

УДК (532.5,551.466.65):534

© 2000 г. С.П. Никитенкова, Ю.А. Степанянц, Л.М. Чихладзе

**РЕШЕНИЯ
МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ Л.А. ОСТРОВСКОГО
С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Построены приближенные решения стационарного уравнения Л.А. Островского [1] с кубической нелинейностью, описывающего, в частности, волновые процессы во вращающихся средах. Найден новый интегральный инвариант этого уравнения, позволяющий замкнуть систему приближенных уравнений и избавиться от излишнего произвола в параметрах. Показано, что существует семейство периодических стационарных решений, представляющих собой комбинацию пилообразной волны со сглаженными вершинами и впадинами, в которых располагаются солитоны модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза различной полярности. Это семейство решений хорошо описывается приближенной аналитической теорией, в которой роль малого параметра, по существу, играет отношение характерного размера солитона к периоду пилообразной волны. Построенные аналитические решения хорошо согласуются с численными. Использование таких решений в качестве начальных данных для численного расчета в рамках нестационарного уравнения позволило установить степень их стационарности и устойчивости по отношению к малым возмущениям.

Уравнение Л.А. Островского изучалось во многих работах (см., обзоры [2, 3] и имеющиеся там ссылки). Были построены некоторые приближенные стационарные решения [4] (какие-либо точные решения не известны) и изучена динамика отдельных нестационарных возмущений солитонного типа [5].

Используемый ниже подход к анализу решений модифицированного уравнения Л.А. Островского с кубической нелинейностью аналогичен ранее применявшемуся для родственного уравнения Л.А. Островского с квадратичной нелинейностью [4, 5] и основан на сшивке двух асимптотических ветвей решений.

1. Уравнение Л.А. Островского и его модификация. Для описания длинных внутренних волн во вращающемся океане Л.А. Островским [5] было выведено приближенное уравнение

$$(v_t + \alpha v v_x + \beta v_{xxx})_x = f v \quad (1.1)$$

Коэффициенты α , β определяются структурой собственных функций соответствующей краевой задачи Штурма – Лиувилля, а коэффициент $f > 0$ пропорционален квадрату параметра Кориолиса.

Некоторым распределениям плотности жидкости в океане соответствуют случаи, когда линейный коэффициент α в (1.1) обращается в нуль (см., например, [6, 7]) и необходимо принимать во внимание эффекты следующего порядка малости по линейности. Тогда при соответствующем выборе масштабов вместо (1.1) возникает модифицированное уравнение Л.А. Островского с кубической нелинейностью

$$(v_t + \alpha_1 v^2 v_x + \beta v_{xxx})_x = f v \quad (1.2)$$

В отсутствие правой части данное уравнение сводится к известному модифицированному уравнению Кортевега – де Вриза (МКдВ), коэффициенты которого (α_1 и β) для внутренних волн хорошо известны, их можно найти, например, в [7].

Уравнение (1.2) обладает многими общими с уравнением (1.1) свойствами. Оно может быть выведено также для волн в других средах, не связанных с океанологией и вращением жидкости, поэтому представляет интерес исследование возможных типов его решений и построение, по крайней мере, приближенных стационарных решений.

2. Интегралы движения. Прежде всего перепишем исследуемое уравнение в безразмерном виде, используя новые нормированные переменные

$$t_n = t \left(288 \frac{\beta f}{-\sigma} \frac{f^4}{\alpha_1^2 \varepsilon^{10}} \right)^{1/4}, \quad x_n = x \left(72 \frac{-\sigma}{\beta f} \frac{f^4}{\alpha_1^2 \varepsilon^6} \right)^{1/4}, \quad u = v \left(\frac{1}{18} \frac{-\sigma}{\beta f} \alpha_1^2 \varepsilon^2 \right)^{1/4}$$

Здесь $\sigma = 1$, если $\beta f < 0$ и $\sigma = -1$, $\beta f > 0$. В этих переменных уравнение (1.2) приобретает следующий вид (индекс n далее опущен):

$$\left(u_t + 3u^2 u_x - \frac{\sigma}{4} u_{xxx} \right)_x = \frac{\varepsilon^2}{2} u \quad (2.1)$$

где ε – безразмерный параметр, а σ определяет тип дисперсии в коротковолновой области спектра: при $\sigma = 1$ ($\sigma = -1$) дисперсия положительна (отрицательна), т.е. фазовая скорость линейных возмущений растет (убывает) с ростом волнового числа.

Можно убедиться, что уравнение (2.1) обладает следующими интегралами движения:

$$I_1 \equiv \int u dx = 0, \quad I_2 \equiv \int u^2 dx = \text{const} \quad (2.2)$$

$$I_3 \equiv \frac{1}{4} \int \left(u^4 - \frac{\sigma}{2} u_\xi^2 + \varepsilon^2 \varphi_\xi^2 \right) d\xi = \text{const}; \quad u = \varphi_{\xi\xi}$$

где интегрирование проводится по периоду волны λ для периодических возмущений или по всей оси x для уединенных волн. Третий из интегралов имеет смысл гамильтониана, так что уравнение (2.1) можно записать в гамильтоновой форме

$$u_t = (\delta I_3[u] / \delta u)_\xi \quad (2.3)$$

где $\delta/\delta u$ – вариационная производная от функционала $I_3[u]$.

Рассмотрим семейство стационарных решений уравнения (2.1) вида $u(x, t) = u(x - ct)$, где c – скорость стационарной волны. Для решений этого класса получаем вместо (2.1) нелинейное уравнение в обыкновенных производных

$$\left(-cu + u^3 - \frac{\sigma}{4} u'' \right)'' = \frac{\varepsilon^2}{2} u \quad (2.4)$$

где штрих означает дифференцирование по "бегущей" координате $\xi = x - ct$.

Это уравнение обладает рядом дополнительных интегральных инвариантов, которые могут быть полезны при исследовании его решений. В частности, предполагая решения периодическими (отсутствие уединенных стационарных решений, было доказано ранее [8]), умножим уравнение (2.4) на функцию $u(\xi)$ и проинтегрируем его по периоду волны. В результате получим следующий интеграл движения:

$$I_4 \equiv \int \left(\frac{\varepsilon^2}{2} u^2 - cu'^2 + 3u'^2 u^2 - \frac{1}{4} u''^2 \right) d\xi = 0 \quad (2.5)$$

Еще один интеграл уравнения (2.4) можно получить, если ввести новую переменную w , имеющую смысл "потенциала" для $u = w'$, так что вместо (2.4) имеем

$$\left(-cw' + w'^3 - \frac{\sigma}{4}w'''\right)' = \frac{\varepsilon^2}{2}w \quad (2.6)$$

Можно убедиться, что на решениях этого уравнения сохраняется величина

$$I_5 \equiv H = 2\varepsilon^2 w^2 - \sigma w''^2 - 4cw'^2 + 2w'^4 \quad (2.7)$$

Наличие этого интеграла позволило понизить порядок исходного дифференциального уравнения до второго. Поскольку переменная ξ в это выражение явно не входит, его порядок можно еще понизить. Для этого нужно считать независимой переменной w , а w' рассматривать как функцию от w , т.е. $w' = F(w)$. Тогда получаем из (2.7) уравнение первого порядка

$$F^2(\sigma F_w'^2 + 4c - 2F^2) - 2\varepsilon^2 w^2 + H = 0 \quad (2.8)$$

Некоторые из найденных интегралов будут использованы в дальнейшем при построении приближенных решений.

3. Стационарные решения. В полном объеме стационарные решения уравнения (2.4) или вытекающего из него уравнения (2.8) исследовать не удастся. Если, однако, пренебречь либо высокочастотной дисперсией (ВЧД), формально полагая $\sigma = 0$ в (2.4), либо низкочастотной дисперсией (НЧД), полагая $\varepsilon = 0$, то решения полученного таким образом редуцированного уравнения можно исследовать простыми средствами, например с помощью метода фазовой плоскости. Эти решения представляют интерес в качестве асимптотических решений полного уравнения (2.4). На их основе, кроме того, можно построить некоторые классы приближенных решений, осуществляя "сшивку" двух таких асимптотических решений. Остановимся на построении подобного рода приближенных решений.

Положим сначала $\sigma = 0$ и найдем первый интеграл редуцированного уравнения (2.4):

$$(3u^2 - c)^2 u'^2 + \frac{\varepsilon^2 c}{2} u^2 - \frac{3\varepsilon^2}{4} u^4 = E_0, \quad E_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

У этого уравнения имеется одно состояние равновесия типа центр (фиг. 1, а), вокруг которого на фазовой плоскости содержатся замкнутые траектории, соответствующие гладким периодическим решениям (фиг. 1, б). Все ограниченные решения заключены внутри прямоугольника со сторонами $2\sqrt{c/3}$ по оси u и $2\varepsilon/\sqrt{12}$ по оси u' (фиг. 1, а). Движению по этому прямоугольнику на фазовой плоскости соответствует "предельная" периодическая волна пилообразной формы

$$u_p(\xi) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}} \left(-|\xi - m\lambda| + \frac{\lambda}{4} \right), \quad |\xi - m\lambda| \leq \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

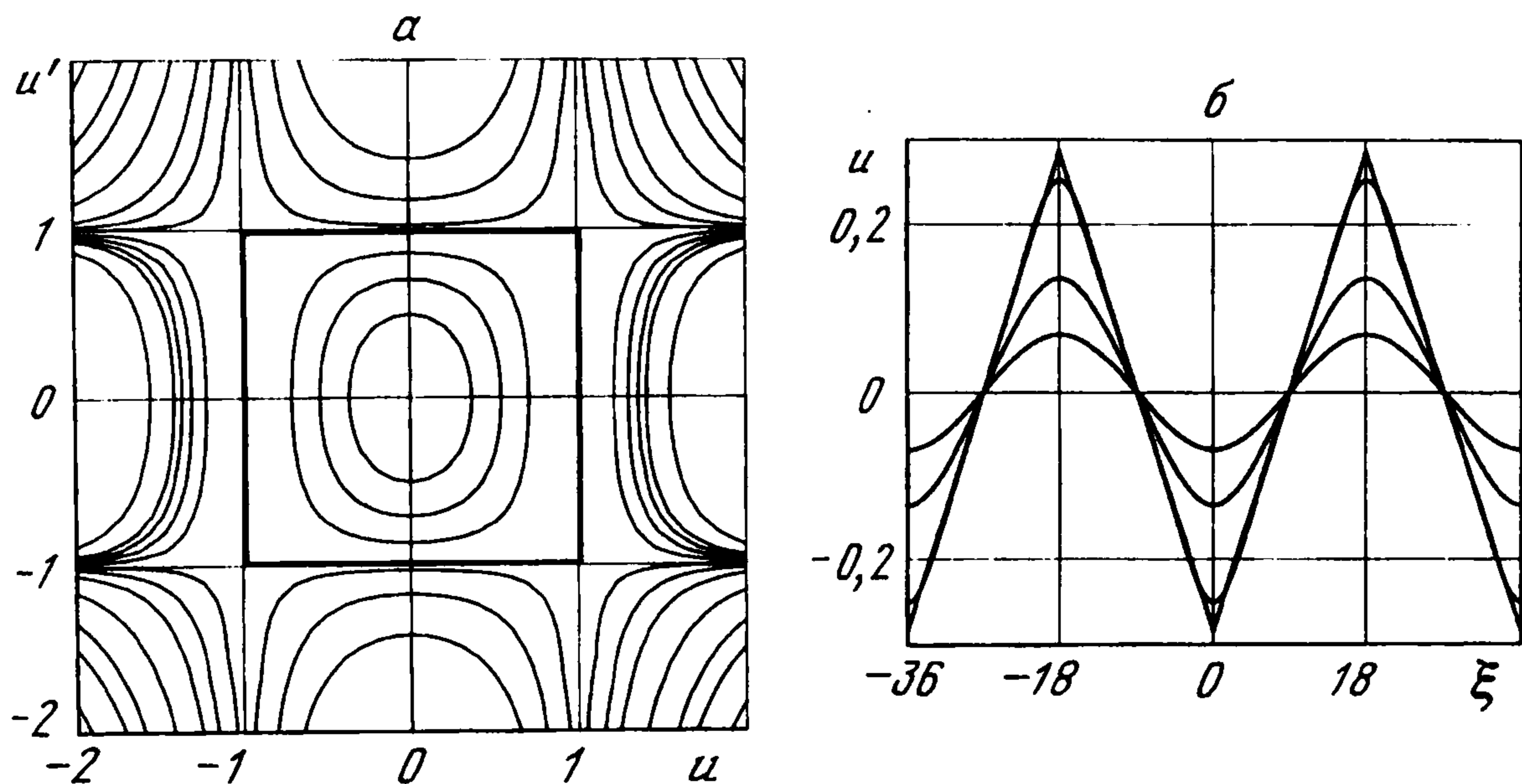
где λ – произвольный параметр, определяющий период волны.

Максимальное значение волны ("амплитуда") $U_p = \varepsilon\lambda/\sqrt{12}$, а ее скорость $c_p = 3U_p^2/16 = \varepsilon^2\lambda^2/64$.

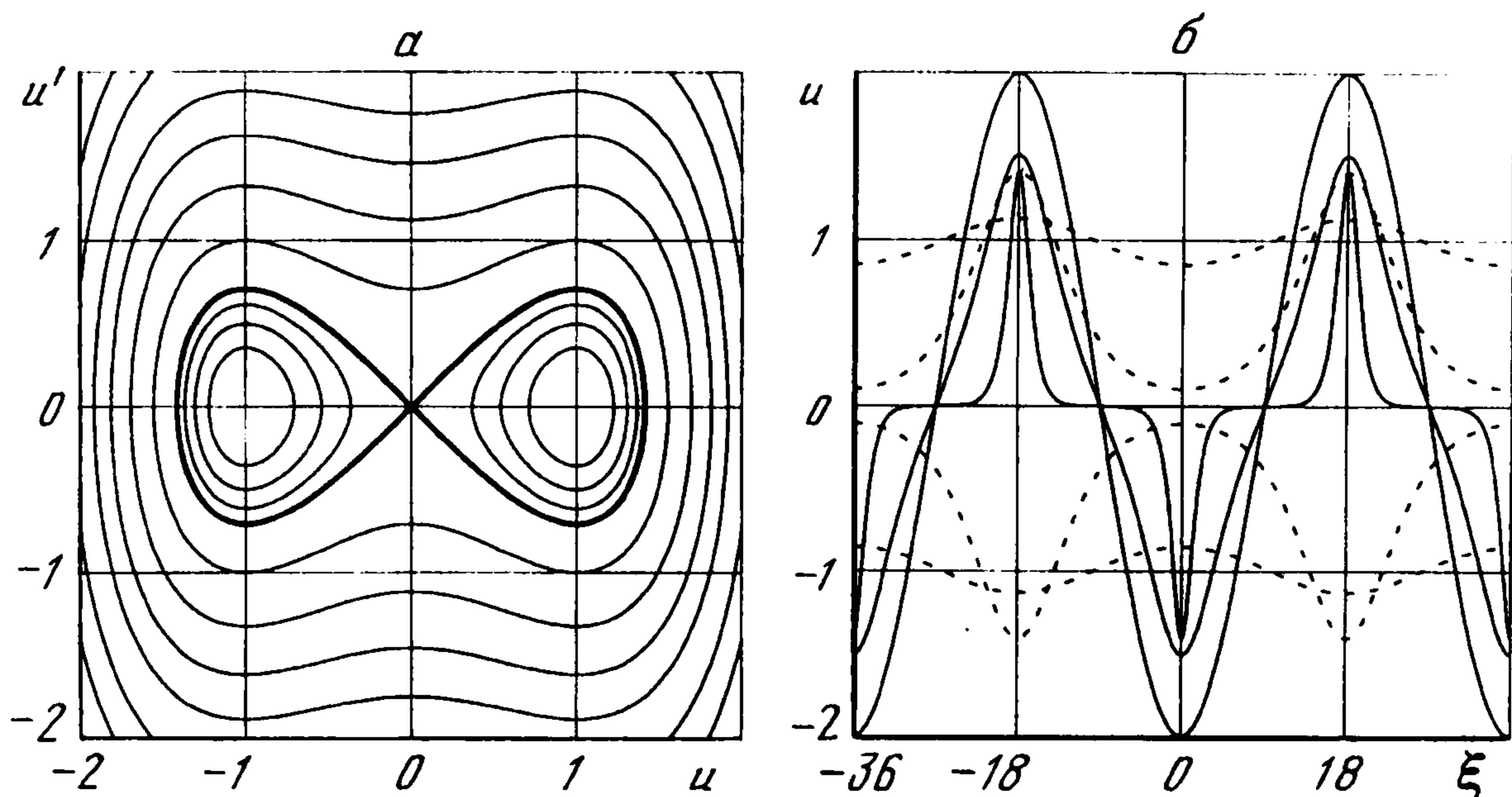
Если теперь пренебречь НЧД ($\varepsilon = 0$), то первый интеграл уравнения (2.4) запишется в виде

$$\sigma u'^2 + 4u^2 - 2u^4 = E_1, \quad E_1 = \text{const} \quad (3.3)$$

На фазовой плоскости (фиг. 2, а) в этом случае имеются три положения равновесия, их тип определяется знаком σ . В дальнейшем ограничимся случаем $\sigma = -1$, поскольку



Фиг. 1



Фиг. 2

только в этом случае уравнение (2.8) обладает солитонными решениями, которые понадобятся впоследствии для построения приближенных решений полного уравнения (2.4). При этом условии одно из состояний равновесия – седло, а два других – центры. Все траектории ограничены и замкнуты. Траектории вблизи центров описывают нелинейные периодические волны с ненулевым средним значением и несимметричным профилем: острыми вершинами и пологими впадинами или наоборот – пологими вершинами и острыми впадинами (штриховые кривые на фиг. 2,б). Асимметрия проявляется тем заметнее, чем ближе расположена траектория к сепаратрисе, показанной жирной линией на фиг. 2,а. Движениям по сепаратрисе также соответствуют "предельные" решения, но другого вида – солитоны МКдВ положительной и отрицательной полярностей. Их форма хорошо известна и легко находится из соотношения (3.3) при $E_1 = 0$:

$$u_s(\xi) = \frac{A}{\text{ch}(\xi/\Delta)}, \quad c_s = \frac{A^2}{2}, \quad \Delta = \frac{1}{|A|\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

Наконец, замкнутые траектории вне сепаратрисы (сплошные кривые на фиг. 2,б) описывают периодические возмущения симметричной формы, которые при относительно малых амплитудах представляют собой последовательность разнополярных солитонов, а при больших амплитудах – квазисинусоидальные волны.

Полное уравнение (2.4) обладает более сложными стационарными решениями, которые в общем случае невозможно представить на фазовой плоскости, но при определенных значениях коэффициентов уравнения (2.4) их форма может быть близка к комбинации из отдельных частей решений, изображенных на фиг. 1, б и 2, б. Семейство таких решений можно построить, "сшивая" два предельных асимптотических решения: пилообразную волну (3.2) с солитоном МКдВ (3.4).

На возможность существования таких решений указывают следующие физические соображения. Рассмотрим плавные периодические возмущения длины λ и проведем грубую оценку дисперсионных слагаемых в уравнении (2.4). По порядку величины оценка ВЧД дает $u/(4\lambda^4)$, тогда как для НЧД имеем $\varepsilon^2 u/2$. Отсюда видно, что при достаточно больших λ ВЧД можно пренебречь по сравнению с НЧД и рассматривать редуцированное уравнение (3.1) и соответствующие ему решения. Попутно отметим, что "предельное решение" (3.2) этого уравнения удовлетворяет и полному уравнению (2.4) почти всюду, за исключением счетного числа точек излома профиля, в которых производная не определена. Именно в этих точках ВЧД становится доминирующей, так что здесь теперь НЧД можно пренебречь. Тогда в окрестности точек излома полное уравнение (2.4) сводится к редуцированному уравнению (3.3), решениями которого могут быть, в частности, солитоны МКдВ (3.4). Поэтому можно предполагать существование таких периодических решений уравнения (2.4), профиль которых почти всюду близок к пилообразной волне (3.2), а в вершинах и впадинах расположены узкие солитоны МКдВ с характерными размерами Δ , много меньшими периода волны λ .

4. Приближенные аналитические решения. Таким образом, приступая к построению приближенных решений уравнения (2.4), выделим в нем два масштаба: внутренний порядка Δ и внешний порядка λ . Представим "внутреннее" решение уравнения (2.4) в виде асимптотического ряда, предполагая параметр ε малым,

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \dots \quad (4.1)$$

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$$

При $\varepsilon = 0$ данное решение переходит в точное решение МКдВ [9], вытекающее из уравнения (2.4) при нулевой правой части. Выберем в качестве "нулевого приближения" $u_0(\xi)$ солитонное решение МКдВ (3.3). Подставим разложения (4.1) в уравнение (2.4) и выпишем получаемые уравнения для первого и второго приближений по параметру ε . Интегрируя их дважды, получим

$$\begin{aligned} \frac{u_1''}{4} + \frac{u_1}{4\Delta^2} + 3u_0^2 u_1 &= c_1 u_0 + \tilde{A}_1 \xi + \tilde{B}_1 \\ \frac{u_2''}{4} + \frac{u_2}{4\Delta^2} + 3u_0^2 u_2 &= c_2 u_0 + c_1 u_1 - 3u_0 u_1^2 + \Delta A \int \arctg[\exp(\xi/\Delta)] d\xi + \tilde{A}_2 \xi + \tilde{B}_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ – постоянные интегрирования. Вдали от вершины солитона при достаточно больших ξ уравнения упрощаются, благодаря тому что функция $u_0(\xi)$ экспоненциально быстро стремится к нулю. В результате получаем простые линейные уравнения второго порядка с полиномиальными правыми частями

$$\begin{aligned} u_1'' + \frac{u_1}{\Delta^2} &= A_1 \xi + B_1 \\ u_2'' + \frac{u_2}{\Delta^2} &= 4c_1 u_1 + A_2 \xi + B_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – новые постоянные интегрирования. Во втором уравнении системы (4.3) учтено, что при достаточно больших ξ функция $\arctg[\exp(\xi/\Delta)] \approx \pi/2$, а

интеграл от нее пропорционален ξ . Частные решения неоднородных уравнений (4.3) имеют вид

$$u_1(\xi) = \Delta^2(A_1\xi + B_1) \quad (4.4)$$

$$u_2(\xi) = \Delta^2[(4c_1A_1\Delta^2 + A_2)\xi + 4c_1B_1\Delta^2 + B_2]$$

Из этих решений видно, что функция $u_1(\xi)$, так же как и $u_2(\xi)$, линейна по ξ . Поправки к скорости c_1, c_2 остаются пока не определенными. Таким образом, с учетом "нулевого приближения" искомое решение с точностью до ε^2 можно записать в виде

$$u(\xi) \approx \frac{A}{\text{ch}(\xi/\Delta)} + \varepsilon\Delta^2(4A_1\xi + B_1) + \varepsilon^2\Delta^2[(4c_1A_1\Delta^2 + A_2)\xi + 4c_1\Delta^2B_1 + B_2] \quad (4.5)$$

"Внешнее" решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$u = \kappa\xi + \mu \quad (4.6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.4), убеждаемся, что оно является его точным решением при $\kappa^2 = \varepsilon^2/12$ и любом μ . Это значит, что решениями уравнения (2.4) могут быть линейные функции как с положительными угловыми коэффициентами $\varepsilon/\sqrt{12}$, так и с отрицательными ($-\varepsilon/\sqrt{12}$). На всей прямой ξ такие решения, очевидно, физического смысла не имеют в виду их неограниченности, однако на отдельных отрезках они могут быть вполне приемлемы. Так, например, из них можно сконструировать периодическую пилообразную волну (3.2), которая всюду, за исключением точек излома профиля (вершин и впадин), будет удовлетворять уравнению (2.4). Наличие старших производных в уравнении (2.4) должно приводить к сглаживанию профиля волны. Такое сглаживание можно приближенно осуществить с помощью решения (3.4), помещая солитоны отрицательной полярности во впадинах, как показано на фиг. 3, а сплошной жирной линией.

Сравнивая поведение решения вдали от точек излома и соответственно вдали от вершин и впадин солитонов, приходим к выводу, что в формуле (4.5) следует оставить лишь линейные члены по ε , а квадратичные по ε слагаемые нужно обратить в нуль путем подходящего выбора постоянных. Таким образом, получаем

$$A_1 = A^2/\sqrt{3}, \quad A_2 = -4c_1A_1\Delta^2 \quad (4.7)$$

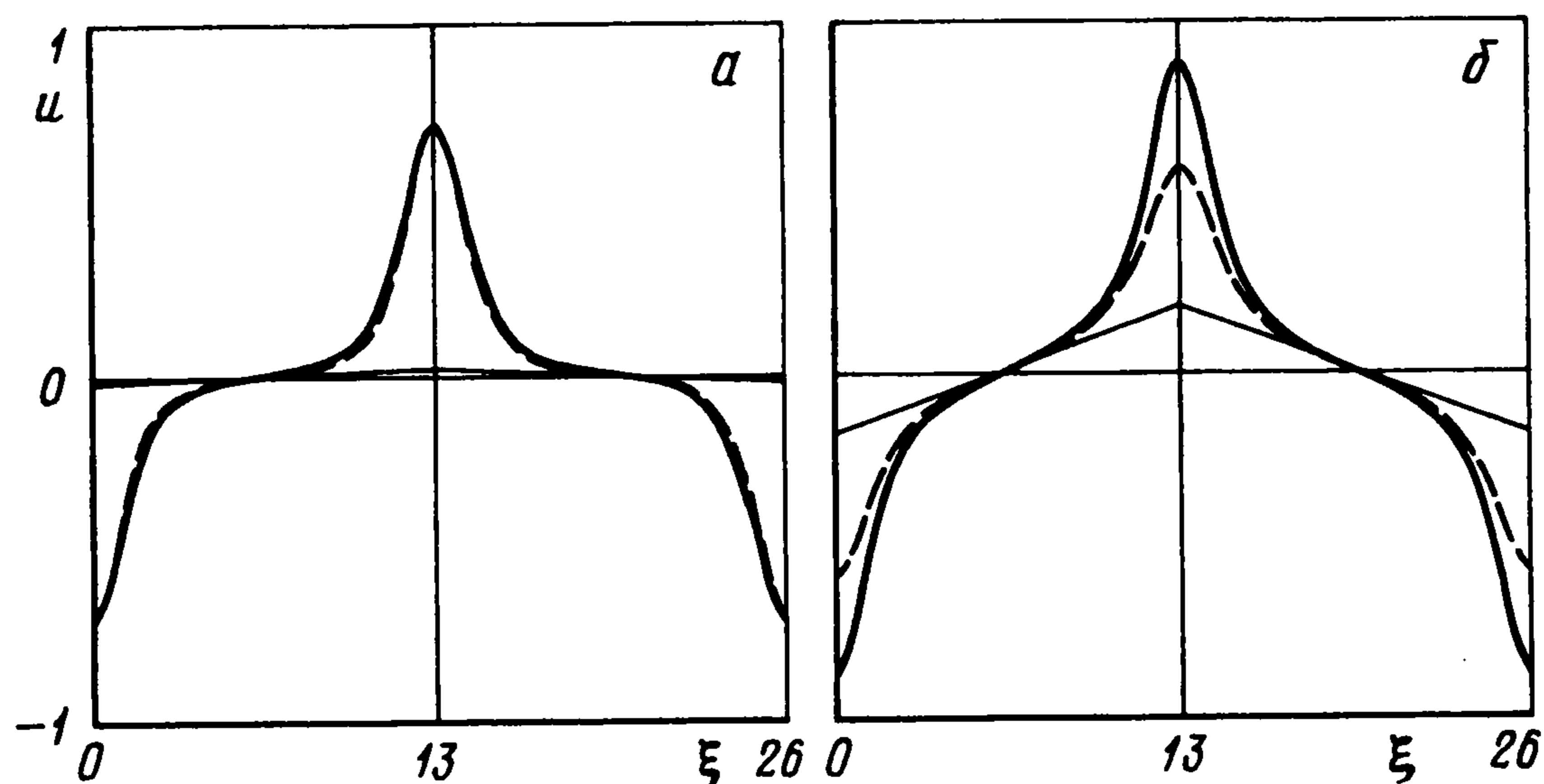
$$B_1 = \mp\lambda A^2/(4\sqrt{3}), \quad B_2 = -4c_1B_1\Delta^2$$

Верхний знак относится к решению справа от вершины солитона, помещенного в начало координат, а нижний – к решению слева. При этом c_1 остается неопределенным параметром. Построенное таким образом решение на интервале $(-\lambda/2, \lambda/2)$ периодически продолжается на всю ось ξ .

Видно, что в высших порядках по ε снова будут возникать линейные решения $u_n(\xi)$, содержащие произвольные коэффициенты A_n, B_n . Все эти высшие поправки также следует обратить в нуль путем подходящего выбора констант A_n, B_n .

На данном этапе решение содержит три свободных параметра: амплитуду солитона A , длину волны λ и поправку к скорости c_1 . Необходимо, однако, принять во внимание ограничение, связанное с интегральным инвариантом I_4 . Подставив в него полученное решение в виде

$$u(\xi) = \begin{cases} \frac{A}{\text{ch}(\xi/\Delta)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}}\left(-|\xi| + \frac{\lambda}{4}\right), & |\xi| \leq \frac{\lambda}{4} \\ \frac{-A}{\text{ch}[(\xi - \text{sign}(\xi)\lambda/2)/\Delta]} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}}\left(-|\xi| + \frac{\lambda}{4}\right), & \frac{\lambda}{4} \leq |\xi| \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$



Фиг. 3

после элементарных вычислений находим поправку к скорости c_1 (при этом был использован тот факт, что длина волны намного превышает характерный размер солитона). Тогда окончательно скорость волны равна

$$c \approx \frac{A^2}{2} + \varepsilon \left(-\frac{7}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} G - \frac{3}{2A} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3\sqrt{3}\pi A\lambda}{64} \right) \quad (4.9)$$

где $G \approx 0,916$ – постоянная Каталана [10].

Таким образом, построенное решение содержит формально два независимых параметра: амплитуду солитона A и длину волны λ . Однако в силу принятых допущений амплитуда солитона ("нулевое приближение") должна быть намного больше амплитуды пилообразной волны, т.е. должно выполняться условие

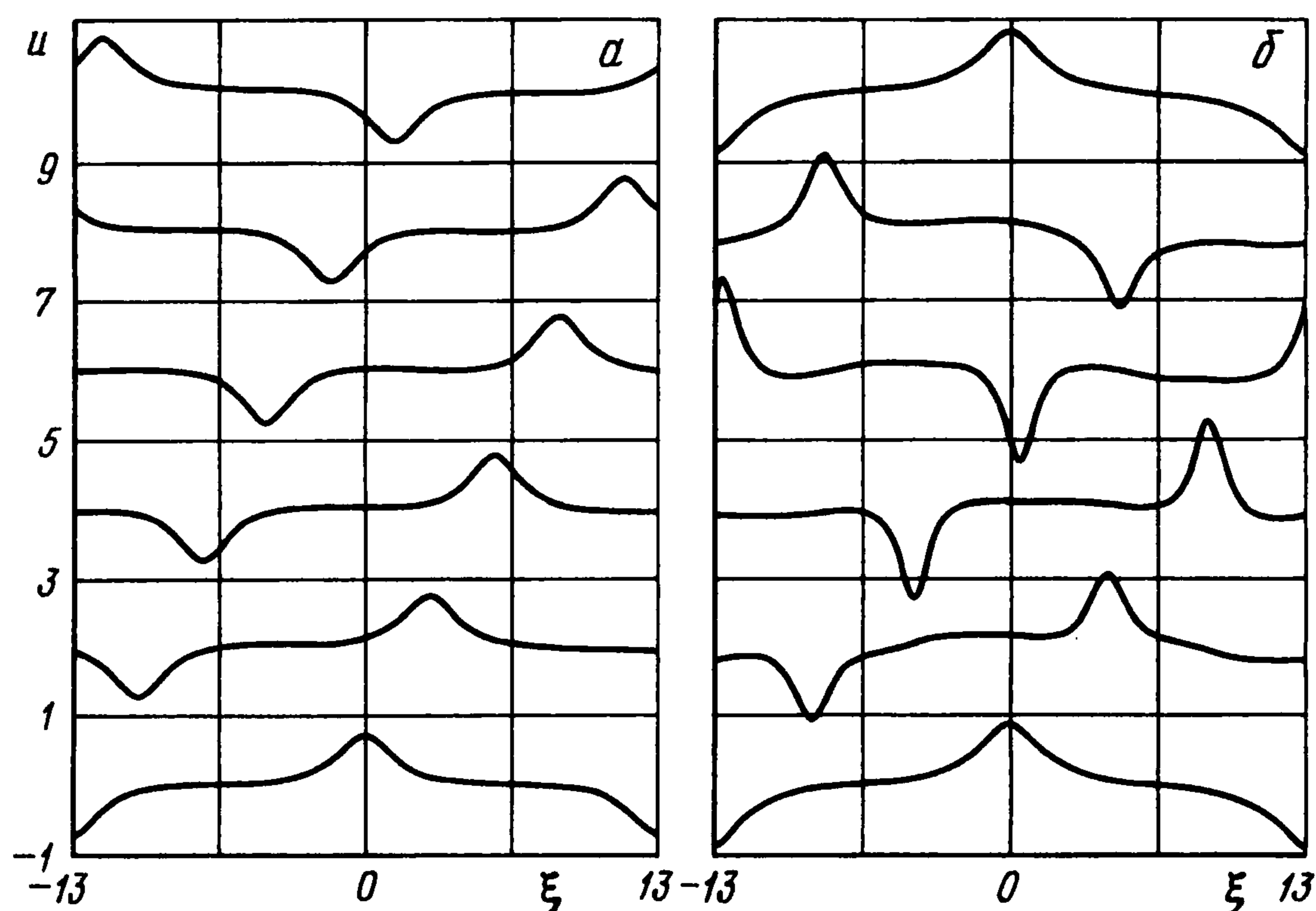
$$A\sqrt{12}/(\varepsilon\lambda) \gg 1 \quad (4.10)$$

Пример такого рода комбинированного периодического решения, состоящего из пилообразной периодической волны со сглаженными вершинами и впадинами, в которых располагаются солитоны МКдВ различной полярности, изображен на фиг. 3, а сплошной жирной линией. При этом $A\sqrt{12}/(\varepsilon\lambda) \approx 9,3$.

Отметим, что при построении аналогичных периодических решений для уравнения Л.А. Островского с квадратичной нелинейностью [4] использовался интегральный инвариант I_1 (2.2), который в рассматриваемом здесь случае тождественно равен нулю в силу антисимметричности построенных решений. Поэтому найденный здесь интегральный инвариант I_4 (2.5) оказался весьма кстати для устранения произвола в скорости волны.

5. Численные решения. Стационарные решения уравнения (2.4) можно также построить численно с помощью метода В.И. Петвиашвили [11]. Это дает возможность провести сравнение приближенных аналитических решений с численными, а также исследовать структуру периодических решений вне области применимости асимптотической теории. Такой подход уже был использован при исследовании свойств уравнения Л.А. Островского с квадратичной нелинейностью [4].

С помощью ранее разработанной программы после ее небольшой корректировки был произведен численный поиск стационарных периодических решений уравнения (2.4). Предполагая коэффициенты уравнения (2.4) известными (полагая, в частности, $\sigma = -1$, $\varepsilon = 0,01$), зададим период волны $\lambda = 26$ и амплитуду солитона $A = 0,7$. Тогда теоретическая скорость волны, согласно (4.9), $c \approx 0,26$. Профиль волны с такими



Фиг. 4

параметрами, представляющей собой приближенное решение, описываемое формулой (4.8), представлен на фиг. 3, *a* сплошной жирной кривой. Волна пилообразного профиля при тех же значениях параметров, описываемая формулой (3.2), представлена на фиг. 3, *a* тонкой сплошной линией. Численное решение, построенное методом В.И. Петвиашвили при тех же значениях ϵ , λ , A , показано на фиг. 3, *a* жирной штриховой кривой. Видно, что приближенное теоретическое решение очень близко к численному при достаточно малых ϵ . При таких значениях параметров условие (4.10) $A\sqrt{12}/(\epsilon\lambda) \approx 9,3 \gg 1$ выполняется достаточно хорошо, что соответствует рамкам применимости построенной здесь теории. Однако при увеличении параметра ϵ условие (4.10) начинает нарушаться, поэтому количественные расхождения между приближенным и численным решениями проявляются все заметнее, хотя качественное согласие между ними сохраняется.

На фиг. 3, *б* показано сравнение двух указанных типов решений при $\epsilon = 0,1$ и прежних значениях остальных параметров ($\lambda = 26$, $A = 0,7$). Профиль волны с такими параметрами, представляющий собой приближенное теоретическое решение, представлен сплошной жирной кривой; волна пилообразного профиля при тех значениях параметров – сплошной тонкой линией; численное решение – жирной штриховой кривой. При этом скорость волны, найденная теоретически, $c \approx 0,255$. Условие (4.10) дает $A\sqrt{12}/(\epsilon\lambda) \approx 9,3$, что уже выходит за рамки применимости построенной здесь теории.

6. Устойчивость приближенных стационарных решений. Для проверки степени стационарности построенных решений и их устойчивости по отношению к малым возмущениям эволюционное уравнение (1.2) решалось численно. В качестве начальных условий использовалось приближенное аналитическое решение (4.8).

Для решения, изображенного на фиг. 3, *a* сплошной жирной кривой ($\epsilon = 0,01$; $\lambda = 26$; $A = 0,7$), хорошо согласующегося с рамками применимости построенной теории, в процессе численного счета происходило стационарное перемещение вдоль оси x на протяжении длительного промежутка времени и какой-либо тенденции к его разрушению не наблюдалось. Однако скорость распространения волны, найденная численно ($\approx 0,28$), оказалась несколько выше теоретической ($\approx 0,26$), при этом скорость солитона МКдВ с той же амплитудой равна $0,245$, а поправка к скорости $\approx 0,01$. Было обнаружено, что разница между численным и теоретическим значением

скорости волны уменьшается с уменьшением параметров ε и λ . Форма стационарного решения, построенного численно с помощью метода В.И. Петвиашвили, также оставалась стационарной, причем ее скорость совпадала с теоретической.

На фиг. 4, а представлена долговременная эволюция указанного численного решения в разные моменты времени с приближенным начальным условием (4.8) и указанными выше значениями параметров. Вертикальная шкала справедлива только для самой нижней кривой ($t = 0$), все остальные кривые последовательно смещены по вертикали. Как видно, в этом случае действительно построенное приближенное решение порождает стационарно движущуюся волну.

На фиг. 4, б представлена временная эволюция начального возмущения, профиль которого изображен на фиг. 3, б сплошной жирной кривой (при этом $\varepsilon = 0,1$; $\lambda = 26$; $A = 0,7$). Вертикальная шкала также справедлива только для самой нижней кривой ($t = 0$), все остальные кривые последовательно смещены по вертикали. Поскольку условия применимости теории при указанных параметрах нарушены, здесь наблюдается существенно нестационарный характер эволюции волны. В этом случае по мере распространения волны происходят заметные искажения ее формы, однако, спустя некоторое время, приблизительно равное периоду волны, ее форма возвращается к первоначальному виду. Такое явление рекурренции хорошо известно для систем, близких к полностью интегрируемым [9].

Авторы благодарят О.А. Гильман за разработку программы численного решения уравнения Л.А. Островского.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00585, 98-02-16973) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 94-4057, 5500-969).

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. № 2. С. 181–191.
2. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны. Физика и астрофизика. М.: Наука, 1993. С. 132–153.
3. Grimshaw R., Ostrovsky L.A., Shrira V.I., Stepanyants Yu.A. Long nonlinear surface and internal gravity waves in a rotating ocean // Surveys in Geophysics. 1998. V. 19. P. 289–338.
4. Gilman O.A., Grimshaw R., Stepanyants Yu. A. Approximate analytical and numerical solutions of the stationary Ostrovsky equation // Stud. Appl. Math. 1995. V. 95. № 1. P. 115–126.
5. Gilman O.A., Grimshaw R., Stepanyants Yu.A. Dynamics of internal solitary waves in a rotating fluid // Dynam. of Atmosph. and Oceans. 1996. V. 23. № 1–4. P. 403–411.
6. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
7. Ostrovsky L.A., Stepanyants Yu.A. Do internal solitons exist in the ocean? // Rev. Geophys. 1989. V. 27. № 3. P. 293–310.
8. Галкин В.М., Степанянц Ю.А. О существовании стационарных уединенных волн во вращающейся жидкости // ПММ. 1991. Т. 55. № 6. С. 1051–1055.
9. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981. = Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
10. Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart: Teubner, 1960. = Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
11. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 199 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
28.I.1999