

УДК 532.5

© 2000 г. А.И. Шафаревич

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ
В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Выводятся общие уравнения, описывающие вихревые нити в несжимаемой маловязкой жидкости. Теория возмущений, приводящая к этим уравнениям, основана на топологических свойствах траекторий стационарных течений идеальной жидкости. Уравнения вихревой нити оказываются похожими на уравнения Прандтля теории пограничного слоя и уравнения В.П. Маслова, описывающие периодические "когерентные" пульсации. Для них найдена бесконечная серия интегральных соотношений, которые при исчезающей вязкости переходят в законы сохранения. Показано, что простейшим "стационарным" решением уравнений вихревой нити является известный вихрь Моффатта – Киды – Окитани. Сами уравнения вытянутого вихря естественно трактовать как уравнения, заданные на графе, с краевыми условиями в его вершинах. Возникающий при этом граф оказывается естественным образом связанным с теорией Морса и топологической теорией интегрируемых гамильтоновых систем – он совпадает с известными в этих теориях инвариантами Роба и А.Т. Фоменко.

Локализованные возмущения в несжимаемой жидкости (вихревые нити, кольца, пленки, узкие следы и струи, пограничные слои и т.д.) с математической точки зрения представляют собой решения уравнений гидродинамики, содержащие малый параметр – характерную ширину возмущения в сравнении с масштабом внешнего потока. Поэтому при их описании используются асимптотические методы, основанные на деформации тех или иных семейств точных решений модельных (невозмущенных) задач.

Ниже развивается асимптотическая схема, описывающая вихревые нити (т.е. возмущения, сосредоточенные в малой окрестности кривой в трехмерном пространстве) и использующая в качестве "нулевого приближения" решения стационарных уравнений Эйлера идеальной жидкости; таким образом, предполагается, что вязкость достаточно мала. Известно (см., например, [1, 2]), что эйлеровы течения обладают богатыми топологическими свойствами; более того, сами семейства таких течений, по-видимому, параметризуются топологическими характеристиками их траекторий ([3, 1]). Это существенным образом отражается на теории возмущений; в частности, основные уравнения асимптотической схемы – уравнения вихревой нити – оказываются тесно связанными с топологическими характеристиками траекторий соответствующего эйлерова поля. Центральный результат работы – вывод указанных уравнений и их исследование; устанавливается аналогия между уравнениями вытянутого вихря и уравнениями Прандтля (в частности, уравнениями с самоиндуцированным давлением), а также предъявляются законы сохранения и интегральные тождества, которым удовлетворяет движение в вихревой нити.

1. Теория возмущений в задаче о вихревой нити. Стационарное трехмерное поле скоростей $u(x)$ несжимаемой вязкой жидкости удовлетворяет уравнениям Навье – Стокса

$$(u, \nabla)u + \nabla p = \nu \Delta u \quad (\nabla, u) = 0 \quad (1.1)$$

Пусть задан гладкий внешний стационарный поток жидкости, т.е. гладко зависящее от своих аргументов $x \in R^3$, $v \in [0, \infty]$ решение $V(x, v)$, $P(x, v)$ этих уравнений, огра-

ниченное со всеми производными. Будем рассматривать возмущение этого потока, локализованное в малой окрестности некоторой (заранее неизвестной) кривой γ в трехмерном пространстве. Характерная ширина ε указанной окрестности (в сравнении с характерным масштабом внешнего поля V) будет малым параметром в рассматриваемой задаче. Такое возмущение естественно трактовать как вихревую нить, расположенную во внешнем потоке; при этом не предполагается малости возмущения по сравнению с полем V . Можно показать (см., например, [4], где это сделано для периодических когерентных структур), что такие быстроменяющиеся решения могут существовать, только если вязкость достаточно мала; точнее, если $\nu = O(\varepsilon^2)$, – в противном случае вязкость разрушает вихрь. Поэтому в дальнейшем полагаем $\nu = \varepsilon^2 \nu_0$, $\nu_0 = O(1)$.

Пусть $x = R(s)$ – параметрические уравнения кривой γ , s – длина дуги; через $n_1(s)$, $n_2(s)$ обозначим ортонормированный репер в нормальной плоскости к γ , удовлетворяющий условию $(n'_1(s), n_2(s)) = 0$. Рассмотрим некоторую не зависящую от ε (но достаточно малую) окрестность G' кривой γ и введем в этой окрестности координаты $\{s, y_1, y_2\}$ по формулам

$$x = R(s) + y_1 n_1(s) + y_2 n_2(s)$$

Решение u, p трехмерных уравнений Навье – Стокса в меньшей окрестности $G \subset G'$ будем искать в виде

$$u = V(x, \varepsilon) + U(y/\varepsilon, x, \varepsilon), \quad p = P(x, \varepsilon) + \pi(y/\varepsilon, x, \varepsilon) \quad (1.2)$$

где функции $U(z, x, \varepsilon)$, $\pi(z, x, \varepsilon)$ гладко зависят от всех своих аргументов при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $z \in R^2$, $x \in G$, причем $U(z, x, \varepsilon)$, $\pi(z, x, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $O(|z|^{-2})$. Через z здесь и далее обозначен двумерный вектор "растянутых" координат в нормальной плоскости к γ : $z = y/\varepsilon$. Вне G функции U , π умножим на гладкую срезающую функцию, равную нулю вне G' .

Задачу о вихревой нити будем рассматривать локально в некоторой ограниченной открытой области, не заботясь о краевых условиях или условиях на бесконечности. Так же, как и в известных задачах о пограничном слое (см., например, [5]), для нее можно рассмотреть "задачу о продолжении вихря", предполагая, что поле вида (1.2) задано на некоторой поверхности M , трансверсально пересекающей кривую γ . Однако в отличие от задачи о продолжении пограничного слоя это "начальное" поле нельзя задавать произвольно – из результатов следующего пункта следует, что оно должно по "быстрым" переменным z удовлетворять полученным ниже уравнениям (1.5)–(1.6). Такая ситуация характерна для асимптотических решений нелинейных уравнений (ср. с [6–8]) – как правило, в таких задачах вид главной части асимптотики отнюдь не произволен.

Разложим функции из (1.2) по формуле Тейлора при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$V(x, \varepsilon) = V(x) + \varepsilon^2 V_1(x) + \dots, \quad P(x, \varepsilon) = P(x) + \varepsilon^2 P_1(x) + \dots \quad (1.3)$$

$$U(z, x, \varepsilon) = U(z, s) + \varepsilon U_1(z, x) + \dots, \quad \pi(z, x, \varepsilon) = \pi_0(z, s) + \varepsilon \pi_1(z, x) + \dots$$

и подставим их в уравнения Навье – Стокса (1.1).

Рассмотрим сперва полученные равенства вне сколь угодно малой окрестности кривой γ (т.е. при $|z| \rightarrow \infty$). Приравнявая нулю коэффициент при ε_0 , получим трехмерные уравнения Эйлера для векторного поля $V(x)$

$$(V, \nabla)V + \nabla P = 0 \quad (\nabla, V) = 0 \quad (1.4)$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что $V(x)$ – гладкое решение этих уравнений.

Внутри области G запишем уравнения Навье – Стокса в координатах (y, s) , подставим выражения (1.3) в уравнения (1.1), положим $y_j = \varepsilon z_j$, разложим полученные соотношения по формуле Тейлора при $\varepsilon \rightarrow 0$ и приравняем нулю коэффициенты при всех степенях ε . При ε^{-1} получим

$$(\nu, \nabla_z) \nu + \nabla_z \pi_0 = 0 \quad (\nabla_z, \nu) = 0 \quad (1.5)$$

$$(\nu, \nabla_z) w = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla_z = (\partial / \partial z_1, \partial / \partial z_2), \quad \nu_j = (V|_\gamma + U, n_j), \quad w = (V|_\gamma + U, dR / ds)$$

Далее всюду будем рассматривать решения ν уравнений Эйлера на плоскости "быстрых" переменных z , удовлетворяющие следующим условиям:

1) векторное поле ν имеет лишь конечное число особых точек; все они невырождены (тогда, в силу бездивергентности ν , эти особые точки – либо седла, либо центры), и на каждой сепаратрисе лежит ровно одна особая точка;

2) почти все траектории поля ν замкнуты.

Из второго требования и из того, что $|U| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ следует, что векторное поле ν убывает на бесконечности, поэтому $(V|_\gamma, n_j) = 0$, т.е. кривая γ – траектория поля $V(x)$. Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. Пусть функции (1.2) удовлетворяют mod $O(1)$ уравнениям Навье – Стокса (1.1). Тогда

а) векторное поле $\nu(z)$ удовлетворяет двумерным уравнениям Эйлера на плоскости;

б) функция w постоянна на траекториях поля ν ;

в) если, кроме того, выполнены условия 1, 2, то кривая γ – траектория векторного поля $V(x)$.

Выпишем уравнения, полученные приравниванием к нулю коэффициента при ε^0 , возникающего при подстановке функций (1.2) в уравнения Навье – Стокса (1.1). Получим

$$\begin{aligned} -(\nu, \nabla_z) w_1 - (\nu^1, \nabla_z) w &= H(z, s) \\ -(\nu, \nabla_z) \nu^1 - (\nu^1, \nabla_z) \nu - \nabla_z \pi_1 &= F(z, s); \quad -(\nabla_z, \nu^1) = G(z, s) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$H(z, s) = w \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} W^2 - k(s)(e(s), \nu) w + (b, \nu) + (Az, \nabla_z) w + \frac{\partial \pi_0}{\partial s} - \nu_0 \Delta_z w$$

$$F(z, s) = w \frac{\partial \nu}{\partial s} + k(s)e(s)(w^2 - W^2) + A\nu + (Az, \nabla_z) \nu - \nu_0 \Delta_z \nu$$

$$G(z, s) = \frac{\partial}{\partial s} (W - w) - k(s)(e(s), \nu)$$

$$\nu_j^1 = (U_1, n_j), \quad w_1 = (U_1, R'(s)), \quad W(s) = (V, R'(s))|_\gamma$$

$$b_j(s) = (R'(s), \partial V / \partial y_j|_\gamma), \quad A_{ij}(s) = (n_i, \partial V / \partial y_j|_\gamma)$$

Написанная система состоит из линеаризованных уравнений (1.5)–(1.6) с ненулевыми правыми частями. Зависимость поля ν и функции w от "медленной" переменной s определяется из условий разрешимости этой системы (ср. с [6–9]).

Прежде чем выписывать эти условия, приведем доказанное ранее [10, 11] утверждение о коядре линеаризованного оператора Эйлера. Рассмотрим уравнения, формально сопряженные к линеаризованным уравнениям (1.5) в пространстве бездивергентных

векторных полей

$$(\nu, \nabla_z) \xi - \frac{\partial \nu^*}{\partial z} \xi = \nabla_z \chi, \quad (\nabla_z, \xi) = 0 \quad (1.8)$$

Здесь ξ – двумерное векторное поле, χ – скалярная функция.

Теорема 1. Пусть $\nu(z)$ – гладкое решение уравнений (1.5) со свойствами 1, 2. Тогда любое гладкое векторное поле ξ , коммутирующее с полем $\nu(z)$, удовлетворяет уравнениям (1.8).

Замечание. Коммутирующие с полем ν векторные поля образуют, очевидно, бесконечномерное линейное пространство (ср. с [4, 12]) – в него входят, в частности, все поля вида $\{-df/\partial z_2, df/\partial z_1\}$, где $f(z)$ – произвольная гладкая функция, постоянная на траекториях поля ν .

Приведем (также полученные ранее [10, 11]) условия разрешимости системы уравнений (1.7).

Теорема 2. Пусть существует гладкое решение (ν^1, w_1, π_1) системы (1.7). Тогда ее правые части $H(z, s)$, $F(z, s)$, $G(z, s)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \oint (F, \nu) d\varphi + a_0(I, s) \frac{\partial B_0}{\partial I} &= 0, \quad B_0 = \frac{\nu^2}{2} + \pi_0 \\ \frac{1}{2\pi} \oint G d\varphi + \frac{\partial a_0}{\partial I} &= 0, \quad \frac{1}{2\pi} \oint H d\varphi + a_0(I, s) \frac{\partial w}{\partial I} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь (и далее в разд. 2) интегрирование ведется по произвольной замкнутой траектории векторного поля $\nu(z)$, (I, φ) – переменные действие – угол поля ν , определенные в окрестности этой траектории (см. ниже), $a_0(I, s)$ – вспомогательная функция.

Замечание. Выписанные условия возникают из условий ортогональности правых частей системы (1.7) указанному в теореме 1 пространству из коядра линейризованного оператора Эйлера (вместе с очевидным бесконечномерным коядром линейного оператора (ν, ∇_z) – последнее состоит из функций, постоянных на траекториях поля ν). При написании условий ортогональности специальным образом выбирается "базис" этого пространства; грубо говоря, он состоит из δ -образных полей с носителями на траекториях ν . Именно такой выбор "базиса" позволяет свести нахождение условий ортогональности к усреднению вдоль траекторий поля ν .

2. Уравнения вихревой нити и их связь с топологическими инвариантами векторных полей. Для дальнейшего понадобятся некоторые топологические и гидродинамические характеристики двумерного векторного поля $\nu(z)$ (зависящего от s как от параметра). Именно, рассмотрим произвольную область на плоскости $\{z_1, z_2\}$, в которой нет положений равновесия и сепаратрис поля ν . Через каждую точку такой области проходит замкнутая траектория этого поля; обозначим через I поделенную на 2π площадь области, ограниченной траекторией. В рассматриваемой области можно ввести координаты (переменные действие – угол, см., например, [1]) I, φ так, что $\varphi \in [0, 2\pi]$ – угловая переменная на замкнутой траектории, причем элемент объема, имеет вид $dI \wedge d\varphi$, а поле $\nu = \omega(I, s) \partial/\partial \varphi$, где ω – частота. Функции, постоянные на траекториях поля ν , имеют вид $f(I, s)$ (не зависят от φ); в частности, из уравнения (1.6) следует, что такой вид имеет функция w . Кроме того, известно, что интеграл Бернулли $\nu^2/2 + \pi_0$ эйлера поля также постоянен на траекториях; обозначим через $B(I, s)$ функцию $\nu^2/2 + \pi_0 + w^2/2$. Таким образом, в каждой области, не содержащей особых точек и сепаратрис поля ν , определены две характеристики вихревой нити – функции двух переменных $B(I, s)$ и $w(I, s)$.

Теорема 3 [10, 11]. Равенства (1.9) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} w \frac{\partial w}{\partial s} + a \frac{\partial w}{\partial I} + \langle \pi_s \rangle &= v_0 \frac{\partial}{\partial I} \left(D^2 \frac{\partial w}{\partial I} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial I} &= 0; \quad w \frac{\partial B}{\partial s} + a \frac{\partial B}{\partial I} = v_0 \left(\frac{\partial}{\partial I} \left(D^2 \frac{\partial B}{\partial I} \right) - \Lambda^2 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_0 - I \frac{\partial W}{\partial s}, \quad \langle \pi_s \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial}{\partial s} \left(\pi_0 - \frac{1}{2} W^2 \right) d\varphi \\ D^2 &= \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi, \quad \Lambda^2 = \left(\frac{\partial v_2}{\partial z_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_2} \right)^2 + D^2 \left(\frac{\partial w}{\partial I} \right)^2 \end{aligned}$$

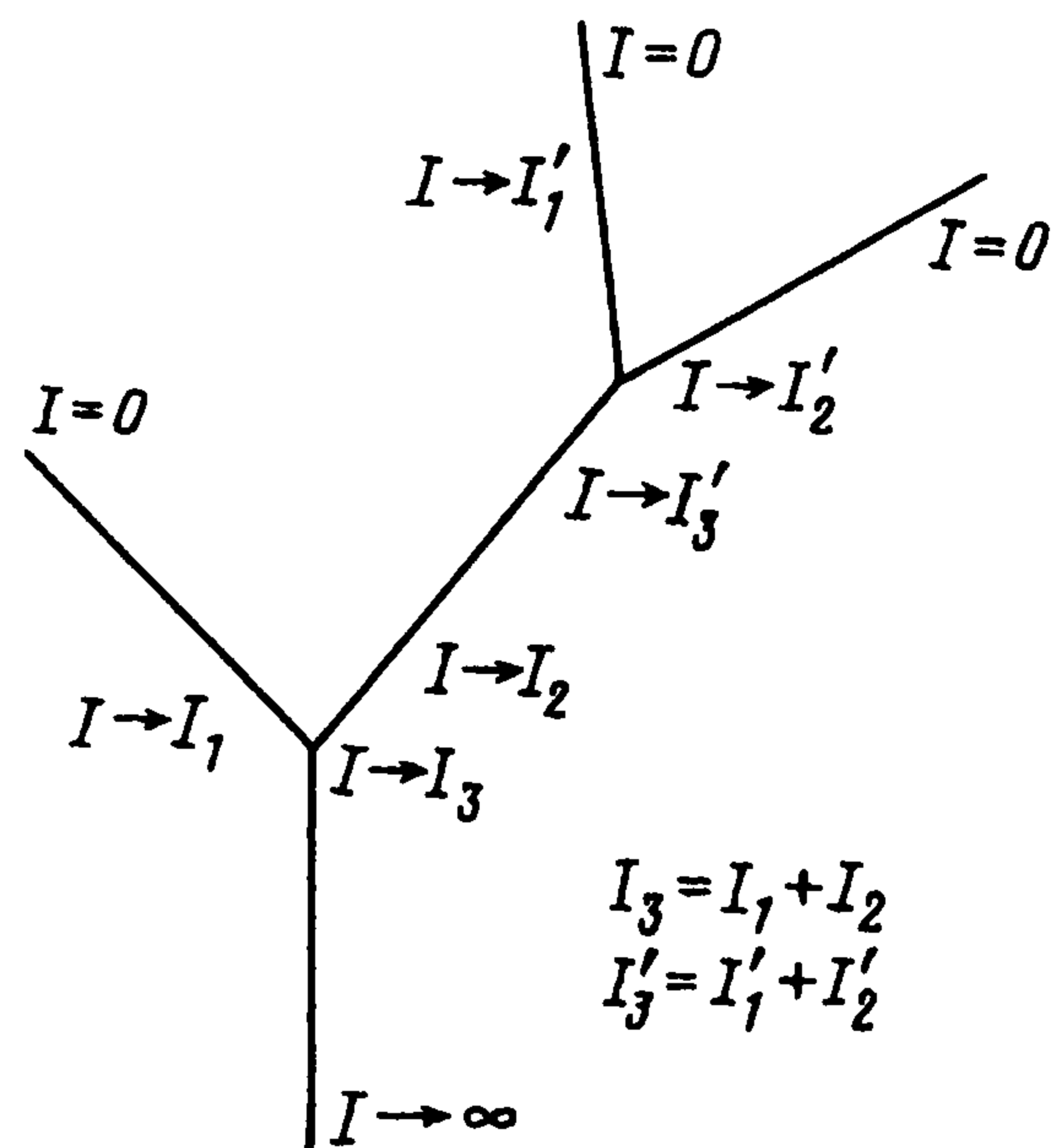
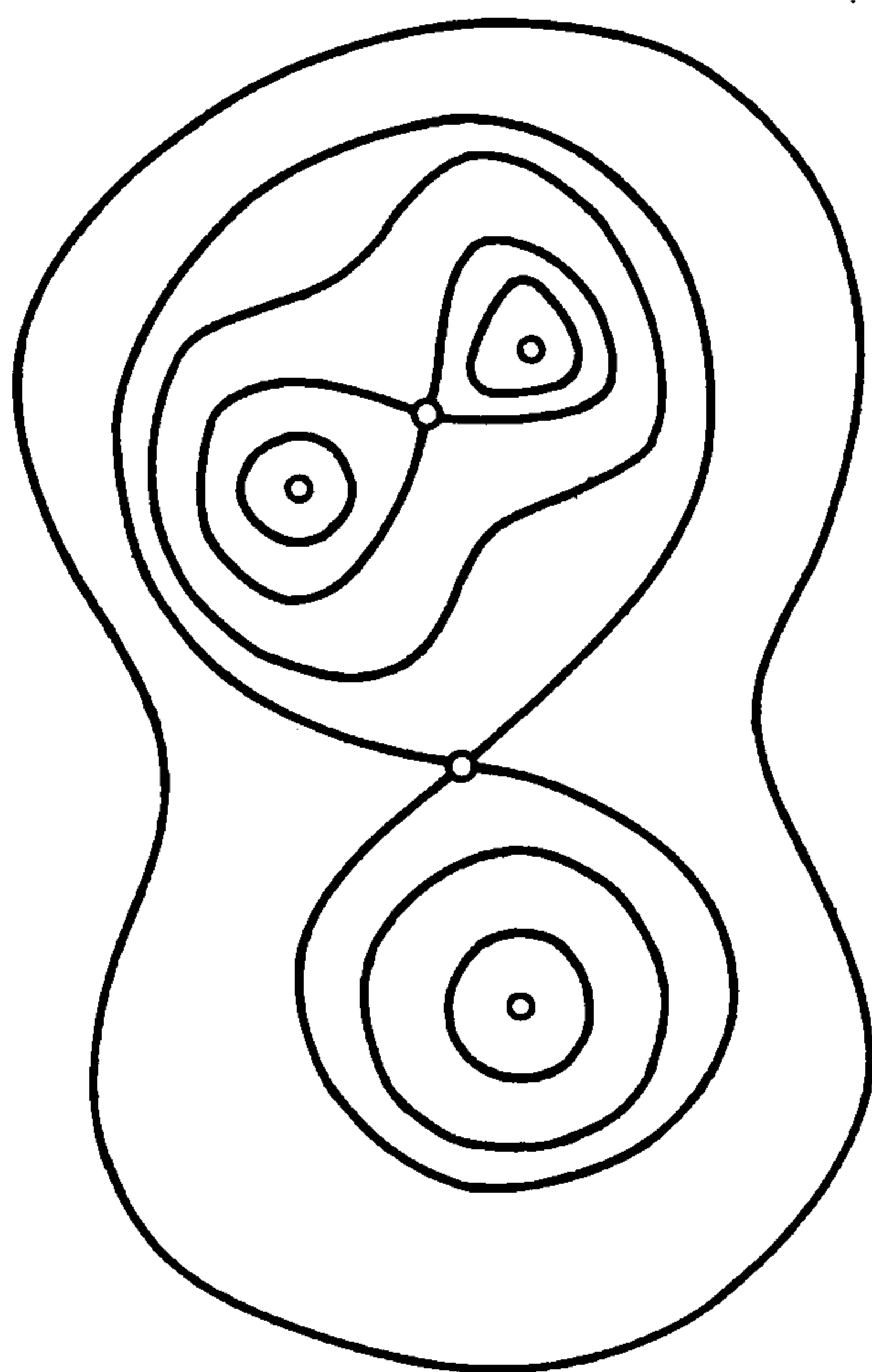
Эта система представляет собой набор уравнений относительно функций w, B , заданных в разных областях плоскости z , не содержащих сепаратрис. В каждой области переменная I меняется на отрезке (или на полупрямой, если область содержит бесконечно удаленную точку). Каждая сепаратриса седловой особой точки ν имеет вид восьмерки и разделяет три таких области, причем значения переменной I на концах соответствующих отрезков, отвечающих данной сепаратрисе, связаны соотношением $I_3 = I_1 + I_2$, где I_1, I_2 – (поделенные на 2π) площади под двумя частями сепаратрисы, на которые она делится седлом, а I_3 – площадь под всей сепаратрисой. Поскольку решение уравнений Навье – Стокса предполагается непрерывно зависящим от быстрых переменных z , каждая из функций w, B в точках I_1, I_2, I_3 , отвечающих данной сепаратрисе, принимает одно и то же значение, равное значению соответствующей функции в седле. Таким образом, на концах отрезков, на которых заданы уравнения (2.1), возникают условия сопряжения.

Для того чтобы наглядно интерпретировать получающиеся соотношения, рассмотрим на плоскости набор отрезков, каждый из которых отвечает некоторой области изменения переменной I , причем концы отрезков, соответствующие одной сепаратрисе, поместим в одну точку плоскости. В результате получим граф Γ , представляющий собой бинарное дерево – в каждой вершине либо сходится три ребра (тогда она соответствует сепаратрисе седла поля ν), либо заканчивается одно (тогда эта вершина соответствует положению равновесия типа "центр"), причем граф не содержит замкнутых путей (циклов). Пример фазового портрета поля ν и соответствующего ему графа Γ изображен на фигуре.

Уравнения вихревой нити по переменной I заданы на этом графе, причем функции B, w на нем непрерывны. Отметим, что функция a свойством непрерывности не обладает. Было показано [10], что, если уравнения (1.7) разрешимы, то $a = 0$ во всех вершинах степени 1, а в каждой вершине степени 3 удовлетворяет условию Кирхгофа теории электрических цепей: $a_3 = a_1 + a_2$, где $a_j = a(I_j)$.

Структура уравнений (2.1) и дополнительных условий, налагаемых на функцию a , не случайна и следующим образом связана с топологическими свойствами решений стационарных уравнений Эйлера. Ранее обсуждалась ([3, 1] и др.) задача о нахождении решений уравнений (1.5) с наперед заданной топологией траекторий; наиболее полно соответствующая процедура описана Моффатом [3] в рамках развитой им теории магнитной релаксации. Эта схема основана на свойствах уравнений магнитной гидродинамики (МГД) идеально проводящей жидкости, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla_z)u + \nabla_z p &= \mu \Delta_z u - H \times \text{rot}_z H \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \{u, H\} &= 0 \quad (\nabla_z, u) = (\nabla_z, H) = 0 \end{aligned}$$



где $H(z, t)$ – магнитное поле, $u(z, t)$ – поле скоростей проводящей жидкости, $\{, \}$ – коммутатор векторных полей, μ – коэффициент вязкости жидкости (этот коэффициент у Моффатта считается достаточно большим).

Идея схемы Моффатта состоит в следующем. Рассмотрим для написанной системы уравнений задачу Коши $u|_{t=0} = 0$, $H|_{t=0} = H_0(z)$, $(\nabla_z, H_0) = 0$. Из физических соображений естественно предполагать, что скорость жидкости затухает со временем, т.е. $u(z, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда из второго уравнения системы МГД следует, что векторное поле H (магнитное поле) стремится при $t \rightarrow \infty$ к некоторому предельному полю $H_\infty(z)$. С другой стороны, из первого уравнения получаем при этом, что H_∞ удовлетворяет уравнению $H_\infty \times \text{rot}_z H_\infty = -\nabla_z p$, которое представляет собой просто другую форму записи стационарных уравнений Эйлера (1.5). Итак, при больших временах магнитное поле H , эволюционируя в силу уравнений МГД, стремится к решению уравнений Эйлера. С другой стороны, второе уравнение системы МГД означает, что векторное поле $H(z, t)$ получается из векторного поля $H_0(z)$ переносом вдоль потока поля u , т.е. (поскольку это поле бездивергентно) при помощи преобразования координат z , сохраняющего элемент площади.

Из схемы Моффатта следует, что семейства решений уравнений (1.5) должны параметризоваться характеристиками поля u , не меняющимися при заменах координат с единичным якобианом (топологическими инвариантами). Эти инварианты можно описать в явном виде: они состоят из множества траекторий поля u , которое в точности совпадает с введенным выше параметризованным графом Γ , и непрерывной функции на нем (например, частоты). Кроме того, множество решений уравнения (1.6) – это множество функций, постоянных на траекториях u , т.е. заданных на том же графе; таким образом, параметры, от которых зависят решения системы (1.5), (1.6) – это пара функций на графе, которые могут эволюционировать вдоль оси вихря, т.е. зависеть еще от переменной s .

Теорема 1 утверждает, что пространство функций на графе Γ содержится в множестве решений уравнений, сопряженных к линеаризованным уравнениям Эйлера. Действительно, бездивергентное векторное поле, коммутирующее с u , имеет те же, что и u , траектории и отличается от u только функцией частот, которая как раз задана на графе Γ .

Теорема 2 описывает условия ортогональности вектора правых частей системы (1.7) пространству пар функций, заданных на графе. Эти условия приводят к уравнениям,

описывающим изменение топологических инвариантов поля v вдоль оси вихря – уравнениям (2.1), связывающим пару функций на графе Γ . Отметим, что граф Γ – это пример известного в топологии объекта – так называемого графа Роба функции Морса (см., например, [13]). Действительно, граф Роба – это множество линий уровня функции, все критические точки которой невырождены; в данном случае эта функция – функция тока двумерного эйлерова течения v .

3. Свойства уравнений вихревой нити. Аналогия с уравнениями Прандтля. Самоиндуцированное давление и аналог турбулентной вязкости. Уравнения (2.1) похожи на уравнения Прандтля теории пограничного слоя: если положить $D = 1$ и считать $\langle \pi_s \rangle$ известной функцией одной переменной s , первые два уравнения в (2.1) совпадут с уравнениями Прандтля. Однако слагаемое $\langle \pi_s \rangle$ не может, вообще говоря, считаться заданной функцией – оно связано с функцией Бернулли B поперечных циркуляций в вихре. Это сближает уравнения (2.1) с так называемыми уравнениями Прандтля с самоиндуцированным давлением (см., например, [14]). То же относится и к функции D^2 , которая входит в правую часть системы (2.1), описывающую влияние вязкости на вихревую нить. Аналогичные функции присутствуют в уравнениях, описывающих турбулентные течения (коэффициенты турбулентной вязкости – см., например, [15]). Отметим однако, что, в отличие от упомянутых уравнений, равенства (2.1) (и, в частности, выражения для коэффициента D^2 и "самоиндуцированного давления" $\langle \pi_s \rangle$) получаются не из физических соображений, а как математическое следствие существования решения уравнений Навье – Стокса, описывающего вихревую нить; связь между этими слагаемыми и функцией B описывается уравнениями Эйлера (1.5).

Условия Кирхгофа, накладываемые на функцию a (вместе с нулевыми условиями в вершинах степени 1), позволяют исключить ее из уравнений (2.1) точно так же, как исключается соответствующая функция из уравнений Прандтля. Действительно, можно получить формулу, выражающую a через w на произвольном ребре графа Γ :

$$a(I, s) = - \int_{I_0}^I \frac{\partial w}{\partial s}(I', s) dI' - \sum_j \int_{m_j} \frac{\partial w}{\partial s}(I, s) dI$$

где I_0 – значение параметра I в начальной точке ребра, а суммирование ведется по всем ребрам m_j графа, контрдостижимым из данного ребра (т.е. достижимым при движении из него в направлении убывания параметра I). Подставляя это выражение в первое и третье равенства (2.1), получим систему двух уравнений, не содержащих функции a .

Дополнительные "краевые" условия для уравнений вихревой нити. Поскольку уравнения (2.1) по одной переменной заданы на графе (т.е. на системе отрезков), их следует дополнить условиями в вершинах (на краях отрезков). Часть этих условий состоит в требовании непрерывности функций B , w на графе Γ ; однако, вообще говоря, этого недостаточно: поскольку в уравнения входят вторые производные по переменной I , необходимо добавить условия α -гладкости [16], которые задаются в вершинах графа и связывают производные от неизвестной функции по ребрам, сходящимся в данной вершине.

Оказывается, для уравнений вихревой нити такие условия (как и сами уравнения) следуют из существования асимптотики. Именно было доказано [10], что, если функции v , $w \in C^2$ – гладкие, то решения уравнений вихревой нити удовлетворяют в каждой вершине степени 3 условиям Кирхгофа

$$\left(D^2 \frac{\partial B}{\partial I} \right)_1 + \left(D^2 \frac{\partial B}{\partial I} \right)_2 = \left(D^2 \frac{\partial B}{\partial I} \right)_3 \quad \left(D^2 \frac{\partial w}{\partial I} \right)_1 + \left(D^2 \frac{\partial w}{\partial I} \right)_2 = \left(D^2 \frac{\partial w}{\partial I} \right)_3$$

где индексами 1, 2 обозначены пределы соответствующих функций в данной вершине по входящим в нее ребрам, а индексом 3 – предел по выходящему ребру (граф ориентирован в направлении возрастания параметра I).

В уравнениях (2.1) имеются свободные параметры, связанные, во-первых, со свободой в определении параметризации графа Γ , а во-вторых, со свободой выбора краевых условий для w, B в вершинах степени 1.

Опишем явно эти параметры. Задание параметризации графа Γ эквивалентно заданию значений параметра I на концах его ребер; при этом во всех вершинах степени 1 это значение должно равняться нулю, а во всех вершинах степени 3 значения, соответствующие трем оканчивающимся в данной вершине ребрам, должны удовлетворять соотношению Кирхгофа $I_3 = I_1 + I_2$. Таким образом, при задании параметризации возникает $2m$ свободных параметров I_1^j, I_2^j ($j=1, \dots, m$), где m – число вершин степени 3 графа Γ (или число седловых особых точек бездивергентного поля v). Кроме того, для уравнений на графе (2.1) можно произвольным образом задавать краевые условия, соответствующие значениям w^j, B^j в его вершинах степени 1 (см. [16]), т.е. в особых точках типа "центр" поля v . Таким образом, возникает набор $2M$ параметров, где M – полное число особых точек поля v . Оказывается, можно получить соотношения, связывающие эти параметры, они следуют из того же условия разрешимости уравнений первого приближения (1.7). Именно справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть уравнения (1.7) допускают C^2 -гладкое решение v^1, w_1 . Тогда в каждой особой точке r_j ($j=1, \dots, M$) векторного поля v выполнены соотношения

$$H(r_j) = 0, \quad \text{rot}_z F(r_j) - G(r_j) \text{rot}_z v(r_j) = 0 \quad (3.1)$$

Доказательство. Рассмотрим первое равенство (1.7) в особой точке r_j . Поскольку $v(r_j) = 0$, первое слагаемое в левой части этого равенства обращается в нуль. Далее, функция w постоянна на траекториях векторного поля v , поэтому особые точки v являются критическими точками w . Следовательно, второе слагаемое в левой части (1.7) также обращается в нуль, что доказывает первое равенство (3.1). Для доказательства второго равенства (3.1) применим операцию rot_z ко второму (векторному) уравнению (1.7) и подставим в полученное равенство особую точку r_j . Учитывая, что функция $\text{rot}_z v$ постоянна на траекториях v , после элементарных вычислений получим второе равенство (3.1).

Замечание. Второе равенство в (3.1) – следствие наличия дельта-функций в ядре линейризованного оператора Эйлера. Действительно, системе (1.8) (сопряженной к линейризованной системе Эйлера) удовлетворяет любое векторное поле вида

$$\xi = \text{sgrad } \delta(z - r_j)$$

где под косым градиентом sgrad дельта-функции понимается линейный функционал на пространстве шварцевских двумерных векторных полей, действующий по правилу

$$\text{sgrad } \delta(z - r_j)[\eta(z)] = -\text{rot } \eta(r_j)$$

Аналогично первое равенство в (3.1) – следствие наличия δ -функций в ядре линейризованного оператора (1.6).

Запишем теперь условия (3.1) в терминах функций B, w . Обозначим через $B_j(s), w_j(s)$ значения этих функций в особых точках r_j векторного поля v (отметим, что это – критические значения указанных функций).

Утверждение 3. Равенства (3.1) эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_j(s)}{\partial s} &= v_0 \Delta_z w(r_j) \\ q_j(s) \frac{\partial w_j(s)}{\partial s} - w_j(s) \frac{\partial q_j(s)}{\partial s} &= -v_0 \Delta(\text{rot}_z v)(r_j) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Через $q_j(s)$ обозначено значение в точке r_j функции завихренности поля v : $q_j(s) =$

$= \text{rot}_z \nu(r_j)$ (напомним, что эта функция постоянна на траекториях поля ν и в частности, r_j – ее критические точки).

Замечание. Соотношения (3.2) представляют собой $2M$ соотношений на $2M$ указанных выше свободных параметров в решениях уравнений вихревой нити (2.1).

Доказательство. Рассмотрим первое равенство в (3.1). Подставляя $H(z, s)$ из формулы (1.7) и учитывая, что

$$\nu(r_j) = \nabla_z w(r_j) = 0$$

получаем

$$w \frac{\partial w}{\partial s}(r_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} W^2 + \frac{\partial \pi_0}{\partial s}(r_j) - \nu_0 \Delta_z w(r_j) = 0 \quad (3.3)$$

Далее, из уравнений Эйлера следует, что

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial s}(r_j) = \frac{\partial B_0}{\partial s}(r_j)$$

Наконец, поскольку r_j – критическая точка функции w , имеем соотношение

$$2w(r_j) \frac{\partial w}{\partial s}(r_j) = \frac{\partial w_j^2}{\partial s}$$

Подставляя полученные равенства в (3.3), получим первое равенство в (3.2). Рассмотрим теперь второе соотношение (3.1). Подставляя сюда F и G из формул (1.7), учитывая, что r_j – критическая точка w и используя стандартные формулы векторного анализа, получим

$$w_j \frac{\partial q_j}{\partial s} + q_j \text{tr} A - q_j \frac{\partial}{\partial s} (w(r_j) - W) - \nu_0 \Delta \text{rot}_z \nu(r_j) = 0$$

Учитывая, что $\text{tr} A = -\partial W / \partial s$, получаем второе равенство в (3.3).

Интегральные тождества и законы сохранения. Уравнения (2.1) обладают рядом интересных свойств. Именно решения этих уравнений удовлетворяют бесконечному числу интегральных тождеств (типа уравнений баланса энергии), которые при $\nu_0 = 0$ (т.е. в идеальной жидкости) переходят в законы сохранения. Кроме того, имеются еще два закона сохранения, справедливых при любом значении ν_0 .

Теорема 4. Пусть функции ν , π_0 , w удовлетворяют уравнениям Эйлера (1.5), (1.6), а построенные по ним функции w , B и некоторая гладкая на ребрах графа Γ функция a удовлетворяют уравнениям (2.1). Пусть a , B , w удовлетворяют условиям Кирхгофа и, кроме того, функции w , ν , π_0 , a_0 убывают при $l \rightarrow \infty$ как $O(l^{-1-\delta})$, $\delta > 0$. Тогда справедливы тождества

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{\Gamma} (w - W) dl = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Gamma} \left(w^2 - W^2 - \left\langle \frac{\nu^2}{2} \right\rangle \right) dl = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{\Gamma} w Q(B) dl = -\nu_0 \int_{\Gamma} [Q''(B) D^2 \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 + \Lambda^2 Q'(B)] dl \quad (3.5)$$

Здесь $Q(t)$ – произвольная гладкая функция, обращающаяся в нуль при $t = 0$, угловыми скобками обозначено усреднение вдоль траекторий поля ν .

Доказательство было получено ранее [10].

Замечание. Равенства (3.4) представляют собой законы сохранения для уравнений вихревой нити: это законы сохранения продольного импульса вихря (интеграла от продольной компоненты скорости по поперечному сечению) и сохранение разности между энергиями продольного течения и поперечных циркуляций в вихре. Равенства (3.5) похожи на уравнения баланса энергии – правая часть описывает вязкую диссипацию. При $\nu_0 = 0$ (т.е., если жидкость идеальная или вязкость много меньше чем ϵ^2) уравнения (3.5) также превращаются в законы сохранения

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{\Gamma} w Q(B) dl = 0$$

Эти равенства напоминают известную серию законов сохранения для двумерных нестационарных уравнений Эйлера. Напомним, что в силу указанных уравнений сохраняется интеграл от любой функции (в частности, любой степени) ротора поля скоростей.

4. Радиально-симметричная вихревая нить. Рассмотрим векторные поля v с простейшим фазовым портретом. Именно будем считать, что у этого поля на плоскости z имеется только одна особая точка. Тогда это обязательно точка типа "центр". Соответствующий граф Γ в этом случае представляет собой полупрямую $I = [0, \infty)$. Широкий класс таких решений уравнений Эйлера (1.5) хорошо известен – это радиально-симметричные поля вида

$$v = (-\partial\psi(r)/\partial z_2, \partial\psi(r)/\partial z_1), \quad r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

где $\Psi(r)$ – гладкая функция. Любое такое векторное поле удовлетворяет уравнениям (1.5), а любая функция $w(r)$ – уравнениям (1.6). Других решений уравнений Эйлера с указанной топологией фазовых кривых не известно; была высказана гипотеза [17], согласно которой их нет. Во всяком случае, в дальнейшем ограничимся рассмотрением радиально-симметричных решений.

Переменные действие – угол в радиально-симметричном случае определены на всей плоскости z с единственной особенностью в нуле; они имеют вид $I = r^2/2$, $\phi = \phi$ (полярный угол). В данной ситуации при вычислениях проще использовать вместо функции Бернулли B частоту $\omega(I)$ на траектории.

Выпишем для этого случая уравнения (2.1), описывающие вихревую нить. Вычтем из последнего уравнения в (2.1) первое, умноженное на w . Получим

$$\left(w \frac{\partial}{\partial s} + a \frac{\partial}{\partial I} \right) (I^2 \omega^2) = 4\nu_0 I^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial I^2} (I\omega) \quad (4.1)$$

Из второго уравнения в (2.1) имеем $w = \partial\psi/\partial I$, $a = -\partial\psi/\partial s$, где $\psi(I, s)$ – гладкая функция (функция тока). Продифференцировав первое уравнение в (2.1) по I и записывая (4.1) через ψ , получим окончательно следующую систему уравнений, эквивалентную в рассматриваемом случае уравнениям вихревой нити

$$\begin{aligned} \{\psi, I^2 \omega^2\} &= 4\nu_0 I^2 \omega \frac{\partial^2}{\partial I^2} (I\omega) \\ \frac{\partial \omega^2}{\partial s} + \left\{ \psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial I^2} \right\} &= 2\nu_0 \frac{\partial^2}{\partial I^2} \left(I \frac{\partial^2 \psi}{\partial I^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\{, \}$ – скобка Пуассона. Условия (3.2) приводят после несложных вычислений к двум краевым условиям при $I = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial I} \right)^2 - W^2 - \int_0^\infty \omega^2 dI \right) = 2\nu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I^2}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial I} \right) = 4\nu_0 \frac{\partial}{\partial I} \frac{1}{\omega} \quad (4.3)$$

Далее рассматриваются два частных случая уравнений (4.2).

Радиально-симметричный вихрь в идеальной жидкости. Пусть $v_0 = 0$; тогда уравнения системы (4.2) имеют нулевые правые части. При этом первое равенство выполнено, если $\omega^2 = f_0(\psi)/I^2$ для некоторой гладкой функции f_0 . После подстановки этого выражения во второе равенство оно преобразуется к виду

$$\{\psi, \partial^2 \psi / \partial I^2 + f'_0(\psi) / I\} = 0$$

Последнее равенство, очевидно, будет выполнено, если

$$\partial^2 \psi / \partial I^2 + f'_0(\psi) / I = -g(\psi)$$

для некоторой гладкой функции g . Таким образом, в радиально-симметричном случае уравнения вихревой нити сводятся к "обыкновенному дифференциальному уравнению" (ср. с уравнением Грэда – Шафранова [18])

$$Id^2 \psi / dI^2 + f(\psi) + Ig(\psi) = 0$$

где f, g – произвольные гладкие функции ($f = f'_0$). Это уравнение должно быть дополнено условием поведения ψ на бесконечности

$$\psi = W(s)I + \xi(s) + O(I^{-1})$$

а также условиями (4.3), которые принимают вид

$$\psi = \lambda I + O(I^2) \text{ при } I \rightarrow 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^\infty \frac{f_0(\psi)}{I^2} dI - W^2 \right) = 0$$

Здесь λ – постоянная (не зависящая ни от I , ни от s).

Вихрь Моффатта – Киды – Очитани. Рассмотрим теперь радиально-симметричный вытянутый вихрь в частном случае линейного внешнего потока $V = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3)$. В качестве траектории γ выберем прямую $x_1 = x_2 = 0$. Тогда система (4.2) допускает простое решение, для которого

$$\psi = I\lambda_3 s, \quad \partial \omega / \partial s = 0, \quad -I\lambda_3 \partial(I^2 \omega^2) / \partial I = 4\nu_0 I^2 \omega \partial^2(I\omega) / \partial I^2$$

Из последнего равенства находим

$$\omega = C(1 - \exp(-\beta I)) / I = 2C(1 - \exp(-\beta r^2 / 2)) / r^2$$

$$C = \text{const}, \quad \beta = \lambda_3 (2\nu_0)^{-1}$$

Это решение (вместе с поправкой к нему) получено и подробно исследовано ранее [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold V.I., Khesin B.A. Topological Methods in Hydrodynamics. N.Y. et al.: Springer, 1997. 375 p.
2. Козлов В.В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 341–342.
3. Moffatt H.K. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Pt 1. Fundamentals // J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 359–378.
4. Маслов В.П. Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41. № 6. С. 19–35.
5. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997. 512 с.
6. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Конечнотонные почти периодические решения в

- ВКБ- приближениях // Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 3–94.
7. Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 63–126.
 8. Молотков И.А., Вакуленко С.А. Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 240 с.
 9. McLaughlin D.W., Papantolaou G.C., Pironneau O.R. Convection of microstructure and related problems // SIAM Journal. Appl. Math. 1985. V. 45. № 5. P. 780–797.
 10. Шафаревич А.И. Дифференциальные уравнения на графах, описывающие асимптотические решения уравнений Навье – Стокса, сосредоточенные в малой окрестности кривой // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 8. С. 1119–1130.
 11. Шафаревич А.И. Обобщенные уравнения Прандтля – Маслова на графах, описывающие растянутые вихри в несжимаемой жидкости // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 6. С. 752–756.
 12. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Fluctuation – generated tokamak pinch instabilities // Russ. A. Math. Physics. 1994. V. 2. № 4. P. 463–485.
 13. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997. 352 с.
 14. Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
 15. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов // Итоги науки и техники. Сер. механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 22. С. 3–61.
 16. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Мат. Заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 777–780.
 17. Moffatt H.K., Kida S., Ohkitani K. Stretched vortices – the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics // J. Fluid Mech. 1994. V. 259. P. 241–264.
 18. Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 318 с.

Москва
e-mail: shaf@difgeo.math.msu.su

Поступила в редакцию
12.VII.1999