

УДК 539.374 : 629.7

© 2000 г. И.В. Симонов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ УДЛИНЕННОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ ОТРЫВЕ ПОТОКА

Проводится качественное исследование устойчивости прямоугольного движения по инерции тонких жестких тел вращения в упругопластической среде. Математическая модель двумерного возмущенного движения основана на методе изолированного элемента и гипотезах отрыва потока и сводится к автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии неизвестных границ. Методом Ляпунова найдены точки бифуркации стационарного решения как при безотрывном обтекании, так и при кавитации с малыми несимметричными зонами отрыва на боковой поверхности тела.

В опытах по проникновению тел вращения в прочные среды часто наблюдалось искривление траектории движения вплоть до разворота на 180° . Вопрос устойчивости движения важен для развития технологий, основанных на методе динамической пенетрации [1, 2], но мало изучен; известны только имитационные расчеты [3]. В предлагаемой работе за основу берутся решения модельных задач об обтекании тел высокоскоростным упругопластическим потоком [4–7] и эксперименты [8]. Тогда эмпирические параметры известных моделей локального взаимодействия оказываются функционально связанными с характеристиками среды и геометрией тела, что позволяет выделить дополнительные малые величины и сократить число параметров; в частности, трение не входит в уравнения для возмущений. Гипотезы отрыва основаны на наблюдениях движений тел в малопрочных средах и заключаются в предположении, что идеальный отрыв происходит с краев миделева сечения (он наблюдается при малых скоростях). При неидеальном отрыве, обусловленном ростом скорости, наличием начальных напряжений, вводится эмпирический угол отрыва.

Изучается устойчивость прямолинейного движения тела, в зависимости от положения центра масс, контура тела, угла отрыва, скорости движения при условии, что возмущенное движение плоскопараллельное. Указаны пределы параметров, обеспечивающих устойчивость при безотрывном обтекании и расширение этих пределов при появлении несимметричных малых по площади зон отрыва около кромок, изломов или гладких точек на поверхности тела. Описываются перспективные в смысле устойчивости и абсолютно неустойчивые конфигурации. Модель также позволяет оценивать изгибающие моменты, боковые силы, запас прочности и т.д.

1. Физическое описание задачи. Жесткое удлиненное тело вращения движется с высокой скоростью по инерции в безграничной изотропной и однородной упругопластической среде. За масштаб длины в продольном и поперечном направлениях примем длину тела L и максимальный радиус его поперечного сечения r_m , соответственно. Обозначим $R = R(l) = r/r_m$ безразмерное уравнение образующей боковой поверхности тела в цилиндрической системе координат R, ϕ, l , жестко связанной с телом и с местной прямоугольной системой координат $x = l_c - l, y = R \cos \phi, z = R \sin \phi$, где l – расстояние от носика тела; $l = l_c, R = 0$ – координаты центра масс. Условия тонкости тела

$$\varepsilon = r_m / L \ll 1, \quad \varepsilon \beta \ll 1, \quad \beta = R' = dR / dl, \quad 0 < l < 1 \quad (1.1)$$

считаем выполненными почти всюду, за исключением, быть может, малой окрестности затупленной носовой части тела $0 < l < l_1 \ll 1$, где дадим отдельное описание.

Замечание. Заостренные под малым углом тела не являются оптимальными с точки зрения прочности при действии поперечных изгибающих сил. С другой стороны, даже швейная игла может рассматриваться как затупленное тело, так как ее острие (близкое по форме к параболоиду) имеет затупление характерного радиуса $\approx 0,1r_m$.

В начальный момент времени $t = 0$ заданы вектор скорости v_0 центра масс тела и угловая скорость вращения Ω_0 относительно этого центра. Полагаем, что вращение начинается в плоскости, образованной вектором скорости v_0 и осью тела (рыскание и другие вращения отсутствуют). Тогда траектории движения точек тела будут плоскими, если оно обладает осевой симметрией и по динамическим свойствам.

Обозначим: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times (x, y, z)$, $V_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = \varepsilon \delta v_x$ – векторы текущих переносной, угловой, полной и нормальной к поверхности тела скоростей, где

$$\delta = \beta - a \cos \phi, \quad a = -\omega x - \eta, \quad \omega = \Omega L / (\varepsilon v_x), \quad \eta = v_y / (\varepsilon v_x)$$

Безразмерные функции ω и η – угловая скорость и угол атаки нормированы так, что могут принимать значения $O(1)$. Массу m тела выразим через безразмерную длину эквивалентного по массе и миделеву сечению цилиндра l_e и среднюю плотность тела ρ_1 по формуле: $m = \pi r_m^2 L l_e \rho_1$. Несжимаемую среду характеризуем плотностью ρ_0 , модулем сдвига μ и динамическим пределом текучести Мизеса τ_d . Для пластически сжимаемых (пористых) сред можно считать, что среда упаковалась на значительном расстоянии от тела и ρ_0 – ее плотность в упакованном состоянии.

Согласно известным результатам [5, 6] около контура тела образуется пластическая зона с границей, подобной контуру, и "большим" радиусом $\sqrt{\mu / \tau_d} R(l)$. Вблизи контура будет наблюдаться интенсивное сдвиговое течение со срывом потока с кромки тыльной части, а также, возможно, и с отрывом на боковой поверхности тела.

Каверна хорошо сохраняет свою форму в упругопластических средах, и при низких скоростях отрыв происходит практически при условии касания: $V_n = 0$, т.е. $\delta = 0$. Назовем это условие критерием идеального отрыва. С ростом скорости обтекания и/или при наличии значительных начальных напряжений в среде σ_{ij}^0 это условие нарушается. Тогда примем обобщенный критерий, согласно которому линии отрыва на поверхности тела определяются из условия равенства угла $\delta = V_n / (\varepsilon v_x)$ критической величине β_* :

$$\delta^* \equiv \delta - \beta_*(\sigma_{ij}^0, v_x) = 0 \quad (1.2)$$

($\delta^* > 0$ – контакт, $\delta^* < 0$ – отрыв)

При идеальном отрыве $\beta_* = 0$. Угол отрыва β_* возрастает с увеличением скорости и убывает с ростом начальных сжимающих напряжений (может стать отрицательным). Его следует определять из специальных экспериментов.

Таким экспериментом может служить пробивание слоя среды шаром с полированной поверхностью: смоченная часть поверхности шара станет матовой и по расположению границы между матовой и полированной поверхностями определяется угол отрыва (идея Ю.К. Бивина).

Близкие эмпирические модели отрыва использовались ранее в инженерных расчетах неоднородного движения снаряда в грунте.

Ограничимся рассмотрением режимов, когда нет присоединения струи на поверхности тела S . Обозначим зону смачивания S_+ ($\delta^* > 0$) и зону отрыва S_- ($\delta^* < 0$); $S =$

$= S_+ + S_-$. Вектор контактных напряжений определим обычной суммой вкладов гидродинамического и прочностного слагаемых [4–7]

$$\sigma = \tau_s \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n}, \quad \sigma_n = C_x \rho_0 V^2 / 2 + b_0 \tau_d \quad (S_+); \quad \sigma = 0 \quad (S_-)$$

где $\tau_s = \text{const}$ – пластическое трение, $\tau_s \leq \tau_d$; $\mathbf{n}_\tau$ – единичный касательный вектор в направлении скольжения и в рассматриваемом приближении $\mathbf{n}_\tau = (-1, 0, 0)$.

Разобьем поверхность S на элементы, каждый из которых аппроксимируем поверхностью канонической формы (сфера, конус, цилиндр) и зададим коэффициенты C_x, b_0 , например, из решений модельных задач стационарного обтекания [4–7] и экспериментов [8]. Лобовая поверхность $S_\perp$ при малых возмущениях движения по оси останется полностью смоченной и на ней, как на едином элементе, $C_x = C_\perp, b_0 = b_\perp = \text{const}$.

При обработке результатов динамических пенетрационных испытаний [8] обнаружено, что для конусов с углами полураствора $15^\circ \div 90^\circ$ коэффициент $C_\perp$ близок к расчетным и экспериментальным значениям в гидродинамике. Величина $b_\perp$ весьма слабо зависит от формы: при углах $15^\circ \div 90^\circ$ она меняется на 22% и отличается приблизительно на одну треть от значения b_0 , рассчитанного исходя из формулы для максимального нормального напряжения σ_n в точке торможения упругопластического потока, обтекающего шар [7]. Тогда значение $b_\perp$ на поверхности $S_\perp$, а также величину $b_0 = b_f$ на пологой части смоченной боковой поверхности $S_f = S_+ - S_\perp$, где выполнены условия (1.1) и $\epsilon \delta \ll 1$, можно аппроксимировать формулами [4–7]

$$b_\perp = \frac{4\sqrt{3}}{9} \left(4 \ln \frac{\sqrt{3}\mu}{\tau_d} + 1 \right), \quad b_f = \ln \frac{4\mu}{\tau_d} - 1$$

При типичных значениях $\mu/\tau_d = 10^2 \div 10^3$ получим $b_f = 5 \div 7, b_\perp = 16 \div 24$, так что в асимптотическом смысле ниже будем считать $b_f^2, b_\perp^2 \gg 1$. Согласно известным результатам [4–6] на поверхности S_f будет $C_x = C_f \epsilon^2 \delta^2$. Коэффициент C_f , вообще говоря, зависит от геометрии тела. Так, давление неравномерно распределено вдоль образующей тонкого конуса конечной длины, обтекаемого идеальной жидкостью. Но в упругопластической среде оно выравнивается, имеются основания положить $C_f = \text{const}$ и согласно методу "касательных конусов" принять, что [6] $C_f = \ln(\mu/\tau_d) + 2,55$ при условии $\epsilon \delta \ll (\tau_d/\mu)^{1/2}$ ($\epsilon \delta < 10^{-2}$, т.е. для весьма малых углов наклона участка поверхности к потоку) или принять согласованное с экспериментами для глинистых сред значение $C_f = 2,9$ ($\epsilon \delta \sim 10^{-1}$).

Предел текучести τ_d является параметром процесса. Его измеренные значения в динамических экспериментах по прониканию тел в глинистые среды [8] только в 1,5 ÷ 2 раза выше соответствующего статического предела текучести, в то время как за фронтом ударной волны (или в упругом предвестнике сразу впереди фронта) они могут отличаться от этого значения на порядок величины. Причиной различия τ_d и τ_s может быть разогрев среды около контура от трения или предварительное нагревание тела (например, до $T > 100^\circ\text{C}$, среда – лед).

Сделанные выше допущения и оценки трудно проверить непосредственно, поэтому определение величин C_x, b_0, τ_d и τ_s следует проводить на основании контрольных экспериментов. Важно отметить, что в принятой модели отрыва "по углу" физическое условие начала контакта $\sigma_n = 0$ оказывается нарушенным. Это – издержки приближенной модели локального взаимодействия (или метода "касательных конусов", как в аэродинамике, или метода изолированного элемента, как в математике). Противоречие снимается, если под σ_n понимать среднее значение на элементе поверхности конечной площади; с другой стороны, это указывает на необходимость совершенствования модели.

Введем дополнительные нормированные переменные и параметры

$$\kappa = \frac{c^2}{v_x^2}, \quad \xi: \quad d\xi = \frac{v_x dt}{\zeta L}$$

$$c^2 = \frac{2b_f \tau_d}{\varepsilon^2 \rho_0 C_f}, \quad \zeta = \frac{2l_e}{\rho C_f}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad j = \frac{mL^2}{I}$$

где I – главный момент инерции поперечного вращения, κ – отношение прочностных и инерционных сил сопротивления, оно изменяется в процессе замедленного движения тела в пределах $\kappa_0 < \kappa < \infty$. При $\kappa \ll 1$ превалирует инерция. Это, обычно, область сверхзвуковых скоростей, где принятая модель не всегда реалистична. При $\kappa \gg 1$ можно пренебречь влиянием инерции. Порядок величины κ определяется не только скоростью, но и прочностью среды, и можно обеспечить значение $\kappa_0 \sim 1$ при малых скоростях движения. Для грунта средней динамической прочности $\tau_d = 5 \cdot 10^6$ Па при проникании стального конуса с углом раствора 15° условие $\kappa \approx 1$ означает $V \approx \approx 700$ м/с.

2. Математическая постановка задачи. Из уравнений движения тела в терминах κ , η , ω , ξ следует, что при некоторых дополнительных ограничениях на характер затупления производная $d\kappa/d\xi = o(\varepsilon^2 \kappa)$, т.е. асимптотически мала, в то время как производные возмущений, η , ω – величины порядка κ при развитом отрыве с боковой поверхности. Это имеет ясный физический смысл: обобщенные боковое сопротивление и момент сил преобладают над осевым сопротивлением для тонких тел. При безотрывном обтекании прочной средой, как и при обтекании жидкостью, производные $\eta^*, \omega^* = O(1)$ и определяются в главном лишь "гидродинамической" составляющей нормального напряжения σ_n . В следующих приближениях появятся поправки, учитывающие влияние прочности, порядка $\kappa \varepsilon^2$, они будут давать основной вклад при $\kappa \rightarrow \infty$. Таким образом, уравнения теряют силу при описании безотрывного обтекания на заключительной стадии движения, но на основные характеристики движения (глубину проникания, максимальные значения результирующих сил) это повлияет слабо. Определение указанных поправок связано с решением в точной постановке модельных задач об обтекании тонких тел под углом атаки и при их вращении.

Следовательно, на ограниченном интервале времени ξ изменением κ можно пренебречь по сравнению с величинами η и ω : осевая скорость "замораживается". Физически это приближение будет точнее для "тяжелых" тел ($\rho \ll 1$), малопрочных сред и относительно высоких скоростей. Тогда определение возмущений η , ω сводится к решению задачи Коши для автономной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\eta/d\xi = f_\eta - \zeta\omega, \quad d\omega/d\xi = jf_\omega; \quad (\eta, \omega) = (\eta_0, \omega_0), \quad \xi = 0 \quad (2.1)$$

$$(f_\eta, f_\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{l_1}^1 (1, l_c - l) \Phi R dl$$

При выводе отброшены члены $O(\varepsilon^2)$. Результирующие распределенные боковые усилия $\Phi(l)$ определяются по условиям типа неравенств:

1) $a > |\beta^*|$ – зона отрыва локализована около меридиана $\phi = 0$:

$$\Phi = 2a\beta(\pi - \phi^*) + \Psi, \quad \Psi = 2\{\kappa + \beta^2 + a^2(2 + q^2)/3 - \beta\beta^*\}\sqrt{1 - q^2}$$

$$\phi^* = \arccos q, \quad q = \beta^*/a, \quad \beta^* = \beta - \beta_*$$

2) $a < -|\beta^*|$ – отрыв локализован около меридиана $\phi = \pi$: $\Phi = 2a\beta\phi^* - \Psi$;

3) $|a| \leq \beta^*$ – безотрывное обтекание параллели: $\Phi = 2\pi\beta a$;

4) $|a| \leq -\beta^*$ – полный отрыв вдоль рассматриваемой параллели: $\Phi = 0$.

Правые части уравнений (2.1) зависят от параметров κ, ζ, l_c, j и формы тела $R(l)$. Несмотря на линеаризацию по параметру ε , математическая модель обладает нетривиальными нелинейными свойствами. Ниже будут определены точки бифуркации тривиального решения этих уравнений $\eta = \omega = 0$.

3. Исследование устойчивости в малом. Уравнения (2.1) будут линейны в главном в окрестности особой точки $\eta = \omega = 0$, если контур тела невырожден: функция $\beta(l)$ не равна тождественно нулю на любом интервале значений l из отрезка $[0, 1]$ и кусочно-непрерывно дифференцируема. Согласно методу Ляпунова [9] изучим поведение решений соответствующей линеаризованной системы уравнений

$$dH/d\xi = AH, \quad H = (\eta, \omega), \quad A = A_{ij} \quad (3.1)$$

$$H = C_1 \exp(\lambda_1 \xi) + C_2 \exp(\lambda_2 \xi), \quad \lambda_{1,2} = B \pm \sqrt{B^2 - D}$$

где C_i – постоянные векторы, λ_i – корни характеристического уравнения. Характер решения зависит от инвариантов матрицы A

$$2B = A_{11} + A_{22}, \quad D = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

В большинстве изученных ниже случаев $B < 0$. Тогда анализу подлежит только знак определителя D . При $0 < D < B^2$ оба корня $\lambda_{1,2}$ отрицательны и обеспечена устойчивость в малом (особая точка – устойчивый узел). При $D > B^2$ корни комплексные и $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ (устойчивый фокус). При $D < 0$ один из корней положителен (седло) – движение неустойчиво в смысле Ляпунова. Уравнение $D = 0$ определяет границы устойчивости в пространстве параметров.

4. Критерий устойчивости при безотрывном обтекании боковой поверхности тела и срыве с кромки. Пусть критический угол отрыва β^* неотрицателен, а тонкое тело имеет строго монотонно возрастающий радиус поперечного сечения в направлении от носика тела к тыльной его части, и более того, угол наклона образующей к оси тела превышает критический угол отрыва $0 \leq \beta^* < \beta(l)$. Тогда для возмущений, настолько малых, что $\beta^* \geq a$, боковая поверхность обтекается полностью (срыв с задней кромки), прочность среды не влияет на боковые нагрузки, а интегралы в (2.1) берутся в явном виде

$$f_\eta = -p_0 \eta + p \omega, \quad f_\omega = p \eta + (2l_c p_1 - p_2 - l_c^2 p_0) \omega$$

$$p = p_1 - l_c p_0, \quad p_i = \int_{l_1}^1 l^i dR^2, \quad i = 0, 1, 2$$

Уравнения (2.1) тождественны (3.1) и можно доказать справедливость неравенств

$$p_0 > p_1 > p_2, \quad p_0 p_2 - p_1^2 > 0 \Rightarrow B < 0 \quad (4.1)$$

Следуя алгоритму, изложенному в разд. 3, приходим к утверждению.

Утверждение 1. При безотрывном обтекании тела с углом наклона образующей, большим критического угла отрыва β^* ($0 \leq \beta^* < \beta(l)$), его прямолинейное движение будет устойчивым по Ляпунову, если расстояние l_c его центра масс от носика тела меньше критического значения l_g и неустойчивым при $l_c > l_g$. Величина l_g дается формулой

$$l_g = 1 - \left\{ \zeta(p_0 - p_1) + p_1^2 - p_2 p_0 \right\} / (\zeta p_0) \quad (4.2)$$

Зависимость l_g от отношения плотностей является неожиданной. Отметим также, что эта величина не совпадает с расстоянием центра давлений от носика тела l_p ,

определяемым по формуле (вычисления интегралов проведены для случая конуса)

$$l_p = l_c - \frac{f_\omega}{f_\eta} = \int_{l_1}^1 \beta \Phi R dl \left(\int_{l_1}^1 \beta \Phi R dl \right)^{-1} = \frac{2\eta - (\frac{3}{2} - 2l_c)\omega}{3\eta - (2 - 3l_c)\omega}$$

как это принято в инженерной аэродинамике на основании анализа только знаков моментов сил при стационарном обтекании. Кроме того, из приведенной формулы видна существенная зависимость величины l_p от возмущений.

5. Отрыв потока в точках гладкости или на изломе образующей. Пусть невозмущенное движение тела с выпуклым контуром характеризуется отрывом потока вдоль параллели $l = l_w$, $0 < l_w < 1$ в точках гладкости контура по условию $\beta^*(l_w) = 0$, так что поверхность тела при $l < l_w$ ($\beta^*(l) > 0$) смочена, а при $l > l_w$ ($\beta^*(l) < 0$) свободна от напряжений. Рассмотрим малые величины возмущений η , ω , такие, что максимальные смещения точек отрыва $l_+ < l_w$ и $l_- > l_w$ на меридианах $\phi = 0$ и π сместятся в разные стороны от невозмущенного положения будут также малыми. Эти точки связаны с возмущениями равенством $\beta(l_\pm) - \beta_* = \pm a$, а в силу условия малости и гладкости функции $\beta(l)$ имеем

$$\beta(l_+) - \beta(l_-) = 2[(l_w - l_c)\omega - \eta] \approx h(l_+ - l_-), \quad h = |\beta'(l_w)|$$

Асимптотически главная часть функции Φ принимает вид

$$\Phi = \begin{cases} 0, & l > l_- \\ 2\pi a \beta, & l < l_+ \\ (\kappa + \beta_*^2) \sqrt{1 - z^2}, & l_+ < l < l_-; \quad z = (l - l_w)/(l_- - l_w) \end{cases}$$

При срыве с излома $l = l_w$, $0 < l_w \leq 1$ выполняется неравенство $\beta_- \leq \beta_* \leq \beta_+$, где β_- , β_+ – углы наклона контура слева и справа от излома (поток движется справа налево по отношению к телу). Если неравенство строгое, то малые возмущения не приводят к несимметрии обтекания и анализ устойчивости, приведенный в разд. 4, сохраняет силу с учетом перенормировки длины смоченного участка. При $\beta_* = \beta_\mp$ в одно-сторонней окрестности излома могут возникнуть несимметричные зоны отрыва почти при любых возмущениях. Тогда в приведенных выше формулах следует заменить, соответственно, l_+ или l_- на l_w . Дополнительный вклад в боковые силу и момент получим интегрированием выражений в (2.1) по области $l_+ < l < l_-$

$$\Delta f_{\eta, \omega} = \psi(u_w \omega - \eta)(1, -u_w), \quad \psi = \frac{\kappa + \beta_*^2}{eh} R(l_w) > 0, \quad u_w = l_w - l_c$$

где $e = 1$ в случае гладкости контура, $e = 2$ в случае излома и, соответственно, берется левая или правая производная $\beta'_\pm$ при определении h . Выбором начальных возмущений можно обеспечить малость длины зоны отрыва на достаточно большом интервале времени. Тогда для тела с углом наклона образующей, таким, что $0 \leq \beta_* < \beta(l)$ при $0 < l < l_w$, сохраняет силу утверждение 1 при замене критической величины l_g на

$$l_s = l_g + \frac{\psi(p_0 l_w - p_1)(\zeta + p_0 l_w - p_1)}{\zeta p_0 (\psi + p_0)}, \quad p_i = 2 \int_{l_1}^{l_w} l^i R dR \quad (5.1)$$

где величина l_g определена через новые значения p_i формулой (4.2). Неравенства (4.1) сохраняют силу с учетом перенормировки, и поэтому $l_s > l_g$. Если $\psi \rightarrow \infty$ и $l_w \rightarrow 1$, то справедлива асимптотика

$$l_s \rightarrow 1 + \zeta^{-1}(p_0 + p_2 - 2p_1) > 1$$

и заключаем, что для значений ψ , ζ и l_w , таких, что

$$\psi > \frac{\zeta(p_0 - p_1) + p_1^2 - p_0 p_2}{\zeta(l_w - 1) + p_0 l_w^2 + p_2 - 2p_1 l_w} > 0$$

движение устойчиво при любом расположении центра масс по длине тела. Рост ψ и увеличение запаса устойчивости обеспечиваются увеличением кривизны контура в точках отрыва и уменьшением осевой скорости (стабилизация при возрастании влияния прочностных сил, $\kappa \rightarrow 0$). Кавитация существенно снижает сопротивление, стабилизирует осевую скорость и увеличивает длину пути вследствие уменьшения площадей миделева сечения и смоченной поверхности. Однако при любом фиксированном ψ имеем $l_s \rightarrow 0$, если $l_w \rightarrow 0$. Отсюда следует, что управление устойчивостью изменением параметра ψ становится менее эффективным по мере развития кавитации, а при полном отрыве с затупленного (но гладкого) носика тела и $l_c > l_1$ состояние динамической системы оказывается неустойчивым независимо от значений других параметров.

Может показаться, что тогда необходим более строгий учет несимметрии обтекания носовой части тела. Однако сравнительный анализ показывает, что отношение момента осевой силы относительно центра масс M_a к моменту боковых сил M , вызванных несимметрией отрыва, – величина порядка ϵR_1 , где допускается, что величина смещения точки приложения силы по оси y – величина $d = d_\eta \eta$, причем $d_\eta = O(1)$. Следовательно, для удлиненных и гладких тел несимметрией обтекания затупленной носовой части можно пренебрегать по сравнению с эффектами обтекания боковой поверхности. При срыве потока с излома образующей вблизи носовой части тела такой анализ становится необходимым.

Для численных оценок при $l_w = 1$ воспользуемся неравенствами

$$0 < p_0 < 1, \quad 0 < p_1 < 2/3, \quad 0 < p_2 < 1/2, \quad 1/3 < l_c < 1$$

где крайние значения достигаются для конуса и для цилиндра. При безотрывном обтекании в интервале значений относительной плотности $0 < \rho < 1$ им соответствуют интервалы изменения величины l_g :

$$0 < l_g < 2/3 + \chi/18, \quad 0 < \chi < 4, \quad \chi = \zeta^{-1}; \quad 2/3 < l_g < 8/9 \quad (\text{конус})$$

При учете влияния отрыва в тыльной части контура тела получим

$$\psi(1 + \chi)/(1 + \psi) < l_s < 1 + \chi/6 - (1/3 + \chi/9)/(1 + \psi)$$

Ни конус, ни цилиндр не являются телами, для которых характерны несимметричные малые зоны отрыва, – отрыв потока наступает сразу по участкам большой длины. Для конуса при $\beta_0 > \beta_*$ анализ, проведенный в разд. 4, сохраняет силу и показывает, что движение однородного тонкого "тяжелого" ($\rho \leq 0,4$) конуса неустойчиво, ибо $l_c = 3/4$, а $l_g = 2/3 + \chi/18$. При $\beta_0 = \beta_*$ формируются большие зоны отрыва и необходимы численные расчеты; при $\beta_0 < \beta_*$, как и вообще для невыпуклых образующих, возникает кажущийся парадокс: согласно критерию отрыва заостренная носовая часть тела не смочена средой. Парадокс снимается, если признать, что он – следствие грубости принятой модели "первого приближения" и в качестве следующего шага следует ввести зависимость критического угла от кривизны образующей тела вращения, а в данном контексте считать, что эта зависимость учитывается неявно (методом осреднения) и для каждого конкретного тела величина β_* постоянна.

Можно показать, что цилиндр – абсолютно устойчивая форма, независимо от расположения центра масс.

Тело, образованное вращением части параболы, – простейший случай, в котором допускается режим обтекания с малой зоной отрыва. Так, при отрыве с кромки

(фигура; затененная область заштрихована)

$$\beta = \beta_0 - hg \equiv 2 - \beta_* - 2(1 - \beta_*)l; \quad \beta_1 \geq 0, \quad h > 0 \Rightarrow 0 \leq \beta_* < 1; \quad R(0) = 0, \quad R(1) = 1$$

получим

$$l_s = l_g + \lambda \delta_1 [1 + \chi \delta_1], \quad l_g = 1 - \delta_1 + \chi(\delta_1^2 - 2\delta_1 + \delta_2)$$

$$\lambda = \frac{\kappa + \beta_*^2}{\kappa + 2 - 2\beta_* + \beta_*^2}, \quad \delta_1 = 1 - p_1 = \frac{1}{5} \left\{ \frac{\beta_0^2}{6} + \frac{\beta_0}{2} + 1 \right\}, \quad \delta_2 = 1 - p_2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\beta_0^2}{10} + \frac{2\beta_0}{5} + 1 \right\}$$

$$\frac{\kappa}{\kappa + 2} \leq \lambda < 1, \quad \frac{1}{3} < \delta_1 \leq \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{2} < \delta_2 \leq \frac{11}{15}, \quad 0 \leq \beta_* < 1$$

Численный пример: $l_g = 0,484$, $l_s = 0,696$ при $\beta_* = 0$, $\zeta = 2,768$, $\kappa = 1$ указывает на существенность влияния отрыва при определении критических значений. Кроме того, они зависят от осевой скорости v_x , так что интервалу $0 < v_x < \infty$ при $\beta_* \ll 1$ соответствует некоторый интервал значений l_s : $0 < l_* < l_s < l_{**} < 1$. С ростом скорости движения величины κ , ψ и l_s убывают. Следовательно, если центр масс тела расположен так, что $l_* < l_c < l_{**}$, то существует критическая скорость $v_*(l_c)$ такая, что при $v_x > v_*$ будет $l_c > l_s(v_x)$ и движение неустойчиво; при $v_x < v_*$ справедливо обратное утверждение.

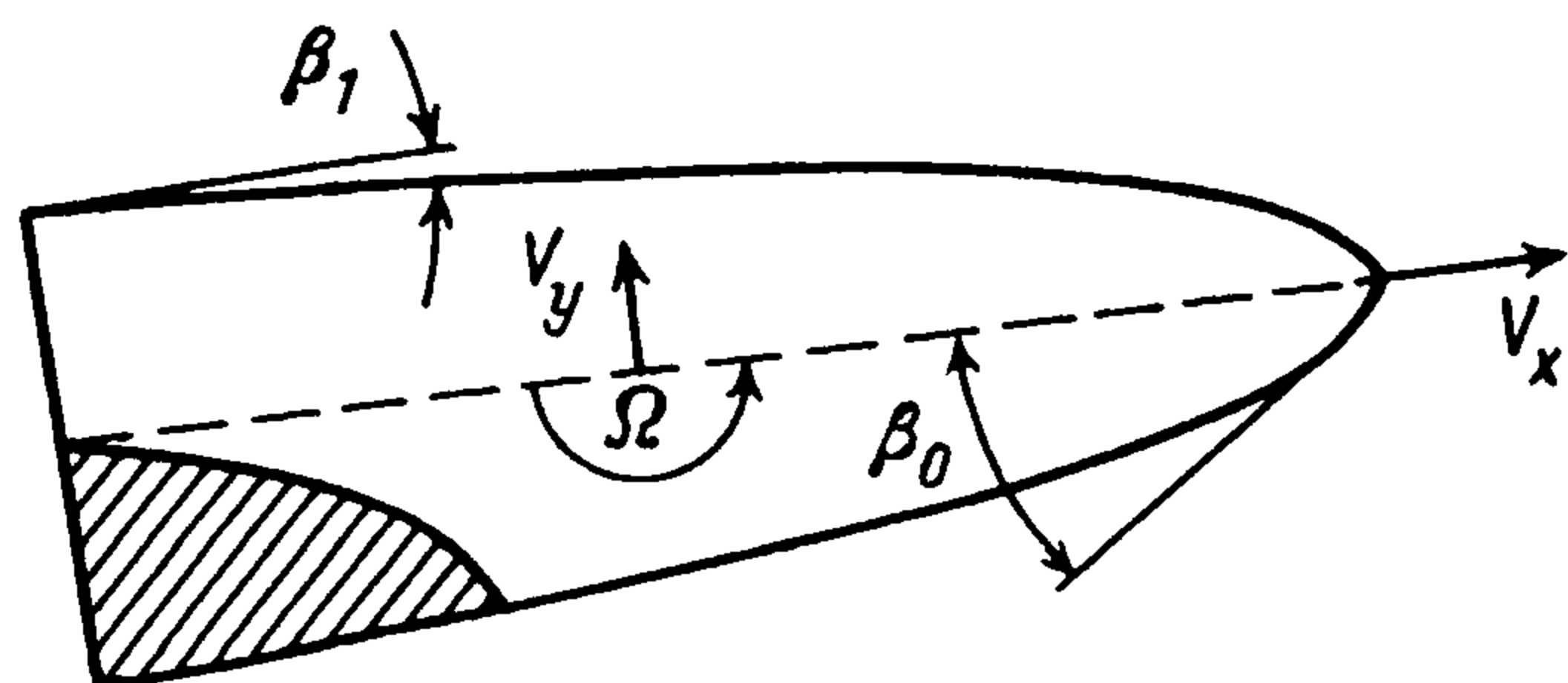
Предварительный анализ показывает существование других устойчивых режимов движения при переходе через критические значения ($l_c > l_s, l_g$). Предельное условие $l_c = l_s$ означает, что движение быстро выходит на режим $\omega = \omega_*$, $\eta = \eta_*$, где ω_* , η_* – постоянные. Траектория такого движения – окружность большого радиуса. Если $l_c > l_s$, то возмущения растут по экспоненте, а устойчивой траекторией будет свертывающаяся спираль. Изменяется число устойчивых режимов: направление вращения в плоскости может быть разным. Следовательно, критические значения l_s, l_g – точки бифуркации. Качественно ясно, в какой мере эти выводы сохранятся при рассмотрении замедленного движения в направлении оси тела. Таким образом, принципиально возможно проектирование тел (ударников), движущихся по некоторым заданным криволинейным траекториям.

6. Профиль с несколькими малыми зонами отрыва. Для невыпуклых тел и/или тел со специальными точками излома одна или одновременно несколько несимметричных зон отрыва могут появиться в окрестностях излома или перегиба образующей при сколь угодно малых возмущениях в точках $l = l_i \leq l_w \leq 1$, $i = 2, 3, \dots, i_0$ (могут включаться кромки $i = 0, 1$), где $\psi = \psi_i$. В приближении бесконечно малых зон отрыва можно получить вклад дополнительных сил методом суперпозиции

$$A_{11} = -A_0, \quad A_{22} = A_1 - \zeta - l_c A_0, \quad A_{12} = A_1 - l_c A_0, \quad A_{22} = 2l_c A_1 - A_2 - l_c A_0^2$$

$$A_k = p_k + \sum_i l_i^k \psi_i, \quad p_k = 2 \int_0^{l_w} l^k R dR, \quad k = 0, 1, 2$$

и доказать неравенство $B < 0$, если $\beta(l) \geq 0$. Утверждение 1 остается в силе, а критическая длина выражается формулой



$$l_s = (\zeta A_0)^{-1} (A_0 A_2 - A_1 + \zeta^2 A_1)$$

Результат распространяется на случаи углов отрыва $\beta_* < 0$ и более общих конфигураций, пока инвариант $B < 0$. Анализ показывает, что чем ближе расположена зона отрыва к носу тела, тем приращение

запаса устойчивости меньше или оно становится отрицательным. Так, при полном смачивании, за исключением малой несимметричной зоны в окрестности носика $l = l_1 \cong \cong 0$, будем иметь

$$l_s = l_g - \frac{\psi_1(\zeta - p_1)}{\zeta p_0(\psi_1 + p_0)}$$

В типичных случаях $\zeta > p_1$ запас устойчивости уменьшается по сравнению со схемой безотрывного обтекания. Для "легких" тел ($\zeta < p_1$) вывод противоположный.

Если $\beta(l) < \beta_*$, то отрыв с боковой поверхности начинается только при конечных возмущениях, лежащих вне некоторой окрестности точки $H = 0$. Тогда запас устойчивости, рассчитанный по схеме безотрывного обтекания, не меняется и при возникновении малых зон отрыва, поскольку обусловленные этим эффектом дополнительные (нелинейные) слагаемые в правых частях уравнений (3.1) оказываются младшими по порядку величины.

7. Центральнo-симметричный контур. Сохранив неравенство $\beta' \leq 0$, рассмотрим движение тела, радиус поперечного сечения которого в направлении от носика тела сначала монотонно растет, а затем монотонно убывает, обтекание будет безотрывным, если $\beta_* \leq \min \beta(l) = \beta_1 < 0$. В этом случае неравенство $B < 0$ может нарушиться и возникнут качественно иные ситуации. Так, для центрально-симметричного выпуклого контура

$$R(l) = R(1 - l), \quad p_0 = 0, \quad p_1 = p_2 = -p < 0$$

при выполнении условий $\beta_* \leq \beta_1, R_1 = 0$ (заостренное тело); $\beta_* < \beta_1, R_1 > 0$ (затупленное тело) (7.1) существует окрестность точки $\eta = \omega = 0$, такая, что отрыв или не возникает или несуществен. Тогда

$$2B = jp(1 - 2l_c), \quad D = -jp(\zeta + P) < 0$$

В случае начала отрыва с затупленной задней кромки при $\beta_* = \beta_1$ имеем

$$2B = jp(1 - 2l_c) - \psi(1 + l_c^2), \quad D = -jp(\zeta + P) + \psi(\zeta u_c + P)$$

$$u_c = 1 - l_c, \quad \psi = \frac{\kappa + \beta_*^2}{2\beta'(1)} R_1$$

Из результатов анализа устойчивости (разд. 3) следует утверждение.

Утверждение 2. Прямолинейное движение удлинённого геометрически центрально-симметричного тела в условиях безотрывного обтекания (7.1) неустойчиво по Ляпунову (неустойчивый фокус) независимо от положения центра масс по длине тела. При возникновении отрыва с боковой поверхности возможны разные ситуации. Так, в случае отрыва с задней кромки ($\beta_* = \beta_1, R_1 > 0$) для небольших значений параметра ψ ($0 < \psi < P$) указанная выше неустойчивость сохраняется; если $P < \psi < P + \zeta$, то из условия $D = 0$ определяется критическое значение l_c и справедливо утверждение 1; при $\psi > (P + \zeta)$ прямолинейное движение устойчиво при любом положении центра масс по длине тела.

Прочность среды несущественна при анализе устойчивости движения тонких тел в условиях безотрывного обтекания, следовательно, утверждение 2 относится и к движениям тел в невязкой жидкости. Поэтому, возможно, несимметрия форм существ, для которых передвижение в воде является важным условием их существования, объясняется необходимостью обеспечения устойчивости прямолинейного движения по инерции.

Для оптимального проектирования тел полезным будет заключение, что максимальным запасом устойчивости обладают выпуклые тела строго монотонно растущего радиуса в направлении от носика тела к задней кромке, где образующая должна иметь

угол наклона к оси тела, близкий к осредненному по траектории движения углу отрыва и малую (но ненулевую) кривизну.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01265).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов А.В., Николаев А.В., Сербин В.И., Скуридин Г.А., Хаврошкин О.Б., Циплаков В.В. Об одном методе исследования планет земной группы // Космич. исследования. 1988. Т. 26. Вып. 4. С. 591–603.
2. Симонов И.В., Федотов С.А., Хаврошкин О.Б. Предкатострафическое состояние геофизических объектов, триггерное воздействие и пенетрация // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 6. С. 811–813.
3. Велданов В.А., Исаев А.Л., Маринчев Д.В., Пушилин Ю.М. Программа расчета на ПЭВМ параметров процесса взаимодействия ударников с преградой // 12-я Всесоюз. конф.: "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". Тверь, 1991. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 1992. С. 65–72.
4. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
5. Сагомоян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975. № 5. С. 104–111.
6. Флитман Л.М. Дозвуковое осесимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 155–164.
7. Флитман Л.М. Безотрывное обтекание затупленного тела высокоскоростным упругопластическим потоком // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 642–651.
8. Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М. Определение механических свойств среды методом динамического внедрения // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 181–185.
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.III.1999