

УДК 532.5 : 534.1

© 2000 г. В.А. Калиниченко, А.В. Кравцов,
Р. Родригес-Мижангес, С.Я. Секерж-Зенькович,
Р. Флорес-Эспиноза

ГАРМОНИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ СОСУДЕ

Изучается линейная задача о параметрическом возбуждении стоячих трехмерных волн на свободной поверхности маловязкой жидкости в сосуде произвольной формы, совершающем вертикальные колебания. Рассматривается так называемая гармоническая неустойчивость, при которой собственная частота возбуждаемых волн близка к частоте колебаний сосуда. При использовании идеи пограничного слоя и метода усреднения Крылова – Боголюбова выводятся приближенные формулы для величин определяющих условия гармонической неустойчивости – для пороговой амплитуды колебаний сосуда и границ резонансных зон. Экспериментально показана возможность возникновения гармонической неустойчивости на поверхности воды в прямоугольном сосуде. Рассчитанные величины пороговой амплитуды и границ резонансных зон хорошо согласуются с измеренными в эксперименте.

При колебаниях слоя тяжелой жидкости в вертикальном направлении обычно возникает так называемая субгармоническая неустойчивость, когда собственная частота возбуждаемых волн близка к половине частоты колебаний сосуда. Такая неустойчивость достаточно хорошо изучена, как для идеальной, так и для вязкой жидкости [1–3]. Менее изучена гармоническая неустойчивость. Изучалась [4] возможность возникновения такой неустойчивости, причем в сосуде бесконечно больших горизонтальных размеров; показано, что гармоническая неустойчивость может проявиться лишь в достаточно вязкой жидкости малой глубины.

Ниже выводятся условия гармонической неустойчивости поверхности маловязкой жидкости в сосуде конечных горизонтальных размеров и осуществляется экспериментальная проверка этих условий. Для решения задачи поле скорости жидкости разбивается на потенциальную и вихревую компоненты и используется погранслойная методика. Впервые эффективность такого подхода была продемонстрирована [5, 6] при изучении свободных колебаний маловязкой жидкости. По аналогии с изложенным ранее [3] применяются также идеи метода усреднения Крылова – Боголюбова.

1. Постановка задачи. Сосуд содержащий вязкую несжимаемую жидкость со свободной поверхностью совершает вертикальные колебания по закону $-s \cos \Omega t$. В состоянии равновесия свободная поверхность – горизонтальная плоскость. Предположим, что в момент времени $t = 0$ в жидкости возникает возмущение в виде стоячей волны с бесконечно малой амплитудой и частотой ω , близкой к частоте колебаний Ω сосуда. Требуется найти условия, при которых первоначальное возмущение будет возрастать с увеличением времени.

В системе координат, жестко связанной с сосудом, линейные уравнения и граничные условия для скорости U , давления P и возвышения H свободной поверхнос-

ти Σ имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{e}_z s \Omega^2 \cos \Omega t = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \mathbf{e}_z g + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad \text{в } D$$

$$\mathbf{U} = 0 \quad \text{на } S$$

$$-P - \frac{\partial P}{\partial z} H + 2\nu\rho \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad \nu\rho \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \xi = x, y$$

$$U_z = \frac{\partial H}{\partial t}(x, y, t) \quad \text{на } \Sigma$$

Здесь ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость жидкости, g – ускорение силы тяжести, $\mathbf{e}_z$ – орт оси z , D – область, занятая жидкостью, S – твердая граница области D . Декартова система координат x, y, z выбрана так, что плоскость xy совпадает с поверхностью Σ , а ось z и единичный вектор $\mathbf{e}_z$ направлены вертикально вверх.

Введем безразмерные переменные, приняв за единицу длины характерный размер d сосуда, а за единицу времени – величину $1/\omega_0$, где ω_0 – наименьшая собственная частота колебаний идеальной двухслойной жидкости:

$$\mathbf{U} = d\omega \mathbf{u}, \quad P = -g\rho z + d^2\omega_0^2\rho p - \rho s\Omega^2 z \cos \Omega t, \quad H = \eta d$$

Представим вектор скорости $\mathbf{U}$ в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих:

$$\mathbf{u} = -\nabla\varphi + \mathbf{v}$$

Положим

$$p = \partial\varphi/\partial t$$

Сохраняя для всех безразмерных величин прежние обозначения, для функций φ , $\mathbf{v}$ и η получаем задачу

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } D \quad (1.1)$$

$$\nabla\varphi = \mathbf{v} \quad \text{на } S$$

$$F \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (1 + \sqrt{\varepsilon} \gamma \cos \Omega t) \eta + \varepsilon^2 2F \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial z} \right) = 0, \quad \xi = x, y; \quad v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) \quad \text{на } \Sigma$$

где $F = \omega_0^2 d/g$, $\varepsilon^2 = \nu/(\omega_0 d^2)$, $\sqrt{\varepsilon} \gamma = s\Omega^2/g$, $\gamma = O(1)$. Считая, что жидкость мало-вязкая, а ускорение сосуда мало по сравнению с ускорением силы тяжести, принимаем $\varepsilon \ll 1$.

2. Нулевое и первое приближения. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$\varphi = \Phi_0 + \sqrt{\varepsilon} \Phi_1 + \dots$$

$$\mathbf{v} = S\mathbf{v} + \Sigma\mathbf{v} \equiv S_0\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} S_1\mathbf{v} + \dots + \Sigma_0\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \Sigma_1\mathbf{v} + \dots \quad (2.1)$$

$$\eta = \eta_0 + \sqrt{\varepsilon} \eta_1 + \dots$$

Здесь Φ – регулярная часть асимптотического разложения, а Sv и Σv – пограничные части, существенные лишь в подобластях D_S и D_Σ примыкающих к поверхностям S и Σ соответственно.

Используя идею метода усреднения Крылова–Боголюбова, предположим, что каждая из функций в (2.1) зависит от пространственных переменных и от так называемых "медленно изменяющейся амплитуды" C , "быстрой фазы" ψ и "медленной фазы" θ .

Функции C , ψ и θ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \sqrt{\epsilon} A_1(C, \theta) + \epsilon A_2(C, \theta) + \dots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Delta + \sqrt{\epsilon} B_1(C, \theta) + \epsilon B_2(C, \theta) + \dots \\ \theta &= \psi - \Omega t, \quad \Delta = \omega - \Omega\end{aligned}\tag{2.2}$$

где $A_1(C, \theta)$, $B_1(C, \theta)$, ... – периодические функции θ , подлежащие, как и коэффициенты разложений (2.1) определению из задачи (1.1), (1.2). Будем также считать, что $\Delta = O(\epsilon)$.

При учете соотношений (2.2) частные производные по t , например от функции ϕ , запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \omega \frac{\partial \Phi_0}{\partial \psi} + \sqrt{\epsilon} \left(K_1(\Phi_0) + \omega \frac{\partial \Phi_1}{\partial \psi} \right) + \epsilon \left(K_2(\Phi_0) + K_1(\Phi_1) + \omega \frac{\partial \Phi_2}{\partial \psi} \right) + \dots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \psi^2} + \sqrt{\epsilon} \left(2\omega L_1(\Phi_0) + \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \psi^2} \right) + \\ &+ \epsilon \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \psi^2} + 2\omega L_2(\Phi_0) + 2\omega L_1(\Phi_1) + A_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial C^2} + 2A_1 B_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial C \partial \psi} + B_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \psi^2} \right) + \dots \\ K_n(\Phi_k) &\equiv \frac{\partial \Phi_k}{\partial C} A_n + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi} B_n, \quad k = 0, 1; \quad n = 1, 2 \\ L_n(\Phi_k) &\equiv \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \psi \partial C} A_n + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \psi^2} B_n, \quad k = 0, 1; \quad n = 1, 2\end{aligned}\tag{2.3}$$

Для пограничных функций имеют место аналогичные разложения.

Введем в области D локальные ортогональные криволинейные координаты s_1, s_2, s_3 , так что поверхность $s_3 = 0$ совпадает с S и $s_3 > 0$ в D . В области D_Σ введем декартовы координаты x, y, z , так что ось x совпадает с осью исходной системы координат, $y \in \Sigma$, а ось z направлена внутрь области D .

Требуем, чтобы пограничные функции удовлетворяли соотношениям

$$Sv \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \Sigma v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty\tag{2.4}$$

Подставляя разложения (2.1), (2.3) в (1.1), (1.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получаем последовательность краевых задач для определения коэффициентов разложений (2.1).

Нулевое приближение, т.е. функции, которые удовлетворяют задаче (1.1), (1.2) с точностью до $O(\sqrt{\epsilon})$ находятся из уравнений, подобных рассмотренным ранее [3].

Приведем лишь конечный результат

$$\Phi_0 = Cf_0 \cos \psi, \quad \eta_0 = -F\omega f_0|_{z=0} \sin \psi$$

$$S_0 \nu_\sigma = 0, \quad \Sigma_0 \mathbf{v} = 0$$

$$S_0 \nu_l = H_l^{-1} \partial f_0 / \partial s_l|_S C \exp(-\lambda \sigma) \cos(\psi - \lambda \sigma), \quad l = 1, 2, \quad \lambda = (\omega/2)^{1/2}$$

Здесь f_0 – собственная функция задачи

$$\Delta f_0 = 0 \quad \text{в } D$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} = F\omega^2 f_0 \quad \text{на } \Sigma,$$

(2.5)

отвечающая собственному значению $F\omega^2$, причем через n обозначена внутренняя по отношению к области D нормаль к границе этой области, а $H_1, H_2, (H_3 = 1)$ – коэффициенты Ламе системы координат s_1, s_2, s_3 .

Задача для функции Φ_1 имеет вид

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad \text{в } D, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S$$

(2.6)

$$F\omega^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \psi^2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2\omega F Q_1 f_0 - \gamma \omega^2 C f_0 \cos(2\psi - \theta) \quad \text{на } \Sigma$$

$$Q_i = A_i \sin \psi + C B_i \cos \psi, \quad i = 1, 2, \dots$$

Представим Φ_1 в виде

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(1)} + \Phi_1^{(2)}$$

где $\Phi_1^{(1)}$ зависит от ψ по законам $\sin \psi, \cos \psi$, а $\Phi_1^{(2)}$ – по законам $\sin 2\psi, \cos 2\psi$. Для $\Phi_1^{(1)}$ получаем задачу

$$\Delta \Phi_1^{(1)} = 0 \quad \text{в } D$$

(2.7)

$$\frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} - F\omega^2 \Phi_1^{(1)} = 2\omega F Q_1 f_0 \quad \text{на } \Sigma$$

Условие разрешимости задачи (2.7) имеет вид

$$\iint_{\Sigma} \left(f_0 \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} - \Phi_1^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial z} \right) d\Sigma = 0 \quad (2.8)$$

Выражая производные $\partial f_0 / \partial z, \partial \Phi_1^{(1)} / \partial z$ на Σ из (2.5), (2.7) и подставляя их в (2.8), получаем

$$2\omega F (A_1 \sin \psi + C B_1 \cos \psi) \iint_{\Sigma} f_0^2 d\Sigma = 0$$

Следовательно $A_1 = B_1 = 0$. При учете этого частное решение задачи (2.6) запишем в виде

$$\Phi_1 = \frac{1}{3} C \gamma f_0 \cos(2\psi - \theta)$$

Используя явное выражение для Φ_1 , находим

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} F \omega C \gamma \left(\frac{1}{3} \sin(2\psi - \theta) + \sin \theta \right) f_0|_{z=0}$$

Из третьего уравнения (1.1), рассмотренного в D_S , D_Σ , и условий (2.4) получаем

$$S_1 \nu_\sigma = \Sigma_1 \nu_\zeta = 0$$

Из второго уравнения (1.1), рассмотренного в D_S , первого условия (1.2) и условий (2.4) получаем задачи для функций $S_1 \nu_l$ ($l = 1, 2$)

$$\omega \partial S_1 \nu_l / \partial \psi = \partial^2 S_1 \nu_l / \partial \sigma^2$$

$$S_1 \nu_l = H_l^{-1} \partial \Phi_1 / \partial s_l \quad \text{на } S, \quad S_1 \nu_l \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow \infty$$

решение которых при учете явного выражения для Φ_1 запишем в виде

$$S_1 \nu_l = 1/3 H_l^{-1} \gamma \partial f_0 / \partial s_l \Big|_S C \exp(-\sqrt{\omega} \sigma) \cos(2\psi - \theta - \sqrt{\omega} \sigma)$$

Из второго уравнения (1.1), рассмотренного в D_Σ , третьего условия (1.2) и условий (2.4) получаем задачи для функций $\Sigma_1 \nu_\xi$ ($\xi = x, y$)

$$\omega \partial \Sigma_1 \nu_\xi / \partial \psi = \partial^2 \Sigma_1 \nu_\xi / \partial \zeta^2$$

$$\partial \Sigma_1 \nu_\xi / \partial \zeta = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad \Sigma_1 \nu_\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty$$

Следовательно, $\Sigma_1 \nu_\xi = 0$

Из третьего уравнения (1.1), рассмотренного в D_S , и условий (2.4) получаем

$$\Sigma_2 \nu_\xi = 0$$

$$S_2 \nu_\sigma = (2\omega)^{-1/2} CG(s_1, s_2) \exp(-\lambda \sigma) (\sin(\psi - \lambda \sigma) + \cos(\psi - \lambda \sigma))$$

$$G(s_1, s_2) = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial f_0}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial f_0}{\partial s_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial f_0}{\partial s_2} \right) \right] \Bigg|_{s_3=0}$$

3. Приближенные формулы для границ резонансных зон и пороговой амплитуды. Рассматривая задачу для функции Φ_2 , представим эту функцию в виде

$$\Phi_2 = \Phi_2^{(1)} + \Phi_2^{(2,3)}$$

где $\Phi_2^{(1)}$ зависит от ψ по законам $\sin \psi$, $\cos \psi$, а $\Phi_2^{(2,3)}$ – по законам $\sin 2\psi$, $\cos 2\psi$, $\sin 3\psi$, $\cos 3\psi$. Для $\Phi_2^{(1)}$ получаем задачу

$$\Delta \Phi_2^{(1)} = 0 \quad \text{в } D$$

$$\frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial n} = S_1 \nu_\sigma \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial z} - F \omega^2 \Phi_2^{(1)} = 2\omega F Q_2 f_0 + \quad (3.1)$$

$$+ \frac{\gamma^2 \omega}{4} C \left[\left(\frac{2}{3} - \cos 2\theta \right) \cos \psi - \sin 2\theta \sin \psi \right] f_0 \quad \text{на } \Sigma$$

Условие разрешимости задачи (3.1) имеет вид

$$\iint_S f_0 \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial n} dS - \iint_\Sigma \left(f_0 \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial z} - \Phi_2^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial z} \right) d\Sigma = 0 \quad (3.2)$$

Выражая производные $\partial f_0 / \partial z$, $\partial \Phi_2^{(1)} / \partial z$ на Σ , $\partial \Phi_2^{(1)} / \partial n$ на S из (2.5), (3.1) и подставляя

их в (3.2), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2}F\omega^{5/2}(\sin\psi + \cos\psi)I_S = 8(A_2 \sin\psi + CB_2 \cos\psi)I_\Sigma + \\ + C\gamma^2\omega \left[\left(\frac{2}{3} - \cos 2\theta \right) \cos\psi - \sin 2\theta \sin\psi \right] I_\Sigma \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$I_S = \iint_S (\nabla_2 f_0)^2 dS, \quad I_\Sigma = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial f_0}{\partial z} \right)^2 d\Sigma$$

Приравнявая в (3.3) отдельно коэффициенты при $\sin\psi$ и $\cos\psi$, находим функции $A_2(C, \theta)$ и $B_2(C, \theta)$. Подставим эти функции в систему (2.2), рассмотренную с точностью $O(\epsilon)$. Имеем

$$\frac{dC}{dt} = -\epsilon\alpha C + \epsilon C \frac{\gamma^2\omega}{8} \sin 2\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \Delta - \epsilon\alpha + \epsilon \frac{\gamma^2\omega}{8} \left(\cos 2\theta - \frac{2}{3} \right) \quad (3.4)$$

$$\alpha = 2^{-3/2} F \omega^{5/2} I_S / I_\Sigma$$

Для исследования на устойчивость тривиального решения $C = 0, \theta = \text{const}$, сведем (3.4) к линейной системе с помощью замены $u = C \cos \theta, v = C \sin \theta$. Имеем

$$\frac{du}{dt} = -\epsilon\alpha u - \epsilon \left(\bar{\Delta} - \frac{\gamma^2\omega}{8} \right) v, \quad \frac{dv}{dt} = \epsilon \left(\bar{\Delta} + \frac{\gamma^2\omega}{8} \right) u - \epsilon\alpha v \quad (3.5)$$

$$\bar{\Delta} \equiv \Delta / \epsilon - \alpha - \gamma^2\omega / 12$$

Соответствующее системе (3.5) характеристическое уравнение имеет решения

$$\lambda_{\pm} = -\epsilon\alpha \pm \left((\gamma^2\omega / 8)^2 - \bar{\Delta}^2 \right)^{1/2}$$

Для нарастания амплитуды колебаний необходимо, чтобы выполнялось неравенство $(\gamma^2\omega / 8)^2 - \bar{\Delta}^2 > \alpha^2$

Отсюда, возвращаясь к размерным переменным, получаем

$$R_- < \frac{\Omega}{\omega} < R_+ \quad (3.6)$$

$$R_{\pm} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{1}{12} \left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^2 \pm \left[\frac{1}{64} \left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^4 - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

где $\Delta\omega \equiv -\epsilon\omega_0\alpha$ – сдвиг собственной частоты колебаний идеальной жидкости (см. [3]):

$$\Delta\omega = -2^{-3/2} v^{1/2} g^{-1} \omega^{5/2} I_S / I_\Sigma$$

Формула (3.6) дает выражения для частот, на которых возможно нарастание амплитуды поверхностных волн в жидкости вблизи гармонического резонанса ($\omega \approx \Omega$) при данной амплитуде s колебаний сосуда. При этом сама амплитуда s должна превышать некоторое пороговое значение s_0 , которое находится из условия

$$(sg^{-1}\omega^2)^2 / 8 \geq |\Delta\omega| / \omega$$

Отсюда получаем

$$s_0 = 2^{3/4} v^{1/4} g^{1/2} \omega^{-5/4} (I_S / I_\Sigma)^{1/2} \quad (3.7)$$

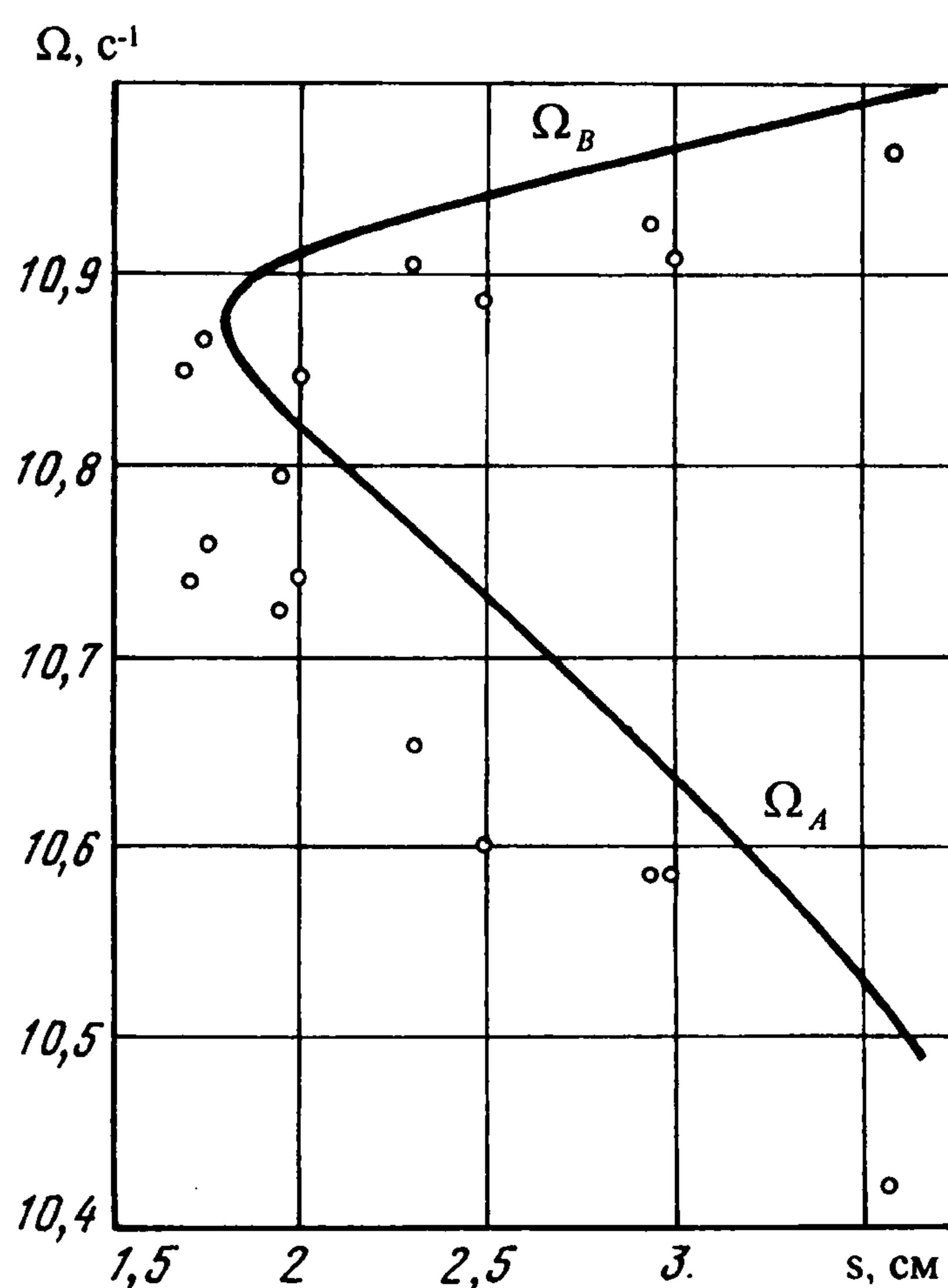
4. Сравнение с экспериментом. Для сосуда в форме прямоугольного параллелепипеда ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq 0$) имеем

$$I_S = \frac{ab}{2(2 - \delta_{0m}) \operatorname{sh}^2(k_{nm}h)} \left(\frac{\pi^2 \operatorname{sh}(2k_{nm}h)}{k_{nm}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{n^2}{a^2} \left(\frac{2 - \delta_{0m}}{b} + \frac{1}{a} \right) + \frac{m^2}{b^2} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] - 2h\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^3} + \frac{m^2}{b^3} \right) + k_{nm}^2 \right)$$

$$I_\Sigma = 2^{-2+\delta_{0m}} ab k_{nm}^2; \quad k_{nm} = \pi \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots,$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

С целью проверки теоретических результатов разд. 1–3 на установке, описанной ранее [7], проведена серия экспериментов по измерению ширины резонансных зон гармонического возбуждения второй волновой моды ($n = 2$) в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде ($a = 50$ см, $b = 4$ см), заполненном водой ($h = 15$ см, $\nu = 0,01$ см²/с). Частотный диапазон параметрического возбуждения волн согласно (3.6) определяется амплитудой s и частотой Ω колебаний сосуда. Использовалась следующая методика оценки границ этого диапазона. Сначала рассчитывалась собственная частота второй моды $\omega = 10,85$ с⁻¹ и устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega = \omega$ при выбранной амплитуде s . После выхода колебаний на стационарный режим частота Ω плавно изменялась так, чтобы высота волны уменьшалась. Это изменение продолжалось до значения Ω_B , при котором амплитуда волны практически равна нулю; Ω_B принималось за граничное значение. Другая граница Ω_A диапазона находилась путем дискретного изменения с малым шагом частоты колебаний сосуда в обратном направлении, т.е. при увеличении амплитуды волны. При каждом новом значении Ω установка выключалась. После полного прекращения волновых движений жидкости сосуду опять сообщались колебания с частотой Ω и фиксировалось наличие или отсутствие раскочки волны. Если в течение 20 мин стационарный режим колебаний жидкости не достигался, то соответствующее значение частоты принималось за граничное Ω_A .



Для второй волновой моды диаграмма устойчивости приведена на фигуре (сплошная линия – граница диапазона параметрического возбуждения, рассчитанная по формуле (3.6), светлые точки – данные эксперимента).

Видно наличие пороговой амплитуды колебаний сосуда $s_0 = 1,69$ см, ниже которой для любых Ω свободная поверхность жидкости остается невозмущенной. Согласно соотношению (3.7) соответствующее рассчитанное значение пороговой амплитуды $s_0 = 1,79$ см.

Отметим, что для тех же значений параметров a , b , h и n пороговая амплитуда s_0 в случае основного резонанса ($\omega \approx \Omega/2$) равна 0,04 см (см. [7]), т.е. в 40 раз меньше, чем при гармоническом резонансе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00337) и Национального Совета по Науке и Технологии Мексики (CONACYT, Mexico, Catedra Partimonial, С.Я. Секерж-Зенькович, Ref. 489100-2, Exp. 950060).

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T.B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 225. № 1163. P. 505–515.
2. Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface wave // Annual Review Fluid Dynamic. Palo Alto, Ca.: Annu. Revs Inc., 1990. V. 22. P. 143–165.
3. Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я. Параметрическое возбуждение колебаний вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 4. С. 611–619.
4. Kumar K. Linear theory of Faraday instability in viscous liquids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. № 1948. P. 1113–1126.
5. Моисеев Н.Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье–Стокса в случае, когда мала вязкость // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 3. С. 548–550.
6. Черноусько Ф.Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 836–847.
7. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальное исследование поверхностных волн, возбуждаемых при резонансе Фарадея // Изв. РАН МЖГ. 1995. № 1. С. 122–129.

Москва, Эрмосильо (Мексика)

Поступила в редакцию
26.1.1999