

УДК 532.58

© 2000 г. Г.Е. Якунина

**К ПОСТРОЕНИЮ
ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ
В РАМКАХ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

В рамках закона локальности, когда сила, действующая на элемент поверхности тела, — известная функция ориентации элемента относительно направления движения, без ограничений на вид этой функции и толщину тела решена задача построения пространственной формы тела минимального сопротивления. Показано, что при заданных площади основания тела и его максимально допустимой длине задача имеет бесконечное множество решений. При этом все оптимальные тела конические, а их сопротивление одинаковое. Поверхность этих тел образована комбинациями участков поверхности кругового конуса и касающихся его плоскостей. Угол при вершине кругового конуса определяется характеристиками среды и скоростью движения через постоянные, входящие в закон сопротивления.

В предположении, что сила воздействия среды на элемент поверхности тела зависит только от его ориентации относительно направления движения, задача определения пространственной формы тела минимального сопротивления была предметом многочисленных исследований [1–8]. Даже в рамках конкретных законов сопротивления решение этой задачи прямыми методами вариационного исчисления найдено только при упрощающих предположениях относительно геометрии тела, когда, сужая класс допустимых поверхностей, удавалось свести уравнения Эйлера к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Искались [1, 2, 4–8] тонкие пространственные тела минимального сопротивления с подобными (гомотетичными) поперечными сечениями. При этом продольный контур тела либо предполагался заданным [2, 5], либо выбирался такой закон распределения коэффициентов давления и трения, при котором задачи определения оптимальных продольного и поперечного контуров разделялись [1, 4, 7, 8]. Так, в предположении, что распределение давления задается формулой Ньютона, при нулевом трении были найдены [1, 4] оптимальные тела, имеющие заданные длину и площадь основания, причем считалось, что в плоскости основания тела задан также минимальный радиус его поперечного сечения. Согласно этим результатам продольный контур пространственного тела минимального волнового сопротивления определяется степенной функцией с показателем степени $3/4$, а поперечный контур имеет звездообразную форму и состоит из заранее заданного числа симметричных циклов. В аналогичной постановке без ограничения на толщину тела оптимальный поперечный контур был построен [3] для заданного (конического) продольного контура.

Увеличение числа циклов оптимальных звездообразных тел монотонно уменьшало их сопротивление [1, 3, 4]. При малом волновом сопротивлении эти тела имели значительно большую площадь поверхности, чем эквивалентные им по длине и площади основания тела вращения, что могло при учете трения привести к существенному увеличению их полного сопротивления.

Рассматривалась [2] задача построения оптимального поперечного контура тела с учетом трения (см. также [5]), причем давление на поверхности тела определялось формулой Ньютона, а коэффициент трения предполагался постоянным. При заданных длине и площади основания считалось, что тело тонкое и имеет заданный (степенной) продольный контур. К важнейшим результатам [2, 5] при такой постановке задачи следует отнести

вывод о возможной неединственности ее решения. Так, при значениях коэффициента трения меньше "критического" был построен класс разных тел с одинаковым сопротивлением. Поперечный контур этих тел мог быть составлен из комбинаций дуг окружности и отрезков прямых, ее касающихся. В частности, он мог быть звездообразным и состоять из произвольно заданного числа симметричных циклов. При этом радиус окружности, которой касались прямые, определялся выбранной формой продольного контура и коэффициентом трения. Было показано [6], что значение сопротивления таких тел при известном параметре трения является абсолютно минимальным. Единственным это решение становилось, когда значение коэффициента трения было больше критического или на геометрию тела накладывались дополнительные ограничения, например задавался минимальный радиус образующей основания или число циклов в нем.

В постановке задачи, которая была аналогичной предложенной ранее [1, 4], но с учетом трения, исследовались [7] оптимальные продольные и поперечные контуры, причем, как и ранее [2, 5], коэффициент трения считался постоянным. Для тонких гомотетичных тел вариационные задачи определения оптимальных продольных и поперечных контуров разделялись [7]. При этом в уравнение, определяющее оптимальный продольный контур, входила постоянная, которая выражалась через интеграл, зависящий от поперечного контура, и наоборот, в уравнение для оптимального поперечного контура, входила постоянная, зависящая от продольного контура. Эти заранее неизвестные "константы связи" могли быть найдены только в процессе совместного решения задач. Анализ, выполнявшийся при их произвольных значениях, показал, что в общем случае (в том числе при задании только площади основания и длины тела) оптимальный продольный контур в окрестности передней точки определяется степенной функцией с показателем степени $3/4$ а поперечный контур, как и ранее [1, 4], имеет звездообразную форму. Совместная задача определения оптимальных продольного и поперечного контуров тела не решалась, однако было замечено [7], что возможны ситуации, при которых продольный контур становится коническим, а поперечный состоит из отрезков прямых.

В постановке, близкой к предложенной ранее [7], в частности, с использованием предположений о тонкости и гомотетичности искомых тел, при помощи известной методики [5, 7], был выполнен [8] более полный анализ оптимальных пространственных конфигураций. Важным результатом [8] явилось определение класса тел, имеющих конический продольный контур и поперечный контур, состоящий из комбинаций дуг окружности и отрезков прямых, ее касающихся, в котором все тела имеют одинаковое сопротивление. Тела этого класса названы абсолютно оптимальными, так как при заданной площади основания их сопротивление не зависит от длины тела и числа циклов поперечного контура и определяется только скоростью движения и характеристиками среды.

Ниже задача о пространственной форме тела минимального сопротивления решается без ограничения толщины тела и без предположения о подобии его поперечных сечений [1–8], а также без ограничений вида функции, задающей модель локального взаимодействия среды с поверхностью тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение тела в среде с постоянной скоростью в направлении, противоположном направлению некоторой оси, заданной единичным вектором $\mathbf{x}$.

Сопротивление тела записывается в виде

$$D = q \int_S [c_p(\mathbf{n}\mathbf{x}) + c_\tau(\boldsymbol{\tau}\mathbf{x})] dS \quad (1.1)$$

Здесь q – скоростной напор, c_p и c_τ – коэффициенты давления и трения на поверхности тела, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные векторы внутренней нормали и касательной к элементу поверхности, интегрирование ведется по поверхности S контакта среды и тела, для которой

$$\alpha = (\mathbf{n}\mathbf{x}) \geq 0, \quad (\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}) = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (1.2)$$

Пусть каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других, и коэффициенты c_p и c_τ в рамках модели локального взаимодействия – функции от α :

$$c_p = c_p(\alpha), \quad c_\tau = c_\tau(\alpha) \quad (1.3)$$

В общем случае в выражения (1.3) могут входить характеристики среды и скорость движения тела, которые предполагаются постоянными. В частности, зависимости (1.3) включают в себя модели силового взаимодействия, использовавшиеся ранее при постановке задач [1–8], при

$$c_p = A_1\alpha^2 + B_1\alpha + C_1, \quad c_\tau = A_2\alpha^2 + B_2\alpha + C_2 \quad (1.4)$$

Здесь A_i, B_i и C_i ($i = 1, 2$) – постоянные параметры локальной модели, зависящие от характеристик среды и скорости движения. Было показано [8], что при определенных допущениях выражениями (1.4) могут быть описаны коэффициенты давления и трения на поверхности тела при его движении в газах и плотных средах типа грунтов и металлов.

Пусть в цилиндрической системе координат (ρ, x, θ) с началом отсчета x в вершине тела его поверхность задается уравнением

$$\rho = \psi(x, \theta)$$

причем $\psi(0, \theta) = 0$. Предполагается, что функция $\psi(x, \theta)$ непрерывна во всей области определения: $x \in [0, x_k]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, где x_k – длина тела, а ее частные производные ψ_x и ψ_θ могут терпеть разрыв на конечном числе линий излома. При $x = x_k$ площадь поперечного сечения тела S_b (площадь основания) считается заданной, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \psi^2(x_k, \theta) d\theta = 2S_b \quad (1.5)$$

Для параметра α и дифференциала площади dS можно записать выражения

$$\alpha = \psi_x / [1 + (\psi_\theta / \psi)^2 + \psi_x^2]^{1/2}, \quad dS = [\psi \psi_x / \alpha] dx d\theta \quad (1.6)$$

Поверхность интегрирования в (1.1) должна быть "смачиваемой" и на ней

$$\psi_x \geq 0, \quad 1 \geq \alpha \geq 0 \quad (1.7)$$

При учете соотношений (1.2), (1.3), (1.6) выражение (1.1) запишем в виде

$$D = q \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{x_k} f(\alpha) \psi \psi_x dx \quad (1.8)$$

Функция $f(\alpha)$ в (1.8), зависящая от закона сопротивления (1.3), в общем случае записывается как

$$f(\alpha) = c_p(\alpha) + (c_\tau(\alpha) / \alpha)(1 - \alpha^2)^{1/2} \quad (1.9)$$

В итоге задачу построения пространственного тела минимального сопротивления можно сформулировать в следующем виде: среди функций $\psi(x, \theta)$, $\alpha(x, \theta)$, удовлетворяющих определенным выше условиям гладкости, а также условиям (1.5), (1.7) и уравнению связи (1.6), найти такие, которые доставляют минимум функционалу сопротивления (1.8).

2. Экстремальные поверхности. Сформулированная задача минимизации функционала (1.8) может быть решена с применением общих методов вариационного исчисления. Для этого необходимо выписать функцию Лагранжа и получить для входящих в нее функций уравнения Эйлера. Аналитическое решение соответствующей системы нелинейных уравнений в частных производных второго порядка при учете условия (1.5) связано с большими трудностями, поэтому необходимо накладывать дополнительные ограничения на класс допустимых поверхностей. Это и делалось ранее [1–8],

когда решение искалось в классе тонких тел с подобными вдоль оси тела поперечными сечениями. Данная задача, однако, допускает и иной путь решения, который не требует привлечения никаких дополнительных ограничений на искомые поверхности, кроме условий (1.5) и (1.7), введенных при ее постановке.

Рассмотрим при положительном аргументе α , где $\alpha \in [0, 1]$, функцию $f(\alpha)$ из (1.9). Пусть при $\alpha = \alpha^* \in [0, 1]$ она достигает минимума. Тогда с учетом вида подынтегральной функции функционала D (1.8) получим, что для любой поверхности $\psi(x, \theta)$ и функции $\alpha(x, \theta)$, удовлетворяющих условиям (1.5) и (1.7),

$$D \geq D^* = qf(\alpha^*) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{x_k} \psi \psi_x dx = qS_b f(\alpha^*) \quad (2.1)$$

Данное неравенство дает оценку снизу значениям функционала (1.8). Равенство в нем возможно лишь при $\alpha(x, \theta) \equiv \alpha^*$, когда функционал D достигает своего абсолютного минимума D^* . Таким образом, экстремальными поверхностями в задаче о форме тела минимального сопротивления при заданной площади основания S_b являются поверхности с $(\alpha x) \equiv \alpha^* = \text{const}$. Как следует из (1.9), значение α^* , при котором функция $f(\alpha)$ минимальна, не зависит от S_b и определяется только характеристиками среды и скоростью движения.

В соответствии с выражением для α (1.6) функция $\psi(x, \theta)$, дающая форму экстремальных поверхностей, удовлетворяет уравнению

$$\psi_x / [1 + (\psi_\theta / \psi)^2]^{1/2} = t^*, \quad t^* = \alpha^* / (1 - \alpha^{*2})^{1/2} \quad (2.2)$$

При $\alpha^* < 1$ его решения с $\psi_x = t^*$ и $\psi_\theta = 0$ определяют поверхности круговых конусов, в частности, конус с $\psi(x, \theta) = t^* x$ с началом координат в его вершине. Очевидно, что все плоскости, касательные к нему, также удовлетворяют уравнению (2.2). Значение $\alpha^* = 1$ отвечает случаю, когда конус вырождается в плоскость, нормальную к оси x . Тогда решение задачи дает любая нормальная к этой оси площадка площади S_b .

Назовем тела, образованные поверхностями, в каждой точке которых $(\alpha x) = \alpha^*$, и с функцией $\psi(x, \theta)$, удовлетворяющей условию (1.5), "абсолютно оптимальными" (АОТ). Все АОТ имеют одинаковое сопротивление D^* , меньше которого при заданной площади основания S_b получить нельзя. При $\alpha^* < 1$ этому классу тел принадлежит круговой конус длины $x_k = (S_b/\pi)^{1/2}/t^*$ с $\psi(x, \theta) = t^* x$ и тела, поверхность которых образована плоскостями, касательными к нему.

Случай $\alpha^* = 0$ при рассмотрении АОТ представляет лишь теоретический интерес, так как длина соответствующего кругового конуса с заданной площадью основания S_b бесконечна. При конечной длине обеспечить заданную площадь основания S_b таких АОТ можно двумя способами: составив их основание из конечного числа лучей бесконечной длины (в радиальном направлении) или из бесконечного числа лучей конечной длины. Такие тела, являясь формами минимального сопротивления, не представляют, однако, практического интереса. Значение $\alpha^* = 0$, в частности, получается при законе сопротивления Ньютона с нулевым трением. Именно по указанной причине авторы [1, 3, 4] при построении пространственных тел минимального волнового сопротивления в рамках закона сопротивления Ньютона наряду с длиной и площадью основания вынуждены были задавать минимальный радиус контура основания и число циклов в нем. Задание таких дополнительных ограничений позволяло получать формы, имеющие практический интерес.

3. Свойства абсолютно оптимальных тел. Для полученных выше АОТ функцию $\psi(x, \theta)$ можно записать в виде

$$\psi(x, \theta) = \varphi(x)R(\theta) \quad (3.1)$$

с непрерывными функциями $\varphi(x)$ и $R(\theta)$, определяющими, соответственно, продольный и поперечный контуры. Подчеркнем, что здесь формула (3.1) есть результат решения поставленной задачи, а не предположение о гомотетичности искомых конфигураций, как это было ранее [1–8].

В силу коничности продольного контура АОТ

$$\varphi'(x) = t_k = \text{const} > 0 \quad (3.2)$$

В дополнение $\varphi(x)$ и $R(\theta)$ согласно (1.5) удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x_k) = (S_b / \pi)^{1/2} \quad (3.3)$$

$$R(0) = R(2\pi), \quad \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta = 2\pi \quad (3.4)$$

Пусть при известном законе сопротивления, а значит, и функции $f(\alpha)$, найденное значение $\alpha^* < 1$. Тогда, как показано выше, построенное тело – АОТ, если $\psi(x, \theta)$ удовлетворяет уравнению (2.2). При учете соотношений (3.1) и (3.2) уравнение (2.2) после введения обозначения

$$r(\theta) = R^2 / (R^2 + R'^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

запишем в виде: $t_k r(\theta) = t^*$. Отсюда для функции $r(\theta)$ получаем выражение

$$r(\theta) = r_k = t^* / t_k = \text{const} \quad (3.6)$$

в котором постоянная r_k зависит от формы продольного контура. Как следует из соотношений (3.4) и (3.5), $r_k \leq 1$.

Итак, АОТ имеет конический продольный контур: $\varphi(x) = t_k x$ и поперечный контур с функцией $r(\theta) = r_k \leq 1$ с константами t_k и r_k , связанными равенством

$$r_k t_k = t^* \quad (3.7)$$

Функции $\varphi(x)$ и $R(\theta)$ удовлетворяют условиям (3.3) и (3.4). Данному классу тел принадлежит бесконечное множество форм с разными продольными и поперечными контурами. Их длина x_k , как следует из (3.3), при заданной площади основания S_b определяется выражением

$$x_k = (S_b / \pi)^{1/2} / t_k = r_k x_k^*, \quad x_k^* = (S_b / \pi)^{1/2} / t^* \quad (3.8)$$

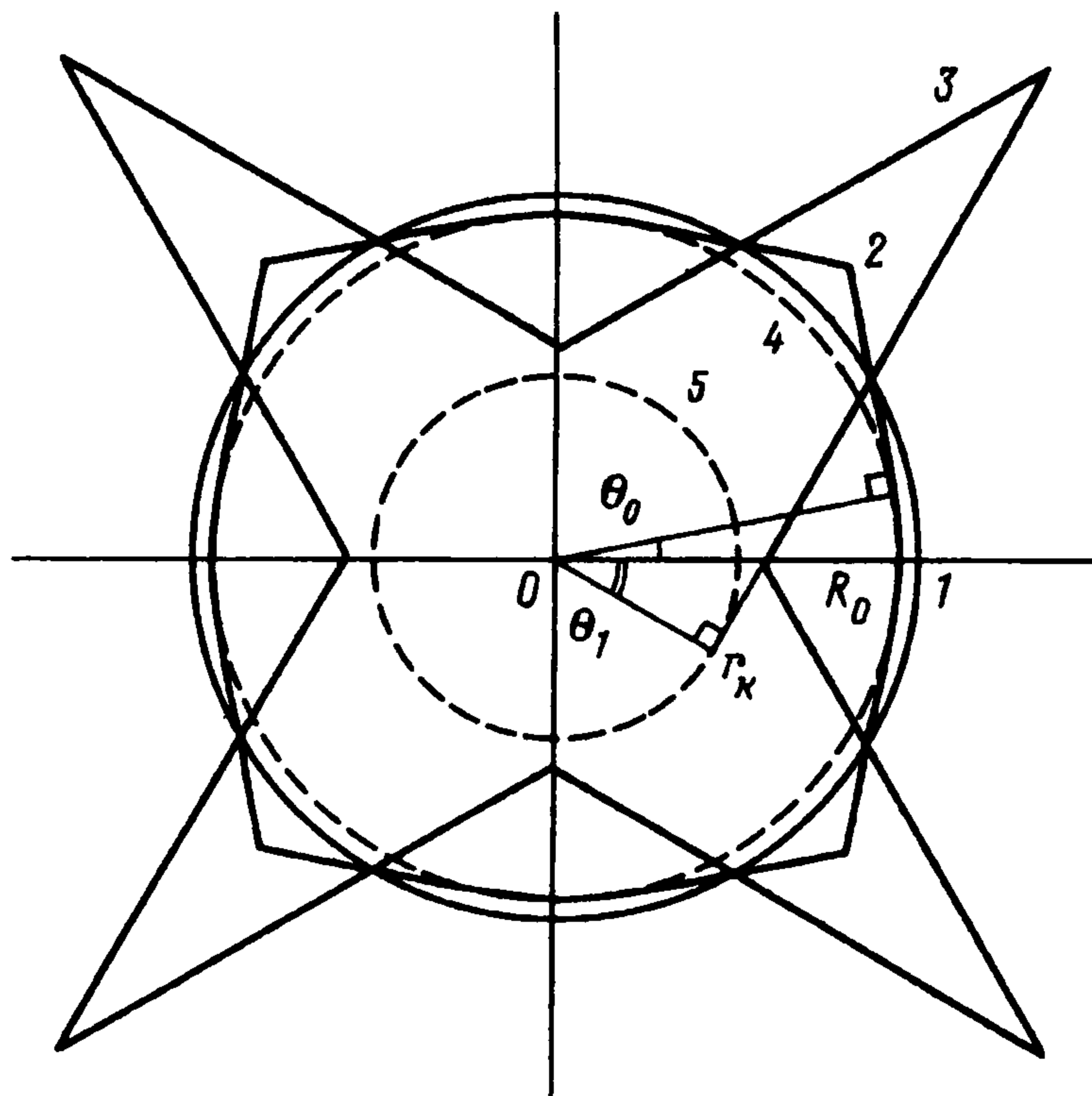
Здесь x_k^* – длина кругового конуса класса АОТ, зависящая только от S_b и t^* .

Так как $r_k \leq 1$, то всегда $x_k \leq x_k^*$, и наибольшую длину в классе АОТ имеет круговой конус. Меняя r_k , можно получать тела разной длины с продольным контуром $\varphi(x) = t_k x$, значение $t_k \geq t^*$ определяется по r_k из выражения (3.7).

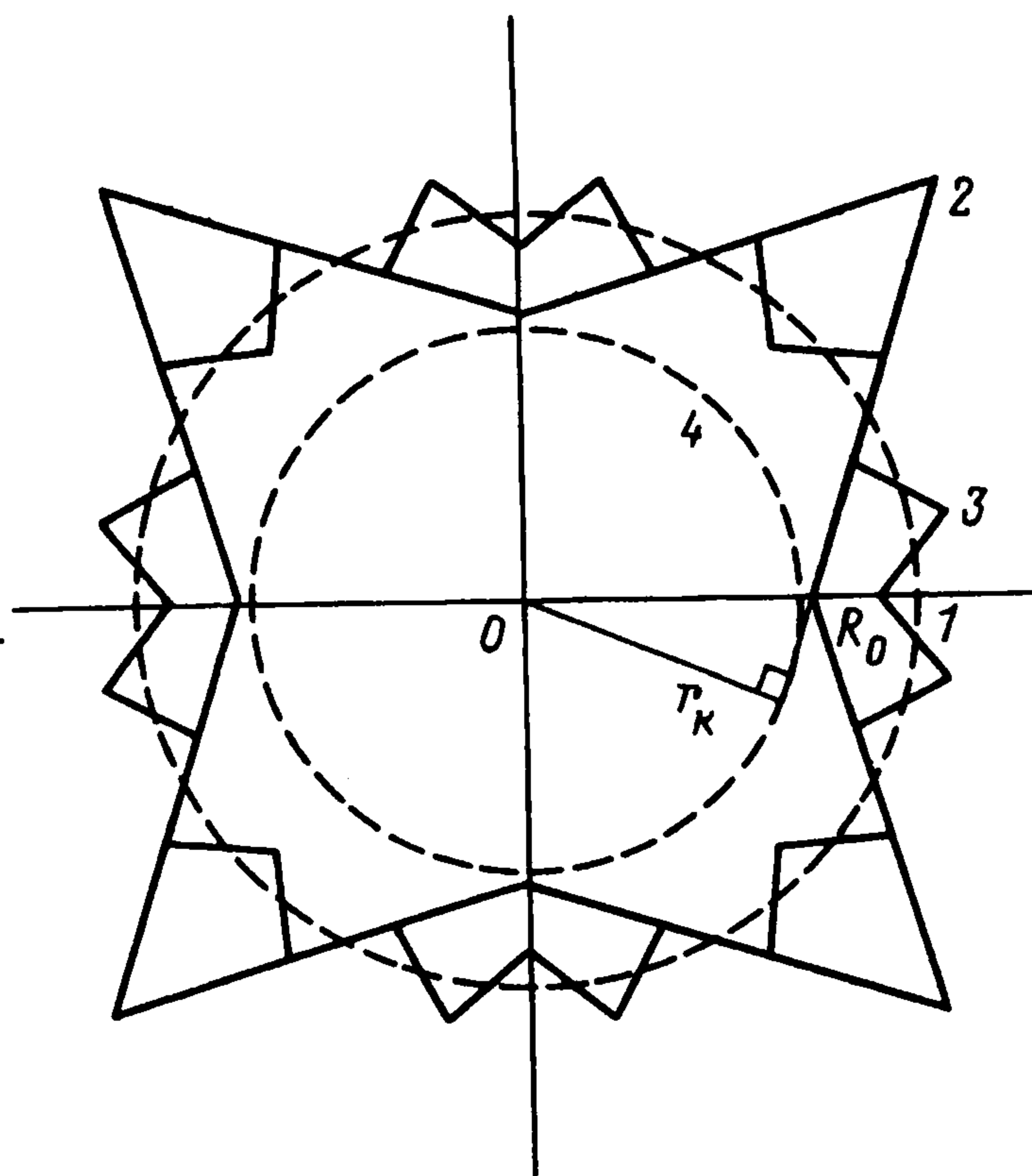
Если t_k , а значит, и форма продольного контура АОТ однозначно находятся по r_k , то форма его поперечного контура даже при известном r_k определяется неоднозначно. Действительно, функция поперечного контура $R(\theta)$ в соответствии с соотношениями (3.5) и (3.6) должна удовлетворять уравнению

$$R^2 / (R^2 + R'^2)^{1/2} = r_k$$

Его решениями являются дуги двух типов: 1) дуга окружности с $R(\theta) \equiv r_k$ ("нулевая" дуга) и 2) отрезок прямой, касающейся окружности радиуса r_k , с $R(\theta) = r_k / \cos(\theta - \theta_1)$ ("положительная" дуга), где θ_1 – постоянная интегрирования. Непрерывная на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $R(\theta)$ должна при этом удовлетворять условиям (3.4). Наличие в поперечном контуре каждой из дуг разных типов зависит не только от величины r_k , но и от



Фиг. 1



Фиг. 2

заранее заданного количества точек разрыва ее производной $R'(\theta)$. Как показано ниже, при $r_k < 1$ такие точки обязательно есть.

Поперечный контур можно составить из N одинаковых циклов, где N – целое число. Каждый цикл состоит из двух гладких симметричных дуг, допускающих в точке сопряжения разрыв $R'(\theta)$. Тогда при известном $r_k \leq 1$ и любом $N \geq 2$ поперечный контур полностью определяется функцией $R(\theta)$ в полуцикле на отрезке $[0, \pi/N]$ и может состоять из двух, гладко сопрягающихся в точке $\theta = \theta_0$, дуг: 1) нулевой дуги при $\theta \in [0, \theta_0]$ и 2) положительной – при $\theta \in [\theta_0, \pi/N]$. Значения θ_0 и θ_1 находятся из соотношений

$$R_0 = \frac{r_k}{\cos(\theta_0 - \theta_1)}, \quad \text{tg}(\theta_0 - \theta_1) + \frac{NR_0^2}{\pi - N\theta_0 R_0^2} = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{N} - \theta_0\right) \quad (3.9)$$

Здесь R_0 – минимальное значение $R(\theta)$, причем без ограничения общности $R_0 = R(0)$. Если

$$r_k \leq R_n, \quad R_n = [(\pi/N)/\text{tg}(\pi/N)]^{1/2} \quad (3.10)$$

то нулевая дуга у поперечного контура отсутствует ($\theta_0 = 0$). При нарушении условия (3.10) и $r_k < 1$ контур содержит и положительную, и нулевую дуги. В этом случае $\theta_1 = \theta_0$, а $R_0 = r_k$.

На фиг. 1 в качестве примера изображены поперечные контуры 1–3 при $N = 4$ и $r_k = 1, 0,95$ и $0,5$. Функции $R(\theta)$ этих контуров удовлетворяют условиям (3.4). Штрихами даны окружности 4 и 5 радиусов $r_k = 0,95$ и $0,5$. Их касаются прямые, из отрезков которых состоят положительные дуги контуров 2 и 3. Так как при $N = 4$ значение $R_n = 0,89$, то у контура 3 с $r_k = 0,5$, в согласии с условием (3.10), нулевой дуги нет, тогда как контур 2 с $r_k = 0,95$ содержит и положительную, и нулевую дуги. Поперечные контуры 1–3, изображенные на фиг. 1, принадлежат АОТ, если их продольные контуры $\varphi(x) = t_k x$ имеют $t_k = t^*/r_k$. Это, в частности (см. соотношение (3.8)), ведет к тому, что АОТ с поперечным контуром 3 ($r_k = 0,5$) имеет в два раза меньшую длину, чем круговой конус этого класса с контуром 1.

Как следует из соотношений (3.9), меняя при фиксированном r_k значения N , можно получать поперечные контуры с разными минимальными радиусами R_0 . Увеличение числа циклов N приводит к росту R_0 , что позволяет варьировать поперечные размеры АОТ. Такую возможность демонстрирует фиг. 2. Сплошными линиями изображены поперечные контуры 2 и 3, построенные при $r_k = 0,7$ и $N = 4$ и 16. Эти контуры ограничивают ту же площадь, что и окружность 1, которая соответствует поперечному контуру кругового конуса с $r_k = 1$. Окружность 4 на фиг. 2 имеет радиус $r_k = 0,7$, и ее касаются прямые, из отрезков которых состоят контуры 2 и 3. Зафиксировав r_k и увеличивая N , можно сделать радиус R_0 как угодно мало отличным от единицы. При этом, так как все эти контуры имеют одинаковое значение r_k , то соответствующие им АОТ, имеют один и тот же продольный контур с $\varphi(x) = t_k x$ с t_k из (3.7).

Таким образом, при известном значении t^* , которое зависит только от параметров среды и скорости движения, можно построить бесконечное множество АОТ, имеющих конический продольный контур с функцией $\varphi(x) = t_k x$ и поперечный контур, в общем случае состоящий из дуг окружности и отрезков прямых, с функцией $r(\theta) = r_k$, причем t_k и r_k связаны условием (3.7). При заданной площади основания S_b все эти АОТ имеют одинаковое сопротивление D^* (2.1) и дают решение задачи о форме тела минимального сопротивления.

Данному классу тел при заданной S_b принадлежат тела разной длины и разных поперечных размеров, которые можно непрерывно изменять, не меняя сопротивления тела. Это свойство АОТ можно использовать в случаях, когда кроме задания S_b на искомое тело наложены дополнительные ограничения. Если при таких ограничениях можно подобрать удовлетворяющее им АОТ, то оно, доставляя функционалу сопротивления (1.8) абсолютный минимум (2.1), будет телом минимального сопротивления в задаче с указанными ограничениями.

4. Оптимальные формы при задании дополнительных ограничений на геометрию тела. Пусть задана площадь основания S_b и по известным параметрам среды и скорости движения найдено значение $\alpha = \alpha^*$, при котором функция $f(\alpha)$ (1.9) на отрезке $[0, 1]$ достигает минимума. Пусть $\alpha^* \in (0, 1)$ и по нему из (2.2) определено значение t^* .

Лемма 1. Если в качестве дополнительного условия задана максимально допустимая (предельная) длина тела L , то всегда существует АОТ, дающее решение задачи о форме тела минимального сопротивления и доставляющее функционалу сопротивления абсолютный минимум.

Доказательство. По заданным S_b и L найдем $t = (S_b/\pi)^{1/2}/L$. Введем обозначение $t_m = \max(t, t^*)$. Любое АОТ с $\varphi(x) = t_k x$, где $t_k \geq t_m$, и с $r_k = t^*/t_k$ будет решением задачи, так как его длина согласно (3.8) $x_k \leq L$. При этом, если $t_k > t^*$, то АОТ имеет звездообразное поперечное сечение, состоящее из произвольного числа N симметричных циклов, причем, если выполнено условие (3.10), то нулевая дуга у поперечного контура отсутствует.

Лемма 2. Если в качестве дополнительных ограничений на геометрию тела заданы длина L и характерный поперечный размер основания тела, то всегда существует АОТ, дающее решение задачи о форме тела минимального сопротивления и доставляющее функционалу сопротивления абсолютный минимум.

Доказательство. Возьмем в качестве заданного поперечного размера тела минимальный радиус сечения его основания $R_0 < 1$. В силу соотношений (3.9) и (3.10) всегда существует целое значение N^* , такое, что при всех $N \geq N^*$ будет выполнено условие $R_n > R_0$, которое означает, что при этих N нулевой дуги у оптимального контура нет. Тогда для этих N значение r_k определится из выражения

$$r_k = R_0 / [1 + \operatorname{tg}^2(\theta_1)]^{1/2}, \quad \operatorname{tg}(\theta_1) = (R_0^2 - R_n^2) / (\pi / N) \quad (4.1)$$

Так как при $N \rightarrow \infty$ значение $r_k \rightarrow 0$, то всегда найдутся N , r_k и $t_k = t^*/r_k$, такие, что будут выполнены условия: $t_k > (S_b/\pi)^{1/2}/L$ и $x_k \leq L$. Следовательно, всегда существует АОТ, которое будет допустимым в задаче и которое будет ее решением.

Аналогичным способом доказывается

Лемма 3. Если в качестве дополнительных ограничений на геометрию тела заданы количество циклов поперечного контура тела, а также его предельная длина или характерный поперечный размер сечения основания, то всегда существует АОТ, дающее решение задачи о форме тела минимального сопротивления и доставляющее функционалу сопротивления абсолютный минимум.

Доказательство лемм 1–3 велось с учетом условия $\alpha^* < 1$, когда $t^* < \infty$, и реализуется случай невырожденных экстремальных поверхностей. Однако они остаются верными и при $\alpha^* = 1$. В этом случае решение дает любая площадка с заданной S_b с нормалью, направленной по вектору скорости потока.

Следствием лемм 1–3 является

Теорема. Если при заданной площади основания S_b есть хотя бы один произвол в задании предельной длины тела L , характерного поперечного размера основания R_b или числа циклов N поперечного контура и нет других ограничений на геометрию тела, то всегда существует АОТ, дающее решение задачи о форме тела минимального сопротивления и доставляющее функционалу сопротивления (1.8) абсолютный минимум (2.1).

При одновременном задании произвольных значений S_b , L , R_b и N может не быть АОТ, удовлетворяющего всем заданным условиям. Подобная ситуация возникает, когда при заданных S_b и N берутся значения $L < x_k^*$, где x_k^* – длина конуса из класса АОТ (3.8), а минимальные значения радиуса основания $R_b > R_0$, где R_0 при заданном N находится из соотношения (3.9) по $r_k = t^*/t$, где $t = (S_b/\pi)^{1/2}/L$. В таких случаях оптимальные конфигурации имеют более сложную форму и их построение требует привлечения упрощений и подходов, использовавшихся ранее [7, 8]. В частности, тогда, как было показано [8] для тонких тел при законе сопротивления (1.4), оптимальный продольный контур не прямолинейный и в носике тела аппроксимируется степенной функцией с показателем степени $3/4$.

При использовании результатов работ [7, 8], где в конечную постановку задачи включены все указанные выше ограничения на геометрию тела, следует избегать допущенных в них ошибок и неточностей.

Не останавливаясь на детальном разборе решения [7], отметим только, что в нем уже при записи уравнения Эйлера для функции продольного контура допущена ошибка, а при поиске оптимального поперечного контура сделан некорректный вывод о том, что при заданных произвольных значениях S_b , L , R_0 и варьировании параметра N решения задачи не существует. Однако, как следует из доказательства леммы 2, существует бесконечное множество форм АОТ, являющихся в этом случае решением задачи, с длинами $x_k \leq L$, которые при необходимости всегда могут быть дополнены до заданной длины L иглой нулевой толщины впереди тела.

При решении задачи о пространственной форме минимального сопротивления в той же постановке, что и в [7], но с использованием для сил, действующих на элемент поверхности тела, соотношений (1.4) [8], также получен ряд неточных выводов относительно оптимальной пространственной формы. В частности, следует отметить, что при заданных S_b , L , R_0 и N оптимальный поперечный контур не может содержать выпуклой дуги, отличной от нулевой, если нет дополнительных ограничений на продольный контур. Регулярная выпуклая дуга в решении [8] появляется при значениях $R_0 < t^*/t$, где $t = (S_b/\pi)^{1/2}/L$. Но в этом случае, всегда есть АОТ с поперечным контуром из N симметричных циклов и значением $r_k = R_0$, если $R_0 \geq R_n$, и $r_k < R_0$, если $R_0 < R_n$, и тогда r_k определяется по R_0 и R_n из выражения (4.1). Так как у этого тела $t_k = t^*/r_k > t$, то его длина (3.8) $x_k \leq L$, которая при необходимости

может быть дополнена до заданной длины L иглой нулевой толщины. Выпуклая дуга у оптимального поперечного контура в постановке задачи [8] возможна лишь при дополнительном ограничении на продольный контур, когда, например, он считается заданным.

Выше принималось, что поперечный контур тела состоит из N одинаковых симметричных циклов. На самом деле класс АОТ значительно шире. Очевидно, что ему принадлежит любая конфигурация с коническим продольным контуром с функцией $\varphi(x) = t_k x$, где $t_k \geq t^*$, и поперечным контуром $R(\theta)$, который, удовлетворяя условиям (3.4), составлен из любых комбинаций дуг окружности радиуса $r_k = t^*/t_k$ и отрезков прямых, ее касающихся. Можно показать, что поперечные контуры несимметричных АОТ, также как и симметричных, могут не содержать дуг окружности.

5. Частный случай силового воздействия среды на элемент поверхности тела. Рассмотрим частный случай зависимости $f(\alpha)$, когда силовое воздействие среды на элемент поверхности тела может быть описано соотношениями (1.4) с $B_1 = B_2 = 0$. Данная модель силового взаимодействия охватывает не только гиперзвуковые режимы тела в газе с постоянным коэффициентом трения ($A_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, а $C_1 = A_2 = 0$), но и высокоскоростные режимы движения тела в плотных средах, типа грунтов и металлов, когда при $A_2 = \mu_0 A_1$, $C_2 = \mu_0 C_1$ реализуется модель движения с кулоновым трением (μ_0 – коэффициент сухого трения), а при $A_1 \neq 0$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ и $A_2 = 0$ – модель движения с постоянным трением.

В рассматриваемом случае

$$f(\alpha) = A_1 \alpha^2 + (A_2 \alpha + C_2 / \alpha) \gamma + C_1, \quad \gamma = (1 - \alpha^2)^{1/2} \quad (5.1)$$

Локальный экстремум этой функции достигается при значении α , определяемом как корень уравнения

$$f'(\alpha) = \alpha^2 (2\alpha\gamma + A(1 - 2\alpha^2)) - C = 0, \quad A = A_2 / A_1, \quad C = C_2 / A_1 \quad (5.2)$$

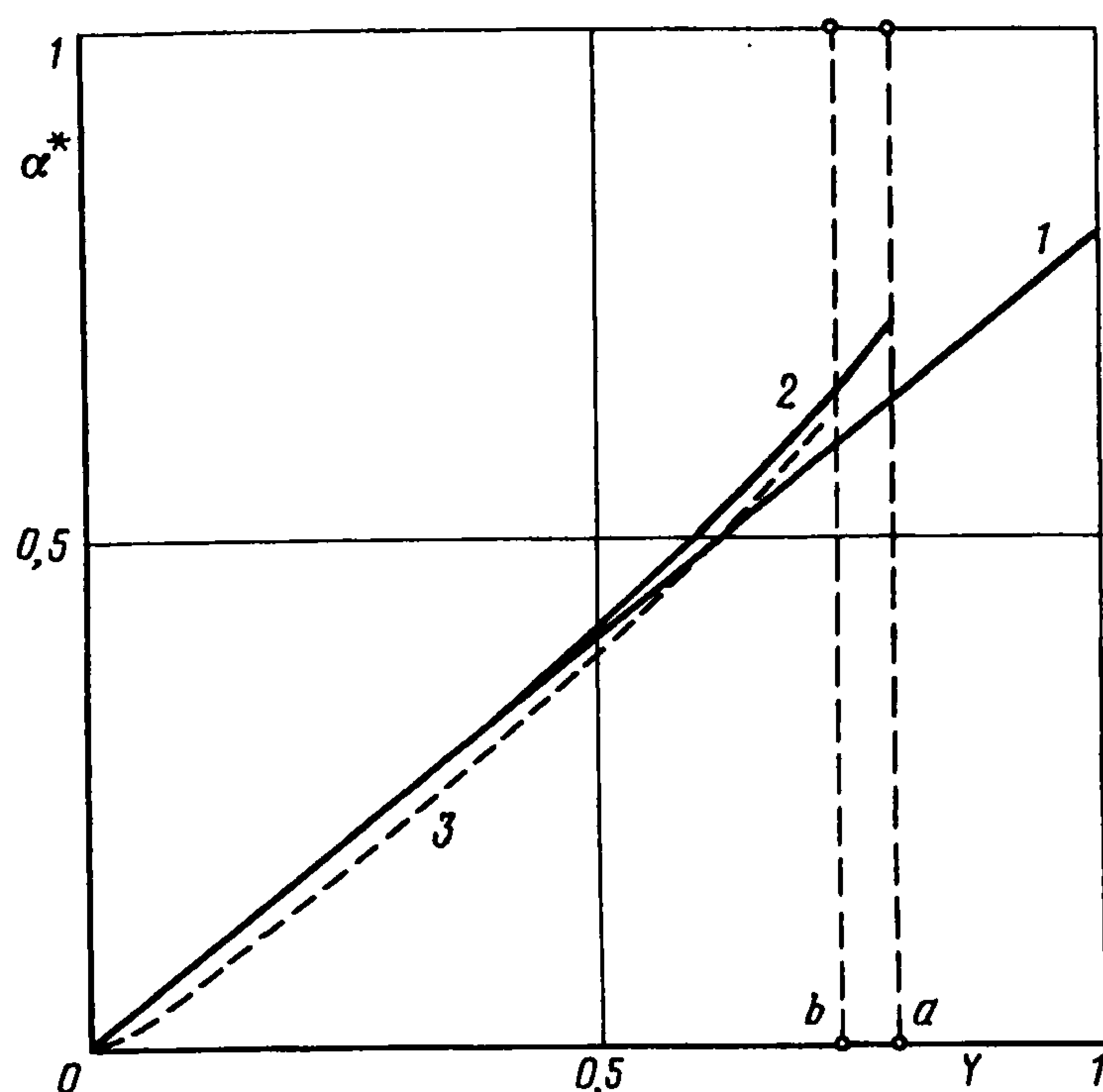
Глобальный минимум функции $f(\alpha)$ на отрезке $[0, 1]$ ищется среди ее локальных и краевых (возможных при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) минимумов.

Для модели с постоянным трением ($A = 0$, $C \neq 0$) решение уравнения (5.2) определяется значением одного параметра $Y = C^{1/3}$ и в случае тонкого тела ($\alpha^2 \ll 1$) имеет вид

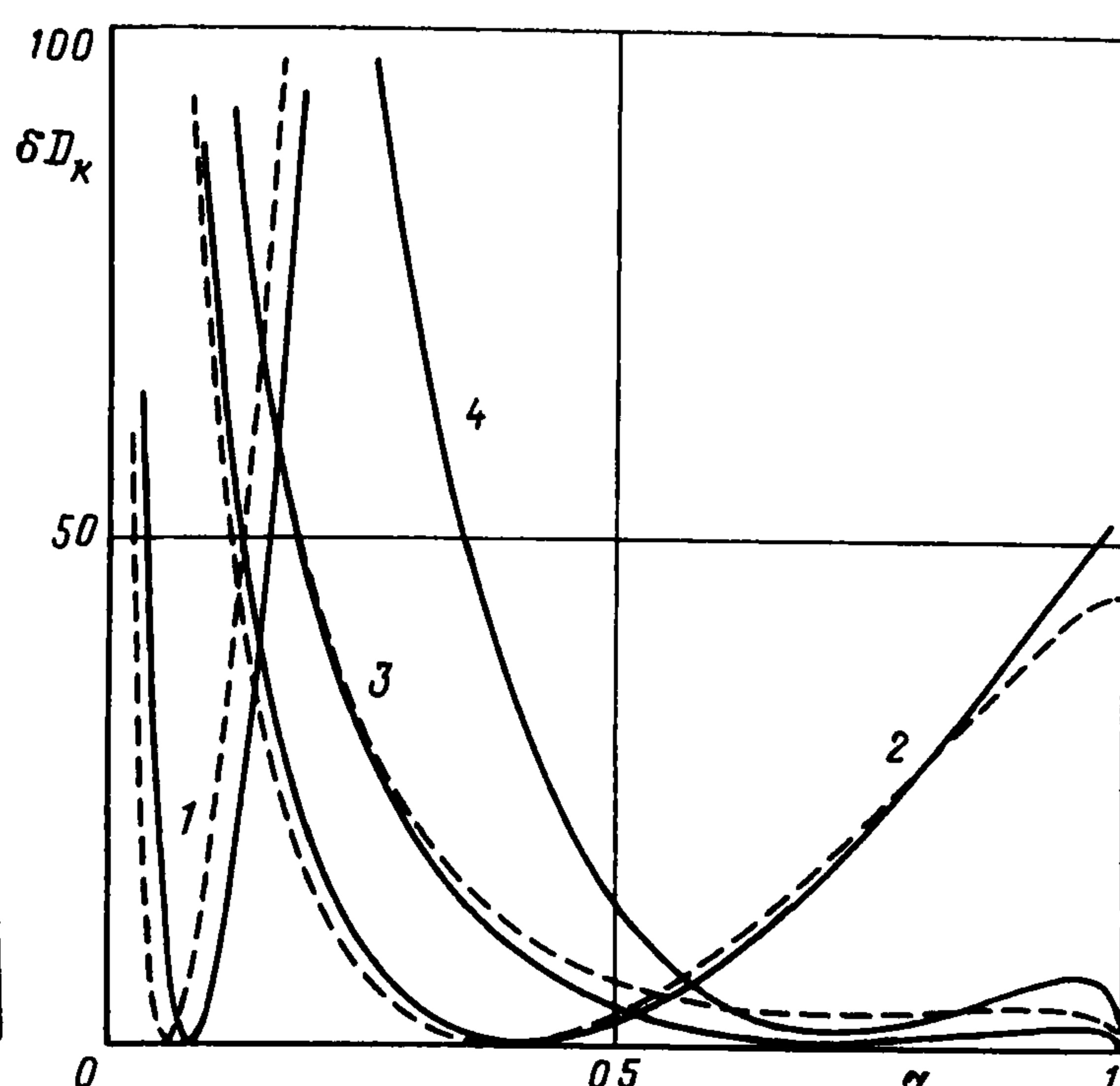
$$\alpha^* = 2^{-1/3} Y \quad (5.3)$$

В приближении тонкого тела решение (5.3) при $Y \leq 2^{1/3}$ определяет глобальный минимум функции $f(\alpha)$ на отрезке $[0, 1]$, который при $Y \geq 2^{1/3}$ достигается в точке $\alpha = 1$, когда предположение о тонкости тела уже неверно. Зависимость α^* от Y (5.3) представлена на фиг. 3 кривой 1. При $Y < 0,5$ она близка к точным решениям задачи о минимуме функции $f(\alpha)$, найденным без ограничения на толщину тела. На фиг. 3 точные решения даны кривой 2 (для модели постоянного трения с $A = 0$) и кривой 3 (для модели трения Кулона с $A = \mu_0 = 0,2$). Точками a и b для кривых 2 и 3 отмечены значения Y^* , при которых локальный и краевой (при $\alpha = 1$) минимумы функции $f(\alpha)$ совпадают. При $Y > Y^*$ минимум достигается в точке $\alpha = 1$.

Для разных Y проведено сравнение сопротивления АОТ D^* с сопротивлением круговых конусов D_k , имеющих одинаковую площадь основания. На фиг. 4 в зависимости от α даны значения $\delta D_k = (D_k/D^* - 1) \times 100$, показывающие превышение (в процентах) сопротивления конуса D_k с полууглом раствора $\beta = \arcsin \alpha$ значения D^* . Кривые 1–3 построены для $Y = 0,1$, $0,5$ и $0,8$ соответственно. Сплошные линии фиг. 4 соответствуют модели постоянного трения с $C_1/A_1 = 5Y^3$, штриховые – модели трения Кулона с $\mu_0 = 0,2$. В качестве примера на фиг. 4 для $C_1 = 0$ приведена кривая 4, построенная для модели постоянного трения при $Y = 0,8$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Так как $D_k = qf(\alpha)S_b$, а сопротивление тел из класса АОТ D^* определяется выражением (2.1), то кривые 1–4 на фиг. 4, кроме δD_k при тех же Y демонстрируют поведение функции $(f(\alpha)/f(\alpha^*) - 1)$ в зависимости от α . В частности, кривые 3 и 4 показывают поведение этой функции на отрезке $[0, 1]$ при $Y = 0,8$, когда $\alpha^* = 1$, и для обеих моделей трения минимум функции $f(\alpha)$ от локального перешел к краевому. Итак, при выбранном законе сопротивления при любом Y всегда существует область значений α , в которой тела из класса АОТ имеют значительно меньшее сопротивление по сравнению с конусами той же длины и той же площади основания с $\beta = \arcsin \alpha$.

6. Заключение. В рамках закона локальности, без ограничений на толщину тела и вид функции, задающей модель взаимодействия, построены тела, названные "абсолютно оптимальными" (АОТ), которые при разной конфигурации имеют одинаковое сопротивление, меньше которого при заданной площади основания получить нельзя. Эти тела конические. Их поверхность образована участками кругового конуса, которые могут отсутствовать, и участками касающихся его плоскостей. Угол при вершине кругового конуса определяется характеристиками среды и скоростью движения через постоянные, входящие в закон сопротивления. АОТ могут быть "звездообразными" с поперечными контурами из целого числа симметричных циклов. Доказана теорема с перечислением ограничений на геометрию тела, при которых АОТ являются решениями задачи о форме тела минимального сопротивления. В частности, АОТ всегда будет решением такой задачи при заданных длине и площади основания искомого тела. Для частного вида закона сопротивления, включающего в себя закон сопротивления Ньютона с постоянным трением, проведено сравнение сопротивлений АОТ и эквивалентных им по длине и площади основания круговых конусов. Показано, что при известном параметре трения всегда есть относительные толщины тела, при которых сопротивление АОТ значительно меньше.

Полученные результаты согласуются с основными выводами [9, 10] о том, что значительного снижения аэродинамического сопротивления в классе тел, эквивалентных по длине и площади основания, можно достичь переходом от осесимметричных тел к звездообразным. Действительно, для газа местный коэффициент трения при гиперзвуковых скоростях – величина порядка 10^{-2} – 10^{-3} . Считая его постоянным ($Y \approx 0,1$), из соотношения (5.3) найдем $\alpha^* \approx 0,1$. При этом полуугол раствора кругового конуса из класса АОТ $\beta^* \approx 5^\circ$, а его относительная толщина $2t^* \approx 0,2$. Если $t = (S_b / \pi)^{1/2} / L > t^*$, то, как показано выше, при заданных S_b и L решением задачи о

теле минимального сопротивления будет АОТ со звездообразным поперечным сечением. Ранее [9, 10] теоретически и экспериментально исследовались аэродинамические характеристики пирамидальных тел с плоскими гранями с $t = 0,2-0,4$. Кривая 1 на фиг. 4, построенная для постоянного трения при $Y = 0,1$ (сплошная линия) и $\alpha^* = 0,08$, дает в этом случае превышение сопротивления конуса с полууглом раствора $\beta = \arcsin \alpha$ над $D = D^*$ АОТ. Следовательно, как и ранее [9, 10], при указанных t сопротивление звездообразных АОТ значительно меньше сопротивления эквивалентных круговых конусов.

В рассмотренных здесь задачах АОТ получились коническими. Это следует иметь в виду при анализе результатов недавно опубликованной работы [11], где численно и экспериментально определялись аэродинамические характеристики звездообразных тел, продольные контуры которых со ссылками на [4] выбирались степенными: $\varphi(x) = kx^n$ с $n = 3/4$. Однако напомним, что оптимальное значение $n = 3/4$ получалось [4] при задании S_b, L, N и R_0 , тогда как сравнение характеристик звездообразных тел со степенными и коническими продольными контурами проведено [11] при задании L и объема.

В заключение отметим, что обзор [12] результатов теоретических и экспериментальных исследований уменьшения сопротивления звездообразных тел при их движении в плотных средах типа грунтов и металлов показал, что при скоростях проникания порядка 10^2-10^3 м/с приближенные модели вида (1.4) можно применять для записи напряжений на поверхности пространственных тел. Это подтверждает возможность использования результатов настоящей работы при оптимизации формы пространственных тел и для их движения в плотных средах.

Автор благодарит А.Н. Крайко, Г.Г. Черного и Н.А. Остапенко за внимание к работе, обсуждение результатов и замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01211 и 96-15-96158).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А.Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 185–189.
2. Miele A., Saaris G.R. On the optimum transversal contour of a body at hypersonic speeds // *Astronautica Acta*. 1963. V. 9. № 3. P. 184–198.
3. Гонор А.Л. Конические тела наименьшего сопротивления в гиперзвуковом потоке газа // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 383–386.
4. Chernyi G.G., Gonor A.L. Transversal contour of minimum pressure drag // *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*. Edited by A. Miele. Academic. New York, 1965. P. 283–295. = Гонор А.Л., Черный Г.Г. Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. Миеле А. М.: Мир, 1969. С. 292–305.
5. Miele A., Saaris G.R. Transversal contour of minimum total drag // *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes* / Ed. A. Miele. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. P. 296–314. = Миеле А., Саарис Дж. Поперечный контур тела минимального полного сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле М.: Мир, 1969. С. 306–324.
6. Bellman R. Young's inequality and the problem of the optimum transversal countour // *Theoty of Optimum Aerodynam: Shapes* / Ed. A. Miele. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. P. 314–315. = Беллман Р. Неравенство Юнга и задача об оптимальном поперечном контуре // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 325–327.
7. Гонор А.Л. Определение формы пространственного оптимального тела с учетом силы трения // Изв. АН. СССР. Механика. 1965. № 4. С. 24–30.
8. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 95–106.

9. Зубин М.А., Лапыгин В.И., Остапенко Н.А. Теоретическое и экспериментальное исследование структуры сверхзвукового обтекания тел звездообразной формы и их аэродинамических характеристик // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 34–40.
10. Остапенко Н.А. Аэродинамическое сопротивление пространственных тел со звездообразным поперечным сечением при сверхзвуковых скоростях и проблемы его расчета // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 57–69.
11. Sabeen J., Lewis M., Mee D., Paull A. Performance study of a power law starbody // Journal of Spacecraft and Rockets. V. 36. № 5. Sept.-Oct. 1999. P. 646–652.
12. Ведерников Ю.А., Щепановский В.А. Оптимизация реогазодинамических систем. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 1995. 238 с.

Москва
e-mail: yakunina@inmech.msu.su

Поступила в редакцию
10.XII.1999