интегральное преобразование (2.18), положив там $m = 1$. Выполнив стандартную схему метода интегральных преобразований, найдем решение поставленной задачи в виде

$$u_\varphi(r, \theta) = -\frac{A\varepsilon^2}{Gr} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k \sigma_{1k}(\omega)}{2 + \nu_k} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\nu_k} P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \quad (3.6)$$

$$\gamma_k = \int_0^\omega \sin^2 \theta P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta$$

Теперь будем совершать предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, одновременно увеличивая число A так (ср. [4]), чтобы крутящий момент (3.2) оставался неизменным и равным моменту центра вращения M , т.е. нужно, чтобы

$$4\pi A\varepsilon^2 = MA_\omega^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

Если при этом учесть, что $\nu_0 = 1$, $P_{\nu_0}^1(\cos \theta) = -\sin \theta$, $\nu_k > \nu_0$, $\gamma_0 = 2A_\omega$, то получаем

$$Gu_\varphi(r, \theta) = \frac{M}{6\pi r^2} \sigma_{10}^*(\omega) \sin \theta \quad (3.8)$$

При этом напряжения оказываются такими:

$$\tau_{r\varphi}(r, \theta) = -\frac{M}{2\pi r^3} \sigma_{10}(\omega) \sin \theta, \quad \tau_{\theta\varphi}(r, \theta) \equiv 0 \quad (3.9)$$

Как видим, при действии центра вращения у острия конуса $0 < r < \infty$, $|\varphi| \leq \pi$, $0 < \theta < \omega$ напряжения $\tau_{\theta\varphi}^0$ обращаются в нуль не только на боковой поверхности ($\theta = \omega$), но и на любой конической поверхности внутри конуса, т.е. разрез конуса по такой поверхности не ослабляет конуса.

В частном случае $\omega = \pi/2$ формулы (3.8) и (3.9) приобретают вид

$$u_\varphi(r, \theta) = \frac{M}{\pi r^2} \sin \theta, \quad \tau_{r\varphi}(r, \theta) = -3 \frac{M}{\pi r^3} \sin \theta, \quad \tau_{\theta\varphi} = 0 \quad (3.10)$$

4. Точное решение задачи о кручении конуса, ослабленного бесконечным коническим разрезом. Согласно изложенному в разд. 1 и 3 эта задача, в том числе и в случае наличия у острия центра вращения, сводится к системе из двух ($l = 0, 1$) уравнений (1.7), в которых следует положить

$$N = 1, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = \infty, \quad a_1 = R, \quad b_1 = \infty, \quad \tau_{\theta\varphi}^0(r, \omega_j) = 0, \quad j = 0, 1$$

и ввести следующие обозначения для неизвестных функций:

$$\langle_j w_0(r, \omega_j) \rangle = \chi_j(r), \quad j = 0, 1; \quad \text{supp } \chi_0(r) = [0, \infty], \quad \text{supp } \chi_1(r) = [R, \infty] \quad (4.1)$$

Затем следует совершить над полученными уравнениями преобразования, подобные проведенным ранее [1] при получении уравнения (4.9) из [1] и базирующиеся на двух важных соотношениях²

$$-\int_{a_j}^{b_j} \langle_j w_0 \rangle \Phi_0 \left(\frac{r}{\rho}, \omega_l, \omega_j \right) d\rho = r \frac{\partial}{\partial r} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\chi_j(\rho)}{\rho} \Phi_0^0 \left(\frac{r}{\rho}, \omega_l, \omega_j \right) d\rho \quad (4.2)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \Phi_k^1 \left(\frac{r}{\rho} \right) = \Phi_k \left(\frac{r}{\rho} \right), \quad \Phi_k^1(t) = \begin{cases} k^{-1} t^k, & t < 1 \\ -(k+1)^{-1} t^{-k-1}, & t > 1 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

где

$$\Phi_0^0(t, \theta, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(\cos \theta) P_k(\cos \omega)}{2} \Phi_k^0(t) \quad (4.3)$$

$$\Phi_k^0(t) = \begin{cases} -(k+1)t^k, & t < 1 \\ kt^{-k-1}, & t > 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Справедливость первого из соотношений (4.2) доказывается интегрированием по частям, а второго проверяется непосредственно. После выполнения указанных операций и замены $r = xR$, $\rho = \xi R$ приходим к системе уравнений

$$\text{ctg } \omega_0 \chi_0(Rx) + x \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\infty} k_{00} \left(\frac{x}{\xi} \right) \chi_0(R\xi) \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{\infty} k_{01} \left(\frac{x}{\xi} \right) \chi_1(R\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] = f(x) \quad (4.4)$$

$$\text{ctg } \omega_1 \chi_1(Rx) + x \frac{d}{dx} \left[\int_1^{\infty} k_{11} \left(\frac{x}{\xi} \right) \chi_1(R\xi) \frac{d\xi}{\xi} + \int_0^{\infty} k_{10} \left(\frac{x}{\xi} \right) \chi_0(R\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] = 0$$

$$0 \leq x < \infty, \quad R \leq x < \infty$$

Здесь

$$f(x) = G^{-1} \sin(\omega_0) R x f_{30}(Rx)$$

$$k_{jl} = \sin \omega_j k_{jl}^{(1)} - 2 \text{ctg } \omega_j k_{jl}^{(2)} - 2 \text{ctg } \omega_j k_{jl}^{(3)} + 4 \text{ctg } \omega_j k_{jl}^{(4)}; \quad j = 0, 1; \quad l = 0, 1 \quad (4.5)$$

$$\left\| \begin{matrix} k_{jl}^{(1)} \\ k_{jl}^{(2)} \end{matrix} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_k^0(t)}{2} \left\| \begin{matrix} P_k(\cos \omega_j) \\ J_{kj} \end{matrix} \right\| P_k(\cos \omega_l), \quad J_{kj} = \int_0^{\omega_j} P_k(\cos \tau) \sin \tau d\tau$$

$$\left\| \begin{matrix} k_{jl}^{(3)} \\ k_{jl}^{(4)} \end{matrix} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_k^1(t)}{2} P_k^1(\cos \omega_l) \left\| \begin{matrix} P_k(\cos \omega_j) \\ J_{kl} \end{matrix} \right\|, \quad j = 0, 1; \quad l = 0, 1$$

С целью применить к полученным уравнениям преобразования Меллина, доопределим второе уравнение из (4.4) на весь интервал $(0, \infty)$. Поскольку левая часть этого уравнения по построению есть функция $B_{\omega} x \tau_{\theta\varphi}(Rx, \omega_1)$, $B_{\omega} = \sin \omega_1 R G^{-1}$, которая на интервале $0 \leq x \leq 1$ неизвестна, то, подключив ее к правой части разбираемого уравнения, выполним нужное доопределение. После применения преобразования Мел-

² В соответствующих соотношениях в [1] допущены опечатки. Здесь они исправляются.

лина вместо (4.4) будем иметь

$$[\operatorname{ctg} \omega_0 - sK_{00}(s)]X^0(s) - sK_{01}(s)X^+(s) = F(s) \quad (4.6)$$

$$[\operatorname{ctg} \omega_1 - sK_{11}(s)]X^+(s) - sK_{10}(s)X^0(s) = T^-(s)$$

где

$$\begin{pmatrix} X^0(s) \\ F(s) \\ K_{jl}(s) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \chi_0(Rx) \\ f(x) \\ k_{jl}(x) \end{pmatrix} x^{s-1} dx, \quad X^+(s) = \int_1^\infty \chi_1(Rx) x^{s-1} dx \quad (4.7)$$

$$T^-(s) = B_\omega \int_0^1 x \tau_{\theta\varphi}(Rx, \omega_1) x^{s-1} dx$$

Индексами плюс (минус) помечены функции, аналитические соответственно в левой (правой) полуплоскости комплексного переменного s . Если найти $X^0(s)$ из первого уравнения (4.6) и подставить найденное значение во второе уравнение, придем к следующей краевой задаче Римана [9] (функциональному уравнению Винера – Хопфа [10]), заданной на мнимой оси:

$$K(s)X^+(s) = T^-(s) + H(s)F(s) \quad (4.8)$$

где

$$K(s) = \operatorname{ctg} \omega_1 - sK_{11}(s) - sK_{01}(s)H(s) \quad (4.9)$$

$$H(s) = K_{10}(s)[s^{-1} \operatorname{ctg} \omega_0 - K_{00}(s)]$$

Чтобы решить задачу Римана (4.8), требуется факторизовать [9, 10] функцию $K(s)$, а для этого нужно знать поведение ее при $s \rightarrow \infty$. Был предложен [1] способ выявления асимптотики для $K_{jj}^m(s)$ ($j = 0, 1$; $m = 1, 2, 3, 4$) при $s \rightarrow \infty$. В частности, было показано, что

$$2K_{jj}^{(1)}(s) = -\operatorname{ctg} \pi s + O(s^{-1}), \quad s \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

Однако это справедливо только в случае, когда s стремится к бесконечности, оставаясь на мнимой оси (впрочем, этого достаточно для правильности результатов полученных в [1]). Для уточнения асимптотики (4.10) следует просуммировать ряд

$$S^\omega(s) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{k+1-s} - \frac{1}{k+s} \right) \frac{\sin(2k+1)\omega}{2\pi} = S^0(s) - 2S^1(s) \quad (4.11)$$

$$S^0(s) = \frac{1}{2} \pi \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{\sin(2k+1)\omega}{k+s}, \quad S^1(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(2k+1)\omega}{k+s}$$

содержащийся в формуле (5.6) из [1]. Ряд $S^0(s)$ после замены $2k+1 = m$ суммируется с помощью формулы 5.4.3 (4) из [11] и принимает вид

$$S^0(s) = \sin[(\pi - \omega)(2s - 1)] \operatorname{cosec} \pi(2s - 1) \quad (4.12)$$

а ряд $S^1(s)$ согласно формуле 5.4.6 (1) из [11] принимает вид

$$S^1(s) = \frac{\sin \omega}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-st}(1 + e')}{\operatorname{ch} t - \cos 2\omega} dt \quad (4.13)$$

и согласно асимптотическому разложению трансформант Лапласа [12] ведет себя на бесконечности как s^{-1} . Принимая во внимание соотношения (4.11)–(4.13), получаем уточненную асимптотику

$$K_{jj}^1(s) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \pi s + \operatorname{cosec} \pi \zeta \sin(\pi - \omega_j) \zeta + O(s^{-1}), \quad \zeta = 2s - 1, \quad s \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

Можно убедиться, что дополнительное слагаемое в (4.14) по сравнению с (4.10) действительно убывает, причем экспоненциально при $s = i\sigma$, $\sigma \rightarrow \infty$.

Пользуясь теми же приемами, что и в [1], при учете преобразования, (4.11), можно убедиться, что все $K_{jj}^{(m)}(s)$ ($j = 0, 1$; $m = 1, 2, 3, 4$) – убывающие функции при $s \rightarrow \infty$, но в случае $m = 1$ они могут содержать ограниченные на бесконечности слагаемые, как и в (4.12), т.е. можно записать

$$K(s) = s[\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \pi s + o(1)], \quad |s| \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

причем под символ $o(1)$ попали слагаемые, которые экспоненциально убывают на бесконечности, если s стремится к бесконечности, оставаясь на мнимой оси, подобно дополнительному слагаемому в асимптотике (4.14) по сравнению с (4.10).

Таким образом, коэффициент задачи Римана (4.8) имеет ту же асимптотику, что и в [1], и потому для его факторизации можно применить тот же прием. Однако в данном случае более целесообразно использовать иной подход, базирующийся на том факте, что в задаче, решенной в [1], при $\omega = \pi/2$ (полупространство) нужно будет факторизовать функцию

$$\begin{aligned} -sK_{11}^1(s)|_{\omega_1=\pi/2} &= -s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k^2(0)}{2} \int \Phi_k^0(t) t^{s-1} dt = \\ &= -\frac{s(s-1)}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1/2)_j (1/2)_j}{(1)_j j!} \left[\frac{1}{j+s/2} + \frac{1}{j-(s-1)/2} \right] = L(s) \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$L(s) = L^+(s)L^-(s), \quad L^+(s) = \frac{\Gamma(3/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)}, \quad L^-(s) = \frac{\Gamma(1 + s/2)}{\Gamma(1/2 + s/2)} \quad (4.17)$$

Последнее равенство в (4.16) следует из формулы 1.4 (3) справочника [6].

Таким образом, в данном случае факторизация проводится автоматически, что впервые было замечено [13] из других соображений.

Используя свойства гамма-функции [6], из (4.17) выявляем асимптотику

$$2L(s) = s \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \quad s \rightarrow \infty \quad (4.18)$$

Это позволяет выполнить факторизацию коэффициента задачи Римана по формуле

$$K(s) = K^+(s)K^-(s), \quad K^\pm(s) = L^\pm(s)G^\pm(s) \quad (4.19)$$

причем факторизация функции $G(s) = L^{-1}(s)K(s)$, стремящейся к единице при стремлении $s = i\sigma$ к $\pm \infty$ в силу асимптотик (4.15) и (4.18), проводится по известной формуле [9, 14]

$$G^\pm(s) = \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln[L^{-1}(t)K(t)]}{t-s} dt \right], \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (4.20)$$

Выполнив стандартные операции метода факторизации [9, 15], приняв при этом во

внимание на этапе использования теоремы Лиувилля асимптотику

$$L^{\mp}(s) = O(s^{\frac{1}{2}}), \quad G^{\mp}(s) = 1 + o(1), \quad s \rightarrow \infty \quad (4.21)$$

а также механический смысл искомых функций, получим решение задачи Римана (4.8) в виде

$$X^+(s) = [L^+(s)G^+(s)]^{-1}Q^+(s), \quad T^-(s) = L^-(s)G^-(s)Q^-(s) \quad (4.22)$$

Отсюда на основании (4.7) получаем формулу для искомых напряжений на продолжении разреза

$$B_{\omega}x\tau_{\theta\varphi}(Rx, \omega_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Q^-(s)L^-(s)G^-(s)x^{-s}ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \gamma > 0 \quad (4.23)$$

Содержащиеся в (4.22), (4.23) функции $Q^{\pm}(s)$ находятся из представления [9, 15]

$$Q(s) = H(s)F(s)[L^-(s)G^-(s)]^{-1} = Q^+(s) - Q^-(s) \quad (4.24)$$

и, например, для функции $Q^-(s)$ можно получить формулу [9, 10, 15]

$$Q^-(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{Q(t)}{t-s} dt, \quad Q^-(i\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(i\tau)}{\tau-\sigma} d\tau \quad (4.25)$$

Располагая формулой (4.23), можем найти коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow R-0} \sqrt{2\pi(R-r)}\tau_{\theta\varphi}(r, \omega_1) = \sqrt{2\pi R} \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x}\tau_{\theta\varphi}(Rx, \omega_1) \quad (4.26)$$

Для осуществления указанного предельного перехода необходимо выявить асимптотику на бесконечности функций $Q^-(i\sigma)$, а для этого согласно представлению (4.25) и результатам из [16] следует знать асимптотику $H^-(i\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$, для чего согласно (4.9) нужно воспользоваться асимптотикой для $K_{10}(s)$ с учетом преобразования (4.11). Она имеет ту же структуру, что и (4.10), но только без слагаемого $\text{ctg } \pi s$. С учетом этого выявляем, что $H^-(i\tau) = O(\tau^{-1})$, $\tau \rightarrow \pm \infty$.

Если теперь полагать, что нагрузка, приложенная к конусу, такова, что $\tau Q(i\tau)$ стремится к нулю, удовлетворяет там условию Гёльдера в окрестности ∞ , то согласно известным результатам ([16], с. 270) будем иметь

$$Q^-(i\sigma) = \frac{C}{\sigma} + o\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma \rightarrow \mp\infty, \quad C = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} Q(t)dt \quad (4.27)$$

При учете этой асимптотики, интеграл в (4.23) можно разбить на слагаемые, как и в [1], и выделить главную часть, несущую корневую особенность. В данном случае таковым будет интеграл

$$J(x) = \frac{C}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{L^-(s)}{s} x^{-s} ds = C \left[\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.28)$$

который вычислен с помощью теоремы о вычетах с использованием формулы 2.8 (6) из [6].

Взяв главную часть интеграла в (4.23) в виде (4.28), выполним предельный переход (4.26), в результате получаем окончательно

$$K_{III} = \frac{G}{2R} \frac{\sqrt{\pi}}{\sin \omega_1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{H(s)F(s)}{L^{-1}(s)G^{-1}(s)} ds$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Задачи о концентрации упругих напряжений возле конического дефекта // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 510–519.
2. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927 = Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
4. Попов Г.Я. Задачи концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферически слоистых средах // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 840–853.
5. Titchmarsh E.C. Eigenfunction expansions associated with second – order differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1946 = Титчмарш Э.И. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
6. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. V. 1. New York et al.: Grow-Hill Book, 1953 = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. Назаренко О.А., Попов Г.Я. О дифракции упругих волн на сферических дефектах // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 835–847.
9. Грахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Noble B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations London et al.: Pergamon Press, 1958 = Нобл. Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
12. Doetsch G. Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. Munchen: Oldenbourg, 1956 = Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Физматгиз, 1958. 207 с.
13. Нуллер Б.М. Кручение упругого пространства, ослабленного полубесконечной конической щелью // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 1. С. 150–152.
14. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. Вып. 5. С. 3–120.
15. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев, Одесса: Вища шк., 1982. 167 с.
16. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.

Одесса

Поступила в редакцию
8.XII.1998