

УДК 539.3

© 2000 г. В.К. Лашенов, Б.М. Нуллер

**МЕТОД КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ
В СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Рассматривается задача взаимодействия системы контактирующих упругих ортотропных цилиндров, движущихся в направлении своих образующих с различными скоростями. Получены соотношения обобщенной ортогональности для однородных стационарных решений этой задачи и ее частных случаев. Одно из соотношений используется при решении методом кусочно-однородных решений (КОР) задачи о конечном параболическом штампе, движущемся по упругой полосе; задача сведена к нормальной системе Пуанкаре – Коха экспоненциального типа. Система КОР и решение задачи о полубесконечном штампе построены в квадратурах методом Винера – Хопфа.

Ранее изучались стационарные смешанные задачи для полуплоскости и составной плоскости [1–5], а также были установлены принципы соответствия [6] между интегральными уравнениями для смешанных задач о стационарных колебаниях и стационарных движениях штампов.

1. Система движущихся цилиндров. Ортогональность однородных решений. Пусть декартовы прямоугольные системы координат O_kxyz_k ($k = 1, 2, \dots, N$) привязаны к N упругим ортотропным бесконечным цилиндрам $Q_k = \{(x, y, z_k) : (x, y) \in \Omega_k, z_k \in (-\infty, +\infty)\}$, имеющим сечения Ω_k и движущимся поступательно с постоянной скоростью c_k относительно неподвижного пространства, определенного системой координат $Oxyz$. Образующие S_k цилиндра и направление движения параллельны оси Oz . В области Q_k координаты z_k и z связаны соотношением

$$z = z_k + c_k t \quad (1.1)$$

где t – время. Упругие характеристики и плотность цилиндров однородны в Q_k , зависят от k и не зависят от z_k и t . На цилиндрических поверхностях $\Gamma_{k_1} \subset S_k$ цилиндры контактируют между собой в условиях скользящей или антискользящей заделки, границы $\Gamma_{k_2} = S_k \setminus \Gamma_{k_1}$ свободны от напряжений, защемлены или находятся в перекрестных однородных условиях. Предполагается, что на бесконечности граничные условия от t не зависят.

Таким образом, в системе координат $Oxyz$ для бесконечного многослойного цилиндра $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_N$ с поперечным сечением $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_N$ и взаимно-подвижными частями задача однородная и стационарная.

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{F}_k(x, y, z_k, t)$, $(x, y) \in \Omega_k$, компонентами которой взяты три компоненты вектора перемещений и шесть компонент тензора напряжений в Q_k , полностью удовлетворяющих уравнениям теории упругости. Рассмотрим также стационарную вектор-функцию $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $(x, y) \in \Omega$, с теми же компонентами в цилиндре Q .

В силу стационарности решения и соотношения (1.1) имеем

$$\mathbf{F}_k(x, y, z_k, t) = \mathbf{F}_k(x, y, z_k + c_k t, 0) = \mathbf{F}, \quad (x, y) \in \Omega_k \quad (1.2)$$

Из соотношений (1.1), (1.2) следует

$$\mathbf{F}'_{k_t}(x, y, z_k, t) = \mathbf{F}'_{k_z}(x, y, z, 0)z'_t = c_k \mathbf{F}'_z \quad (1.3)$$

Аналогично

$$\mathbf{F}'_{k_x}(x, y, z_k, t) = \mathbf{F}'_x, \quad \mathbf{F}'_{k_y}(x, y, z_k, t) = \mathbf{F}'_y, \quad \mathbf{F}'_{k_{z_k}}(x, y, z_k, t) = \mathbf{F}'_z \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3), (1.4) показывают, что в системе координат Охуз формулы Коши и закон Гука (индекс k в упругих константах для краткости опущен)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x, \dots, \quad \gamma_{xz} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z, \dots \\ \sigma_x &= \beta_{11}\varepsilon_x + \beta_{12}\varepsilon_y + \beta_{13}\varepsilon_z, \dots, \quad \tau_{xz} = \beta_{55}\gamma_{xz}, \quad \tau_{xy} = \beta_{66}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где β_{ij} – коэффициенты ортотропии, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\beta_{jj} > 0$, сохраняют свою форму, уравнения движения принимают вид

$$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y + \partial \sigma_z / \partial z = \rho c^2 \partial^2 w / \partial z^2, \dots \quad (1.6)$$

где $\rho = \rho_k(x, y, z)$ – плотности материалов, $c = c_k(x, y, z)$ – скорости движения цилиндров; $(x, y) \in \Omega_k$.

Рассмотрим свойства ортогональности однородных решений указанной задачи для Q . Пусть

$$Q^\circ = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \quad z \in [a, b]\}$$

– конечный многослойный цилиндр. Поскольку в начальный момент времени $z_k = z$, то при $t = 0$

$$Q^\circ = \bigcup_{k=1}^N Q_k^\circ, \quad Q_k^\circ = \{(x, y, z_k) : (x, y) \in \Omega_k, \quad z_k \in [a, b]\}$$

Пусть $\mathbf{u}_k^m$, $\mathbf{P}_k^m \equiv -\rho_k \partial^2 \mathbf{u}_k^m / \partial t^2$ ($m = \pm 1, 2, \dots$) – векторы перемещений и инерционных сил в Q_k° , порожденные m -м корнем p_m характеристического уравнения однородной задачи для Q° , $\mathbf{T}_k^m$ – вектор поверхностных напряжений на S_k° – границе Q_k° . Компоненты векторов полностью удовлетворяют уравнениям теории упругости в Q_k° и, следовательно, закону взаимности Бетти

$$L_{mn} = L_{nm}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

$$L_{mn} = \sum_{k=1}^N \left[\iiint_{Q_k^\circ} (\mathbf{P}_k^m, \mathbf{u}_k^n) dQ + \iint_{S_k^\circ} (\mathbf{T}_k^m, \mathbf{u}_k^n) dS \right]$$

где L_{mn} – работа напряжений m -го решения на упругих перемещениях n -го решения в конечном многослойном цилиндре Q° при $t = 0$, $(,)$ – скалярное произведение.

Согласно формуле Гаусса – Остроградского и соотношению (1.7) имеем

$$L_{mn} = \sum_{k=1}^N \iint_{S_k^\circ} [\cos \alpha] (\mathbf{P}_k^m, \mathbf{u}_k^n) dz + (\mathbf{T}_k^m, \mathbf{u}_k^n) dS \quad (1.8)$$

внутренний интеграл в (1.8) – это первообразная по z функции $(\mathbf{P}_k^m, \mathbf{u}_k^n)$, α – угол между ортом $\mathbf{q}$ внешней нормали к S_k° и ортом $\mathbf{r}$ оси Oz.

Исходя из формул (1.7) и (1.8), с учетом того, что на боковой поверхности цилиндра $\cos \alpha = 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^N \iint_{\Omega_k} Z_k dx dy + \sum_{k=1}^N \left(\iint_{\Gamma_{k1}^\circ} + \iint_{\Gamma_{k2}^\circ} \right) [(\mathbf{T}_k^m, \mathbf{u}_k^n) - (\mathbf{T}_k^n, \mathbf{u}_k^m)] dS = 0 \quad (1.9)$$

$$Z_k = \int_a^b [(\mathbf{P}_k^m, \mathbf{u}_k^n) - (\mathbf{P}_k^n, \mathbf{u}_k^m)] dz + [(\mathbf{T}_k^m, \mathbf{u}_k^n) - (\mathbf{T}_k^n, \mathbf{u}_k^m)]_{z=a}^{z=b}$$

где Γ_{kj}° ($j = 1, 2$) – часть Γ_{kj} , в которой $z \in (a, b)$.

На Γ_{k1}° в ортонормированном базисе векторов $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$, образующих правую тройку, векторы перемещений и поверхностных напряжений имеют вид

$$\mathbf{u} = \{u_q, u_r, u_s\}, \quad \mathbf{T} = \{\sigma_q, \tau_{qr}, \tau_{qs}\}$$

Отсюда следует, что если контактирующие цилиндры находятся в условиях скользящей или антискользящей заделки, то имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^N \iint_{\Gamma_{k1}^\circ} [(\mathbf{T}_k^m, \mathbf{u}_k^n) - (\mathbf{T}_k^n, \mathbf{u}_k^m)] dS = \sum_{k=1}^N \iint_{\Gamma_{k1}^\circ} (\sigma_{kq}^m u_{kq}^n - \sigma_{kq}^n u_{kq}^m) dS \quad (1.10)$$

В силу непрерывности нормальных перемещений и напряжений в общих точках соседних поверхностей Γ_{k1}° правая часть равенства (1.10) равна нулю. Равны нулю и интегралы по Γ_{k2}° , входящие в равенство (1.9), так как поверхность Γ_{k2}° свободна от напряжений, жестко закреплена, находится в условиях скользящей или антискользящей заделки. Таким образом, при $t = 0$ в стационарном ортонормированном базисе, связанном с системой $Oxyz$, которая в этом случае совпадает со всеми системами $Oxyz_k$, имеем (индекс k далее опущен)

$$\iint_{\Omega_{xy}} Z dx dy = 0 \quad (1.11)$$

где Ω_{xy} – ортогональная проекция многослойного цилиндра на координатную плоскость Oxy .

Равенство (1.11) остается справедливым и в случае комплексных однородных решений.

Действительно, пусть $\mathbf{u}$ – комплексная вектор-функция, представляющая собой однородное решение рассматриваемой задачи. Поскольку коэффициенты в формулах Коши и в законе Гука вещественны, то вещественная и мнимая части $\mathbf{u}$ также будут однородными решениями. Таким образом, комплексная вектор-функция $\mathbf{F}_* = \{u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}$ распадается на две вещественные вектор-функции с теми же компонентами.

Разделив переменные в однородных решениях

$$\mathbf{u}^m = \{u^m, v^m, w^m\} = \mathbf{u}_0^m(x, y) e^{p_m z}, \quad \mathbf{T}^m = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\} = \mathbf{T}_0^m(x, y) e^{p_m z}$$

$$\mathbf{P}^m = -\rho c^2 p_m^2 \mathbf{u}_0^m(x, y) e^{p_m z}$$

и подставив из (1.11), после интегрирования по z , получим

$$\iint_{\Omega_{xy}} [\rho c^2 (p_m - p_n) (\mathbf{u}_0^m, \mathbf{u}_0^n) - (\mathbf{T}_0^m, \mathbf{u}_0^n) + (\mathbf{T}_0^n, \mathbf{u}_0^m)] dx dy = 0 \quad (p_n \neq -p_m)$$

Отсюда, замечая, что $p_m \mathbf{u}_0^m = \partial \mathbf{u}^m / \partial z$ при $z = 0$, имеем

$$\iint_{\Omega_{xy}} \{ \rho c^2 [(\partial \mathbf{u}^m / \partial z|_{z=0}, \mathbf{u}_0^n) - (\mathbf{u}_0^m, \partial \mathbf{u}^n / \partial z|_{z=0})] - (\mathbf{T}_0^m, \mathbf{u}_0^n) + (\mathbf{T}_0^n, \mathbf{u}_0^m) \} dx dy = 0 \quad (1.12)$$

Далее, подставив в (1.12) выражения для частных производных при $z = 0$

$$\partial u / \partial z = \gamma_{xz} - \partial w / \partial x = \beta_{55}^{-1} \tau_{xz} - \partial w / \partial x$$

$$\partial v / \partial z = \gamma_{yz} - \partial w / \partial y = \beta_{44}^{-1} \tau_{yz} - \partial w / \partial y$$

$$\partial w / \partial z = \beta_{33}^{-1} (\sigma_z - \beta_{31} \partial u / \partial x - \beta_{32} \partial v / \partial y)$$

полученные из соотношений (1.5), находим следующее соотношение обобщенной ортогональности для системы движущихся цилиндров:

$$\iint_{\Omega_{xy}} [(\mathbf{M}^m, \mathbf{u}^n) - (\mathbf{u}^m, \mathbf{M}^n)] dx dy = 0 \quad (p_n \neq -p_m) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M}^m = \{M_1^m, M_2^m, M_3^m\}$$

$$M_1^m = (\beta_{55}^{-1} \rho c^2 - 1) \tau_{xz}^m - \rho c^2 \partial w^m / \partial x, \quad M_2^m = (\beta_{44}^{-1} \rho c^2 - 1) \tau_{yz}^m - \rho c^2 \partial w^m / \partial y$$

$$M_3^m = (\beta_{33}^{-1} \rho c^2 - 1) \sigma_z^m - \beta_{33}^{-1} \rho c^2 (\beta_{31} \partial u^m / \partial x + \beta_{32} \partial v^m / \partial y), \quad z = 0$$

В частности, в координатах y, z для задачи о плоской деформации системы контактирующих N ортотропных слоев $z \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (y_0, y_1) \cup (y_1, y_2) \cup \dots \cup (y_{N-1}, y_N)$, $y_{k-1} < y_k$ из (1.13) имеем

$$\int_{y_0}^{y_N} (M_2^m v^n - w^m M_3^n - v^m M_2^n + M_3^m w^n) dy = 0 \quad (p_n \neq -p_m) \quad (1.14)$$

Здесь $\partial u / \partial x \equiv 0$.

Поменяв местами x и z и индексы коэффициентов ортотропии в соответствии с формулами (1.5), для одной полосы $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, 1)$ находим

$$\int_0^1 (M_1^m u^n - v^m M_2^n - u^m M_1^n + M_2^m v^n) dy = 0 \quad (p_n \neq -p_m) \quad (1.15)$$

$$M_1^m = (\beta_{11}^{-1} \rho c^2 - 1) \sigma_x^m - \beta_{11}^{-1} \beta_{12} \rho c^2 \partial v^m / \partial y$$

$$M_2^m = (\beta_{66}^{-1} \rho c^2 - 1) \tau_{xy}^m - \rho c^2 \partial u^m / \partial y$$

Полученные соотношения ортогональности (1.13)–(1.15) дают возможность применять метод кусочно-однородных решений к смешанным стационарным задачам для систем бесконечных упругих цилиндров и слоев.

Так как составная область Ω в любой момент времени зеркально-симметрична относительно плоскости $z = 0$, то в этой плоскости наряду с однородным решением $\mathbf{u}^m \equiv \mathbf{u}_0^m$ существует зеркально-симметричное к нему решение $\mathbf{u}_0^q = \{u_0^m, v_0^m, -w_0^m\}$ для области Ω , составленной из цилиндров Ω_k , движущихся с прежними по величине, но противоположно направленными скоростями $-c_k$. Однако в уравнения упругости (1.5), (1.6) входит квадрат скорости c^2 , поэтому функция $\mathbf{u}_0^q$ является также решением задачи для Ω , в которой скорости имеют первоначальное направление c_k . Это решение ортогонально решению $\mathbf{u}_0^m$ в смысле (1.13). Отсюда, учитывая следующие из

(1.13) равенства $M_1^q = -M_1^m$, $M_2^q = -M_2^m$, $M_3^q = M_3^m$, имеем

$$\iint_{\Omega_{xy}} (-M_1^m u^n - M_2^m v^n + M_3^m w^n - u^m M_1^n - v^m M_2^n + w^m M_3^n) dx dy = 0 \quad (p_n \neq p_m) \quad (1.16)$$

Складывая равенства (1.13) и (1.16), получим более сильное соотношение ортогональности

$$\iint_{\Omega_{xy}} (u^m M_1^n + v^m M_2^n - M_3^m w^n) dx dy = 0 \quad (p_n^2 \neq p_m^2) \quad (1.17)$$

Аналогично из (1.14), (1.15) имеем

$$\int_{y_0}^{y_N} (M_2^m v^n - w^m M_3^n) dy = 0, \quad \int_0^1 (M_1^m u^n - v^m M_2^n) dy = 0 \quad (p_n^2 \neq p_m^2) \quad (1.18)$$

Соотношения (1.17) и (1.18) используют обычно при решении краевых задач для конечных и полубесконечных цилиндров, на торцах которых поставлены перекрестные условия, например, условие скользящей заделки. Здесь такие задачи несовместимы с условием стационарности (1.1). Однако соотношения (1.17), (1.18) более эффективны, чем (1.13)–(1.15), и при решении смешанных задач для бесконечных цилиндров, контактирующих с конечными обоями или штампами.

2. Постановка задачи о конечном штампе на полосе. Рассмотрим задачу о движении с постоянной скоростью c ортотропной полосы $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 \leq y_1 \leq 1$ относительно вдавливаемого в нее симметричного параболического штампа, основание которого в неподвижной системе координат $O_0 x_0 y_0$, $x_0 = x_1 + ct$, $y_0 = y_1$, описывается уравнением

$$y_0 = \alpha_0 x_0^2 - \alpha_0 l^2 - \alpha_2 + 1, \quad x_0 \in (-l, l) \quad (2.1)$$

где α_0 , α_2 , l – некоторые положительные числа. Пусть основание полосы $y_1 = 0$ жестко заземлено, трение между штампом и полосой отсутствует, напряжения вне штампа равны нулю, скорость движения меньше скорости распространения волн Релея c_R в ортотропном материале, локальная энергия деформации в полосе под краем штампа ограничена.

В полуполосе $x_0 < 0$, $0 < y_0 < 1$ решение будем искать в виде суммы неоднородного решения задачи о полубесконечном штампе на всей полосе с граничными условиями

$$u = v = 0 \quad (y = 0), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (y = 1) \quad (2.2)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (x < 0, y = 1), \quad v = \alpha_0 x^2 - 2\alpha_0 lx - \alpha_2 \quad (x > 0, y = 1) \quad (2.3)$$

соответствующими (2.1) в неподвижной системе координат Oxy , $x = x_0 + l$, $y = y_0$, и ряда по кусочно-однородным решениям (КОР) этой же задачи с особенностями при $x = +\infty$. При $x_0 > 0$, $0 < y_0 < 1$ решение строим в системе Oxy , где $x = x_0 - l$, в аналогичной форме при основных (2.2) и смешанных условиях

$$v = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_0 lx - \alpha_2 \quad (x < 0, y = 1), \quad \sigma_y = 0 \quad (x > 0, y = 1) \quad (2.4)$$

с особенностями в КОР при $x = -\infty$. Коэффициенты в рядах по КОР найдем при помощи соотношения ортогональности (1.15) из условия непрерывности решений на промежутке $x_0 = 0$, $0 < y_0 < 1$.

Построим общее решение задачи в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < 1$. Поменяв местами координаты x и z и подставив выражения (1.5) в (1.6), получим уравнения в пере-

мещениях. Отсюда, используя преобразование Лапласа

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L U_1(p, y) e^{px} dp, \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L U_2(p, y) e^{px} dp \quad (2.5)$$

где L – прямая $\operatorname{Re} p = \varepsilon$, получим

$$(\beta_{11} - \rho c^2) p^2 U_1 + \beta_{66} U_1'' + (\beta_{12} + \beta_{66}) p U_2' = 0 \quad (2.6)$$

$$(\beta_{66} - \rho c^2) p^2 U_2 + \beta_{22} U_2'' + (\beta_{21} + \beta_{66}) p U_1' = 0; \quad U_j'(p, y) \equiv \partial U_j / \partial y, \quad j = 1, 2$$

Решение системы (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} U_1(p, y) &= A_{1-} (B_1 \sin r_- p y + B_2 \cos r_- p y) + A_{1+} (B_3 \sin r_+ p y + B_4 \cos r_+ p y) \\ U_2(p, y) &= A_{2-} (-B_1 \cos r_- p y + B_2 \sin r_- p y) + A_{2+} (-B_3 \cos r_+ p y + B_4 \sin r_+ p y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$A_{1\pm} = (\beta_{12} + \beta_{66}) r_{\pm}, \quad A_{2\pm} = \rho c^2 - \beta_{11} + \beta_{66} r_{\pm}^2, \quad r_{\pm} = \{[\lambda_1 \pm (\lambda_1^2 - 4\lambda_0 \lambda_2)^{1/2}](2\lambda_0)^{-1}\}^{1/2}$$

$$\lambda_0 = \beta_{22} \beta_{66}, \quad \lambda_1 = (\beta_{11} - \rho c^2) \beta_{22} + (\beta_{66} - \rho c^2) \beta_{66} - (\beta_{12} + \beta_{66})^2,$$

$$\lambda_2 = (\beta_{11} - \rho c^2)(\beta_{66} - \rho c^2)$$

Величины r_- , r_+ представляют собой положительные вещественные числа, B_q – произвольные функции p ; $q = 1, 2, 3, 4$.

3. Решение неоднородных задач о полубесконечном штампе. Рассмотрим первую задачу (2.2), (2.3). Подставив решение (2.7) в условия (2.2), получим

$$\begin{aligned} B_1 &= -A_{2-}^{-1} A_{2+} B_3, \quad B_2 = -r_-^{-1} r_+ B_4 \\ B_3 &= A_{2-} (r_+ E_{1-} \sin r_- p - r_- E_{1+} \sin r_+ p) C(p) \\ B_4 &= r_- (A_{2+} E_{1-} \cos r_- p - A_{2-} E_{1+} \cos r_+ p) C(p) \\ E_{1\pm} &= A_{1\pm} r_{\pm} - A_{2\pm} = \beta_{11} - \rho c^2 + \beta_{12} r_{\pm}^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $C(p)$ – произвольная функция.

Удовлетворив смешанным граничным условиям (2.3), найдем

$$\sigma^+(p) + \sigma^-(p) = N_1(p) C(p), \quad V^+(p) + V^-(p) = N_2(p) C(p) \quad (3.2)$$

$$\sigma^+(p) = \int_0^{+\infty} \sigma_y(x, 1) e^{-px} dx, \quad \sigma^-(p) = \int_{-\infty}^0 \sigma_y(x, 1) e^{-px} dx = 0$$

$$V^+(p) = \int_0^{+\infty} v(x, 1) e^{-px} dx = \frac{2\alpha_0 - 2\alpha_0 l p - \alpha_2 p^2}{p^3}, \quad V^-(p) = \int_{-\infty}^0 v(x, 1) e^{-px} dx$$

$$N_1(p) \equiv [\beta_{12} p U_1(p, 1) + \beta_{22} U_2'(p, 1)] / C(p) = p [D_1 \cos s_+ p + D_2 \cos s_- p + D_3]$$

$$N_2(p) \equiv U_2(p, 1) / C(p) = (\beta_{12} + \beta_{66})(\rho c^2 - \beta_{11}) s_- s_+ [D_4 \sin s_+ p + D_5 \sin s_- p]$$

$$2D_1 = (\beta_{12} + \beta_{66})(\beta_{11} - \rho c^2 + \beta_{66}(\lambda_2 / \lambda_0)^{1/2}) s_-^2 R(c)$$

$$2D_2 = (\beta_{12} + \beta_{66})(\beta_{11} - \rho c^2 - \beta_{66}(\lambda_2 / \lambda_0)^{1/2}) s_+^2 [R(c) + 2(\beta_{11} - \rho c^2) \rho c^2]$$

$$D_3 = 2\beta_{12}(\beta_{12} + \beta_{66})^2 (\beta_{11} - \rho c^2) (\lambda_2 / \lambda_0)^{1/2} [(\beta_{11} - \rho c^2) \beta_{66}^{-1} + (\beta_{12} + \rho c^2) \beta_{22}^{-1}]$$

$$2D_4 = s_- (\beta_{11} - \rho c^2 + \beta_{66}(\lambda_2 / \lambda_0)^{1/2}), \quad 2D_5 = s_+ (\rho c^2 - \beta_{11} + \beta_{66}(\lambda_2 / \lambda_0)^{1/2})$$

$$R(c) = [(\beta_{11} - \rho c^2) \beta_{22} - \beta_{12}^2] (\lambda_2 / \lambda_0)^{1/2} - (\beta_{11} - \rho c^2) \rho c^2, \quad s_{\pm} = r_- \pm r_+$$

Здесь $R(s)$ – функция Релея, верхние индексы плюс и минус означают аналитичность функций в правой и левой полуплоскости соответственно.

Исключив функцию $C(p)$ в (3.2), приходим к уравнению Винера – Хопфа [7]

$$V^-(p) + \frac{2\alpha_0 - 2\alpha_0 lp - \alpha_2 p^2}{p^3} = K(p)\sigma^+(p), \quad K(p) = \frac{N_2(p)}{N_1(p)}, \quad p \in L \quad (3.3)$$

Поскольку $N_j(-p) = -N_j(p)$ и $N_j(\bar{p}) = \overline{N_j(p)}$, то комплексные нули данных функций расположены симметрично относительно обеих координатных осей комплексной плоскости, вещественные – относительно мнимой оси.

Нули функций N_1 и N_2 , лежащие в правой полуплоскости, перенумеруем в порядке возрастания из вещественных частей и обозначим соответственно через a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots$, $\operatorname{Re} a_k \leq \operatorname{Re} a_{k+1}$, $\operatorname{Re} b_k \leq \operatorname{Re} b_{k+1}$, $a_{-k} = -a_k$, $b_{-k} = -b_k$). Известно [8], что они расположены в некоторой полосе комплексной плоскости и их вещественные части определяются формулами

$$\operatorname{Re} a_k = \frac{\pi(k + \gamma)}{s_+}, \quad \operatorname{Re} b_k = \frac{\pi(k + \delta)}{s_+}, \quad -2 \leq \gamma \leq 2, \quad -1 \leq \delta \leq 2 \quad (3.4)$$

Считаем, что функции N_1 и N_2 при любой скорости $s \in (0, s_R)$ не имеют чисто мнимых нулей, исключая $p = 0$. Для функции

$$N_1(i\beta) = i\beta[D_1 \operatorname{ch} s_+ \beta + D_2 \operatorname{ch} s_- \beta + D_3]$$

простейшим достаточным условием отсутствия нулей является положительность коэффициентов D_1, D_2, D_3 , что в дорелеевском скоростном диапазоне имеет место при $\beta_{12} > 0$. Последнее неравенство выполняется для большинства ортотропных материалов [9]. Для функции N_2 отсутствие мнимых нулей доказано ранее [10].

Возвращаясь к уравнению (3.3), заметим, что

$$K(0) = \frac{\beta_{66}s_-s_+(\lambda_2/\lambda_0)^{1/2}}{r_+E_{2-} - r_-E_{2+}}, \quad K(i\beta) \sim \frac{A_0}{|\beta|}, \quad \beta \rightarrow \pm\infty$$

$$A_0 = (A_{2+}E_{1-} - A_{2-}E_{1+})[E_{1-}(A_{1+}\beta_{12} + A_{2+}\beta_{22}r_+) - E_{1+}(A_{1-}\beta_{12} + A_{2-}\beta_{22}r_-)]^{-1}$$

Найдем вначале решение однородной задачи

$$V_0^-(p) = K(p)\sigma_0^+(p), \quad p \in L$$

разбив ее предварительно на две задачи Римана [11]

$$V_j^-(p) = K_j(p)\sigma_j^+(p), \quad j = 1, 2$$

Положив $K_1(p) = A_0 p^{-1} \operatorname{tg} \pi p$, получим

$$\sigma_1^+(p) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)}, \quad V_1^-(p) = \frac{A_0}{\sigma_1^+(-p)}$$

Функция $K_2(p) = K(p)/K_1(p)$ на мнимой оси вещественна, не имеет нулей и полюсов,

$$K_2(0) = \frac{K(0)}{A_0 \pi}, \quad K_2(i\beta) = 1 + O(e^{-2\pi|\beta|}), \quad \beta \rightarrow \pm\infty$$

Так как индекс функции $K_2(p)$, $p \in L$, равен нулю, решение второй задачи Римана

имеет вид [12]

$$\sigma_2^+(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-p} dt \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\sigma_2^+(i\beta) = K_2^{-1/2}(i\beta) \exp \left\{ \frac{\beta}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln[K_2(it)K_2^{-1}(i\beta)]}{t^2 - \beta^2} dt \right\}$$

Из уравнения (3.3) следует

$$\frac{V^-(p)}{V_0^-(p)} + \frac{2\alpha_0 - 2\alpha_0 lp - \alpha_2 p^2}{p^3 V_0^-(p)} = \frac{\sigma^+(p)}{\sigma_0^+(p)}, \quad p \in L$$

На основании оценок

$$\sigma_0^+(p) = O(p^{1/2}), \quad \sigma^+(p)[\sigma_0^+(p)]^{-1} = O(p^{-1}), \quad p \rightarrow \infty$$

найденных соответственно по теореме абелева типа [7], и в силу ограниченности локальной энергии деформации полосы в окрестности края штампа, отсюда получим

$$\sigma^+(p) = \sigma_0^+(p) f_-(p)$$

$$f_-(p) = \frac{1}{p V_0^-(0)} \left\{ 2\alpha_0 \left[\left(\frac{V_0^{*-}(0)}{V_0^-(0)} - \frac{1}{p} \right) \left(l - \frac{1}{p} \right) - \frac{V_0^{-**}(0)}{2V_0^-(0)} + \left(\frac{V_0^{*-}(0)}{V_0^-(0)} \right)^2 \right] - \alpha_2 \right\} \quad (3.5)$$

где $V_0^*(p) \equiv dV_0/dp$, $V_0^{**}(p) \equiv d^2V_0/dp^2$. Возвращаясь к уравнениям (3.2), находим

$$C(p) = \frac{V_0^-(p)}{N_2(p)} f_-(p), \quad \operatorname{Re} p < 0 \quad (3.6)$$

Подстановка выражения (3.6) в (3.1) полностью определяет функции (2.7) и дает возможность по формулам (2.5) найти решение неоднородной задачи (2.2), (2.3):

$$u_{q1}^0(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{V_0^-(p)}{N_2(p)} f_-(p) U_q(p, y) e^{px} dp, \quad q = 1, 2, 3, 4$$

Здесь и далее $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = \tau_{xy}$, $u_4 = \sigma_x$, U_3, U_4 — трансформанты Лапласа функции u_3, u_4 , L_1 — контур интегрирования, совпадающий с мнимой осью, исключая окрестность точки $p = 0$, которую он обходит справа по полуокружности малого радиуса.

Аналогично, решение второй задачи (2.2), (2.4) имеет вид

$$u_{q2}^0(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{V_0^+(p)}{N_2(p)} f_+(p) U_q(p, y) e^{px} dp,$$

$$V_0^+(p) = A_0 \frac{\Gamma(1/2 + p)}{\Gamma(1 + p)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-p} dt \right\}$$

Функция $f_+(p)$ отличается от $f_-(p)$ заменой во второй формуле (3.5) верхнего индекса минус на плюс, $l - 1/p$ — на $l + 1/p$, $-\alpha_2$ — на $+\alpha_2$, знаков перед последними двумя слагаемыми в квадратных скобках — на противоположные, контур L_2 обходит точку $p = 0$ слева.

4. Подсистемы КОР. Построим две подсистемы КОР. Согласно разд. 2 каждый элемент первой подсистемы должен удовлетворять однородным условиям (2.2), (2.3) и

иметь особенность при $x = +\infty$. Эти элементы представимы в виде суммы решения основной задачи, определяемой условиями (2.2) и условием $v(x, 1) = 0$, $-\infty < x < +\infty$, которое находится по формулам (2.7) при $p = b_k$, и решения корректирующей смешанной задачи, определяемой условиями (2.2) и условием

$$\sigma_y = -N_1(b_k)e^{b_k x} \quad (x < 0, y = 1), \quad v = 0 \quad (x > 0, y = 1) \quad (4.1)$$

Правая часть первого условия представляет собой напряжения, возникающие в k -м однородном решении основной задачи.

Смешанные условия (2.2), (4.1), записанные в трансформантах Лапласа

$$\sigma^+(p) + \frac{N_1(b_k)}{p - b_k} = N_1(p)C(p), \quad V^-(p) = N_2(p)C(p)$$

приводят к уравнению Винера – Хопфа

$$\sigma^+(p) = \frac{V^-(p)}{K(p)} - \frac{N_1(b_k)}{p - b_k}, \quad p \in L$$

Зная решение однородного уравнения $V_0^-(p) = K(p)\sigma_0^+(p)$ (см. разд. 3) и используя метод нахождения функции $C(p)$ из разд. 3, получим

$$C(p) = \frac{N_1(b_k)V_0^-(p)}{\sigma_0^+(b_k)N_2(p)(p - b_k)}$$

Таким образом, согласно принципу наложения решений, элементы первой подсистемы КОР имеют вид

$$u_q^k(x, y) = C_k U_q(b_k, y)e^{b_k x} + \frac{C_k N_1(b_k)}{2\pi i \sigma_0^+(b_k)} \int_{L_1} \frac{V_0^-(p)}{N_2(p)(p - b_k)} U_q(p, y)e^{px} dp \quad (4.2)$$

$$q = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, \dots$$

C_k – произвольные постоянные.

Вторая подсистема КОР с особенностью при $x = -\infty$, каждый элемент которой удовлетворяет однородным граничным условиям (2.2), (2.4), строится аналогично, ее элементы отличаются от (4.2) заменой $V_0^-(p)$ на $-V_0^+(p)$, контура L_1 – на L_2 и $\sigma_0^+(b_k)$ – на $\sigma_0^-(b_k)$ ($k = -1, -2, \dots$), причем $\sigma_0^-(p) = A_0 / V_0^+(-p)$.

5. Решение задачи о конечном штампе. Согласно разд. 2 решение задачи о конечном штампе будем искать в виде

$$u_{q1}(x, y) = u_{q1}^0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_q^k(x, y), \quad x < l \quad (5.1)$$

$$u_{q2}(x, y) = u_{q2}^0(x, y) + \sum_{k=-1}^{-\infty} u_q^k(x, y), \quad x > -l$$

Постоянные C_k найдем из четырех условий непрерывности решения при $x_0 = 0$

$$u_{q1}(l, y) = u_{q2}(-l, y), \quad q = 1, 2, 3, 4 \quad (5.2)$$

заменяв их линейными комбинациями (5.2) при $q = 1, 2, 5, 6$, где

$$u_{5j}(x, y) = (\beta_{11}^{-1} \rho c^2 - 1)u_{4j}(x, y) - \beta_{11}^{-1} \beta_{12} \rho c^2 \partial u_{2j} / \partial y$$

$$u_{6j}(x, y) = (\beta_{66}^{-1} \rho c^2 - 1)u_{3j}(x, y) - \rho c^2 \partial u_{1j} / \partial y, \quad j = 1, 2$$

Подставим (5.1) в новые условия (5.2) и разложим контурные интегралы в ряды по вычетам. Поменяв в найденных двойных суммах порядок суммирования, получим (U_5, U_6 – трансформанты Лапласа функций u_5, u_6 ; δ_{kq} – символ Кронекера)

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_q(b_k, y) \left[X_k - \sum_{n=1}^{\infty} X_{-n} T_+(-b_n, b_k) e^{-(b_k+b_n)l} - S_+(b_k) e^{-b_k l} \right] - \\ - \sum_{k=-1}^{\infty} U_q(b_k, y) \left[X_k - \sum_{n=-1}^{\infty} X_{-n} T_-(-b_n, b_k) e^{(b_k+b_n)l} - S_-(b_k) e^{b_k l} \right] = \delta_{1q} R_1(y) + \delta_{6q} R_2(y) \quad (5.3)$$

$$X_k = C_k e^{|b_k|l}, \quad T_{\pm}(t, \tau) = \frac{N_1(t) V_0^{\pm}(\tau)}{N_2'(\tau) \sigma_0^{\mp}(t)(\tau-t)}, \quad S_{\pm}(t) = \mp \frac{V_0^{\pm}(t) f_{\pm}(t)}{N_2'(t)}$$

$$q = 1, 2, 5, 6$$

$$R_q(y) = \frac{4\alpha_0}{V_0^-(0)} \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ [lV_0^-(0) + V_0^{-*}(0)] \frac{U_q(p, y)}{pN_2(p)} - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{V_0^-(p)}{pN_2(p)} U_q(p, y) e^{pl} \right] \right\}$$

$$q = 1, 3, 7; \quad U_7(p, y) \equiv \partial U_1 / \partial y$$

$$R_2(y) = (\beta_{66}^{-1} \rho c^2 - 1) R_3(y) - \rho c^2 R_7(y)$$

Умножим обе части четырех уравнений (5.3) соответственно на $-M_1^m, -M_2^m$ из (1.17), на $U_1(b_m, y)$ и $U_2(b_m, y)$, сложим их и результат проинтегрируем по y от 0 до 1. В силу соотношения обобщенной ортогональности (1.15), в котором $u = U_1, v = U_2$, это приводит к нормальной системе Пуанкаре – Коха с двусторонним определителем

$$X_m - \sum_{n=1}^{\infty} X_{-n} T_+(-b_n, b_m) e^{-(b_m+b_n)l} = S_+(b_m) e^{-b_m l} + h_{m+}$$

$$X_{-m} - \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_-(b_n, -b_m) e^{-(b_m+b_n)l} = S_-(-b_m) e^{-b_m l} + h_{m-}$$

$$2h_{m\pm} = \left\{ \int_0^1 [\pm M_1^{\pm m} R_1(y) \mp U_2(\pm b_m, y) R_2(y)] dy \right\} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 [M_1^{\pm m} U_1(\pm b_m, y) - M_2^{\pm m} U_2(\pm b_m, y)] dy \right\}^{-1}$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Ее матричные элементы согласно соотношению (3.4), экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов.

При помощи рассмотренного здесь метода КОР можно решать аналитические задачи с любым числом штампов, периодические задачи, а также смешанные стационарные задачи для систем движущихся упругих полос и круговых цилиндров, имеющие конечные по z участки взаимного контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
2. Симонов И.В. Динамика трещины отрыва-сдвига на границе раздела двух упругих материалов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 65–68.
3. Симонов И.В. Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 482–489.

4. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134–144.
5. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 633–641.
6. Белоконь А.В. Некоторые "принципы соответствия" для динамических задач вязкоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 136–138.
7. Noble B. Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L. etc.: Pergamon Press, 1958. = Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. N.Y.; L.: Acad. Press, 1963. = Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
9. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
10. Лащенков В.К. О чисто мнимых комплексных корнях одного дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба // Методы прикладной математики в транспортных системах. Сб. науч. тр. С.-Пб. ун-та водных коммуникаций. 1998. Вып. 2. С. 84–89.
11. Нуллер Б.М. Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 3. С. 532–534.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.VI.1999